Chapitre 12 : Déterminants

Ici, $\mathbb{K}$ désigne un sous corps de $\mathbb{C}$ (généralement $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et n un entier naturel $\geqslant 2$.

I Applications n-linéaires

A) Définition

Définition :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev. Une application n-linéaire de E^n dans F est une application :

$$\begin{aligned} \phi\colon E \times E \times \cdots E &\longrightarrow F \\ (u_1, u_2 \dots u_n) &\longmapsto \varphi(u_1, u_2 \dots u_n) \end{aligned} \tag{12.1}$$

Telle que :

Pour tout $U = (u_1, u_2 \dots u_n)$, les n applications partielles :

$\begin{aligned} \phi_{U,i}\colon E &\longrightarrow F \\ v &\longmapsto \varphi(u_1, u_2 \dots u_{i-1}, v, \dots u_n) \end{aligned}$, obtenues pour $i \in [\![1, n]\!]$, sont linéaires.

Exemple :

2-linéaire = bilinéaire

$\varphi\colon E \times E \to F$ est bilinéaire lorsque :

$$\begin{aligned} \forall v \in E, \forall (u, u') \in E \times E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \varphi(u + \lambda u', v) &= \varphi(u, v) + \lambda\varphi(u', v) \\ \text{et } \varphi(v, u + \lambda u') &= \varphi(v, u) + \lambda\varphi(v, u') \end{aligned} \tag{12.2}$$

Exemple :

$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x \times y \end{aligned}$ est bilinéaire.

Proposition :

Si $\varphi\colon E^n \to F$ est n-linéaire et, pour $(u_1, u_2 \dots u_n) \in E^n$, si l'un des u_i est nul, alors $\varphi(u_1, u_2 \dots u_n) = 0$

En effet : l'application $v \mapsto \varphi(u_1, u_2 \dots u_{i-1}, v, \dots u_n)$ est linéaire donc nulle en 0.

B) Application n-linéaire antisymétrique

Définition :

Soit $\phi\colon E^n \to F$ n-linéaire. On dit que ϕ est antisymétrique lorsque

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad i \neq j \implies \phi(u_1 \dots \underbrace{u_i}_{i} \dots \underbrace{u_j}_{j} \dots u_n) = -\phi(u_1 \dots \underbrace{u_j}_{i} \dots \underbrace{u_i}_{j} \dots u_n) \tag{12.3}$$

Proposition :

Soit $\phi\colon E^n \to F$ antisymétrique. Alors, pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, et tout $(u_1, u_2 \dots u_n) \in E^n$, $\phi(u_{\sigma(1)}, u_{\sigma(2)} \dots u_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) \times \phi(u_1, u_2 \dots u_n)$, où $\varepsilon(\sigma)$ est la signature de σ.

Démonstration :

Montrons par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}$, « pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ se décomposant en produit de k transpositions, et tout $(u_1, u_2 \dots u_n) \in E^n$, $\phi(u_{\sigma(1)}, u_{\sigma(2)} \dots u_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) \times \phi(u_1, u_2 \dots u_n)$ » ($\mathscr{P}(k)$).

- $\mathscr{P}(0)$ ok (la seule transposition qui se décompose en produit de 0 transpositions est l'identité, de signature 1)
- $\mathscr{P}(1)$: c'est la définition de antisymétrique
- Soit $k \in \mathbb{N}$, supposons $\mathscr{P}(k)$. Soit alors $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ s'écrivant $\tau_1 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \tau_k \circ \tau_{k+1}$, où les τ_i sont des transpositions. Soit $\sigma' = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \tau_k$ et $\tau = \tau_{k+1}$.
  Soit $(u_1, u_2 \dots u_n) \in E^n$. Alors :

$$\begin{aligned}
\phi(u_{\sigma(1)}, u_{\sigma(2)} \dots u_{\sigma(n)}) &= \phi(u_{\sigma'(\tau(1))}, u_{\sigma'(\tau(2))} \dots u_{\sigma'(\tau(n))}) \\
&= \phi(u'_{\tau(1)}, u'_{\tau(2)} \dots u'_{\tau(n)}) \quad \text{où on a noté } u'_i = u_{\sigma'(i)} \\
&= -\phi(u'_1, u'_2 \dots u'_n) \\
&= -\phi(u_{\sigma'(1)}, u_{\sigma'(2)} \dots u_{\sigma'(n)}) \\
&= -\varepsilon(\sigma')\phi(u_1, u_2 \dots u_n) \\
&= \varepsilon(\sigma)\phi(u_1, u_2 \dots u_n)
\end{aligned} \tag{12.4}$$

Exemple :

Le produit vectoriel :

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ (u,v) & \longmapsto & u \wedge v \end{array} \tag{12.5}$$

où E est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, est une application bilinéaire antisymétrique.

C) Applications n-linéaires alternées

Définition :

Soit $\phi\colon E^n \to F$ n-linéaire.

On dit que ϕ est alternée lorsque :

> Pour tout $(u_1, u_2 \dots u_n) \in E^n$, si il existe $i, j \in [\![1, n]\!]$ distincts tels que $u_i = u_j$, alors $\phi(u_1, u_2 \dots u_n) = 0$

Proposition :

Alternée $\iff$ antisymétrique

Démonstration :

1. Supposons ϕ alternée.

   Soit $(u_1, u_2 \dots u_n) \in E^n$, soient $i, j \in [\![1, n]\!]$ distincts. On a :

$$\begin{aligned}
\phi(u_1, u_2 \dots \underbrace{(u_i + u_j)}_{i} \dots \underbrace{(u_i + u_j)}_{j} \dots u_n) &= 0 \\
&= \phi(u_1, u_2 \dots (u_i + u_j) \dots u_i \dots u_n) + \phi(u_1, u_2 \dots (u_i + u_j) \dots u_j \dots u_n) \\
&= \underbrace{\phi(u_1, u_2 \dots u_i \dots u_i \dots u_n)}_{=0} + \phi(u_1, u_2 \dots u_j \dots u_i \dots u_n) \\
&\quad + \phi(u_1, u_2 \dots u_i \dots u_j \dots u_n) + \underbrace{\phi(u_1, u_2 \dots u_j \dots u_j \dots u_n)}_{=0}
\end{aligned} \tag{12.6}$$

   Donc $\phi(u_1, u_2 \dots u_j \dots u_i \dots u_n) = -\phi(u_1, u_2 \dots u_i \dots u_j \dots u_n)$

2. Supposons ϕ antisymétrique. Soit $(u_1, u_2 \dots u_n) \in E^n$, supposons qu'il existe $i, j \in [\![1, n]\!]$ distincts tels que $u_i = u_j$.

   Alors $\phi(u_1, u_2 \dots u_i \dots u_i \dots u_n) = -\phi(u_1, u_2 \dots u_i \dots u_i \dots u_n)$.

   Donc $\phi(u_1, u_2 \dots u_i \dots u_i \dots u_n) = 0$ (car $\mathbb{K}$ est un sous corps de $\mathbb{C}$ donc $2 \neq 0$)

Remarque :

L'implication antisymétrique $\implies$ alternée est fausse lorsque $\mathbb{K}$ est par exemple $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, c'est-à-dire un corps de caractéristique 2 (d'où l'intérêt d'avoir deux définitions)

D) Formes n-linéaires alternées en dimension n

On s'intéresse à $\phi\colon E^n \to \mathbb{K}$, n-linéaire alternée lorsque E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension n. On dit alors que ϕ est une forme n-linéaire alternée sur E (pas ^{n})

Étude :

Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots e_n)$ une base de E.

Soit $(u_1, u_2 \dots u_n) \in E^n$, et $A = \text{mat}((u_1, u_2 \dots u_n), \mathscr{B})$

Ainsi, $\forall j \in [\![1, n]\!], u_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$. On a :

$$\begin{aligned}
\phi(u_1, u_2 \dots u_n) &= \phi\left(\sum_{i=1}^n a_{i1} e_i, u_2 \dots u_n\right) \\
&= \sum_{i=1}^n a_{i1} \phi(e_i, u_2 \dots u_n) \\
&= \sum_{i_1=1}^n a_{i_1 1} \left(\sum_{i_2=1}^n a_{i_2 2} \phi(e_{i_1}, e_{i_2} \dots u_n)\right) \\
&= \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n a_{i_1 1} a_{i_2 2} \phi(e_{i_1}, e_{i_2} \dots u_n) \\
&= \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \sum_{i_3=1}^n a_{i_1 1} a_{i_2 2} a_{i_3 3} \phi(e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3} \dots u_n) \\
&= \sum_{(i_1, i_2, \dots i_n) \in [\![1, n]\!]^n} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n} \phi(e_{i_1}, e_{i_2} \dots e_{i_n})
\end{aligned} \tag{12.7}$$

(On a utilisé uniquement le fait que ϕ est n-linéaire)

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\phi(u_1, u_2 \dots u_n) &= \sum_{f\in\mathscr{F}([\![1,n]\!],[\![1,n]\!])} a_{f(1),1}a_{f(2),2}\dots a_{f(n),n}\ \underbrace{\phi(e_{f(1)}, e_{f(2)}\dots e_{f(n)})}_{\substack{=0 \text{ pour } f \text{ non injective car}\\ \phi \text{ est alternée}}} \\
&= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}\dots a_{\sigma(n),n}\phi(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}\dots e_{\sigma(n)}) \\
&= \left(\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}\dots a_{\sigma(n),n}\right)\phi(e_1, e_2\dots e_n)
\end{aligned} \tag{12.8}$$

II Déterminant dans une base d'une famille de n vecteurs

Ici, E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension n.

Théorème :

Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots e_n)$ une base de E.

Alors :

1. Il existe une et une seule forme n-linéaire alternée qui prend la valeur 1 sur $\mathscr{B}$. Elle s'appelle $\det_{\mathscr{B}}$ (déterminant dans la base $\mathscr{B}$)
2. Pour toute forme n-linéaire alternée ϕ sur E, on a, pour tout $(u_1, u_2 \dots u_n) \in E^n$: $\phi(u_1, u_2 \dots u_n) = \det_{\mathscr{B}}(u_1, u_2 \dots u_n)\phi(e_1, e_2 \dots e_n)$

Démonstration :

1. Unicité : si Δ est une forme n-linéaire alternée qui prend la valeur 1 sur $\mathscr{B}$, alors, nécessairement : $\forall(u_1, u_2 \dots u_n) \in E^n$, $\Delta(u_1, u_2 \dots u_n) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}\dots a_{\sigma(n),n}$ (d'après l'étude), où $A = (a_{ij}) = \text{mat}((u_1, u_2 \dots u_n), \mathscr{B})$. D'où l'unicité.

   Vérifions que Δ défini par cette formule est n-linéaire alternée :

   - Δ est n-linéaire : ok. C'est une forme n-linéaire : ok

     Par exemple : linéaire par rapport à la première variable :

     Soient $u_1, u_2 \dots u_n$ de composantes données par la matrice A, u_1' de composantes les $a_{i,1}'$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a alors :

     $$\begin{aligned}
     \Delta(u_1 + \lambda u_1', u_2 \dots u_n) &= \sum \sigma \in \mathfrak{S}_n \varepsilon(\sigma)\left(a_{\sigma(1),1} + \lambda a_{\sigma(1),1}'\right)a_{\sigma(2),2}\dots a_{\sigma(n),n} \\
     &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}\dots a_{\sigma(n),n} + \lambda\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}'a_{\sigma(2),2}\dots a_{\sigma(n),n} \\
     &= \Delta(u_1, u_2 \dots u_n) + \lambda\Delta(u_1', u_2 \dots u_n)
     \end{aligned} \tag{12.9}$$

   - Δ est alternée :

     Soit $(u_1, u_2 \dots u_n) \in E^n$, supposons $u_i = u_j$ avec $i < j$. Soit $\tau = (i, j)$. On a :

     $$\begin{aligned}
     \Delta(u_1, u_2 \dots u_n) &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}\dots a_{\sigma(n),n} \\
     &= \sum_{\sigma\in A_n} a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}\dots a_{\sigma(n),n} - \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n\backslash A_n} a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}\dots a_{\sigma(n),n}
     \end{aligned} \tag{12.10}$$

Or, l'application $\sigma \to \sigma \circ \tau$ constitue une bijection de A_n vers $\mathfrak{S}_n \backslash A_n$. On a donc :

$$\Delta(u_1, u_2 \dots u_n) = \sum_{\sigma \in A_n} a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(n),n} - \sum_{\sigma \in A_n} a_{\sigma\circ\tau(1),1} a_{\sigma\circ\tau(2),2} \dots a_{\sigma\circ\tau(n),n} \tag{12.11}$$

Mais, pour tout $\sigma \in A_n$:

$$\begin{aligned} a_{\sigma\circ\tau(1),1} a_{\sigma\circ\tau(2),2} \dots a_{\sigma\circ\tau(i),i} \dots a_{\sigma\circ\tau(j),j} \dots a_{\sigma\circ\tau(n),n} &= a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(j),i} \dots a_{\sigma(i),j} \dots a_{\sigma(n),n} \\ &= a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(j),j} \dots a_{\sigma(i),i} \dots a_{\sigma(n),n} \\ &\quad (\text{car } u_i = u_j \text{ donc } \forall k \in [\![1, n]\!], a_{ki} = a_{kj}) \\ &= a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(i),i} \dots a_{\sigma(j),j} \dots a_{\sigma(n),n} \end{aligned} \tag{12.12}$$

- $\Delta(e_1, e_2, \dots e_n) = 1$:
  Si $A = I_n$ $(= \text{mat}(\mathscr{B}, \mathscr{B}))$, les produits $a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(i),i} \dots a_{\sigma(j),j} \dots a_{\sigma(n),n}$ sont tous nuls sauf pour $\sigma = \text{Id}$, où il vaut 1.

2. Découle du résultat de l'étude.

Exemple :

- Soit E de dimension 2, $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ une base de E. Soient u_1, u_2 deux vecteurs de E, de composantes $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$. Alors $A = \text{mat}((u_1, u_2), \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$. Ainsi, $\det_{\mathscr{B}}(u_1, u_2) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ $(\mathfrak{S}_2 = \{\text{Id}, \tau_{12}\})$.
- Soit E de dimension 3, $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Soient $u_1, u_2, u_3 \in E$.

$$A = \text{mat}((u_1, u_2, u_3), \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{S}_3 = \{\underbrace{\text{Id}, (1,2,3), (3,2,1)}_{\text{paires}}, (1,2), (2,3), (3,1)\} \tag{12.13}$$

Donc

$$\begin{aligned} \det_{\mathscr{B}}(u_1, u_2, u_3) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} \\ - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} \end{aligned} \tag{12.14}$$

Théorème (Chasles) :
Soient $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ deux bases de E. Alors, pour tout $(u_1, u_2 \dots u_n) \in E^n$:

$$\det_{\mathscr{B}'}(u_1, u_2 \dots u_n) = \det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) \times \det_{\mathscr{B}}(u_1, u_2 \dots u_n) \tag{12.15}$$

Démonstration :

On applique le deuxième résultat du théorème avec $\phi = \det_{\mathscr{B}'}$:

$$\underbrace{\phi(u_1, u_2 \dots u_n)}_{\det_{\mathscr{B}'}(u_1, u_2 \dots u_n)} = \det_{\mathscr{B}}(u_1, u_2 \dots u_n). \underbrace{\phi(e_1, e_2 \dots e_n)}_{\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B})} \tag{12.16}$$

Théorème :
Soit $\mathscr{B}$ une base de E. Soit $(u_1, u_2 \dots u_n) \in E^n$.
Alors $(u_1, u_2 \dots u_n)$ est liée $\iff \det_{\mathscr{B}}(u_1, u_2 \dots u_n) = 0$

Démonstration :

- Si $(u_1, u_2 \dots u_n)$ est liée, alors l'un des u_i, disons u_j est combinaison linéaire des autres : $u_j = \sum_{i \in [\![1,n]\!] \setminus \{j\}} \alpha_i u_i$.
  Alors
  $$\det_{\mathscr{B}}(u_1, u_2 \dots u_n) = \det_{\mathscr{B}}(u_1, u_2, \dots \sum_{i \in [\![1,n]\!] \setminus \{j\}} \alpha_i u_i, \dots u_n) = \sum_{i \neq j} \alpha_i \det_{\mathscr{B}}(u_1, u_2, \dots \underbrace{u_i}_{j}, \dots u_n) = 0 \tag{12.17}$$
- Si $(u_1, u_2 \dots u_n)$ est libre, elle forme une base $\mathscr{B}'$ et alors :
  $$\underbrace{\det_{\mathscr{B}'}(u_1, u_2 \dots u_n)}_{=1 \neq 0} = \det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) \times \det_{\mathscr{B}}(u_1, u_2 \dots u_n) \tag{12.18}$$
  Donc $\det_{\mathscr{B}}(u_1, u_2 \dots u_n) \neq 0$

III Déterminant d'un endomorphisme

Ici, E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension n.

Théorème, définition :
Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E)$, soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots e_n)$ une base de E.
Alors la valeur de $\det_{\mathscr{B}}(\varphi(e_1), \varphi(e_2) \dots \varphi(e_n))$ ne dépend pas du choix de $\mathscr{B}$. On l'appelle $\det(\varphi)$

Démonstration :
Soit $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, \dots e'_n)$ une autre base de E. Alors :

$$\det_{\mathscr{B}'}(\varphi(e'_1), \varphi(e'_2) \dots \varphi(e'_n)) = \det_{\mathscr{B}}(e'_1, e'_2 \dots e'_n) \times \det_{\mathscr{B}'}(\varphi(e_1), \varphi(e_2) \dots \varphi(e_n))$$

(selon la deuxième partie du premier théorème de la section précédente avec $\varphi \colon (u_1, \dots u_n) \mapsto \det_{\mathscr{B}'}(\varphi(u_1), \dots \varphi(u_n))$ appliqué en $(e'_1, e'_2 \dots e'_n)$)

$$= \det_{\mathscr{B}}(\varphi(e_1), \varphi(e_2) \dots \varphi(e_n)) \quad \text{(Chasles)} \tag{12.19}$$

Ainsi, si $A = \mathrm{mat}(\varphi, \mathscr{B})$, alors $\det(\varphi) = \det_{\mathscr{B}}(\varphi(e_1) \dots \varphi(e_n)) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n}$

Théorème :
Soient $\varphi, \psi \in \mathscr{L}(E)$. Alors :

1. $\det(\varphi \circ \psi) = \det(\varphi) \times \det(\psi)$
2. $\det(\mathrm{Id}_E) = 1$
3. $\varphi \in \mathscr{GL}(E) \iff \det(\varphi) \neq 0$, et dans ce cas $\det(\varphi^{-1}) = \frac{1}{\det(\varphi)}$

Démonstration :

Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots e_n)$ une base de E.

1. $\det(\varphi \circ \psi) = \det_{\mathscr{B}}(\varphi \circ \psi(e_1), \varphi \circ \psi(e_2) \dots \varphi \circ \psi(e_n))$

   - Si la famille $(\psi(e_1), \psi(e_2) \dots \psi(e_n))$ est liée, alors $\det(\psi) = 0$. D'autre part, la famille $(\varphi \circ \psi(e_1), \varphi \circ \psi(e_2) \dots \varphi \circ \psi(e_n))$ est aussi liée. Donc $\det(\varphi \circ \psi) = 0$ aussi. Donc $\det(\varphi \circ \psi) = \det(\varphi) \times \det(\psi)$ $(= 0)$.

   - Si la famille des $(\psi(e_1), \psi(e_2) \dots \psi(e_n))$ est libre, elle constitue une base $\mathscr{B}'$ de E, et :

$$\underbrace{\det_{\mathscr{B}}(\varphi \circ \psi(e_1), \varphi \circ \psi(e_2) \dots \varphi \circ \psi(e_n))}_{\det(\varphi\circ\psi)} = \underbrace{\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')}_{\det(\psi)} \times \underbrace{\det_{\mathscr{B}'}(\varphi \circ \psi(e_1), \varphi \circ \psi(e_2) \dots \varphi \circ \psi(e_n))}_{\det(\varphi)} \tag{12.20}$$

2. Immédiat

3. Si $\varphi \in \mathcal{GL}(E)$, on peut introduire φ^{-1}.
   Alors $1 = \det(\mathrm{Id}_E) = \det(\varphi \circ \varphi^{-1}) = \det(\varphi) \times \det(\varphi^{-1})$
   Donc $\det(\varphi) \neq 0$ et $\det(\varphi^{-1}) = \frac{1}{\det(\varphi)}$
   Si $\varphi \notin \mathcal{GL}(E)$, alors $(\varphi(e_1), \varphi(e_2) \dots \varphi(e_n))$ est liée, donc $\det(\varphi) = 0$.

IV Déterminant d'une matrice carrée

A) Définition et propriété

Définition :

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

On note

$$\det(A) \underset{\text{déf}}{=} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(n),n} \tag{12.21}$$

Proposition :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots e_n)$ une base de E.

Soit $(u_1, u_2 \dots u_n) \in E^n$ tel que $\mathrm{mat}((u_1, u_2 \dots u_n), \mathscr{B}) = A$.

Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\mathrm{mat}(\varphi, \mathscr{B}) = A$

Alors :

$$\det(A) = \det(\varphi) = \det_{\mathscr{B}}(u_1, u_2, \dots u_n) \tag{12.22}$$

Propriétés :

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

- $\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$
- $\det(I_n) = 1$
- A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$, et dans ce cas $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
- $\det({}^tA) = \det(A)$

Démonstration :

Les trois premiers sont immédiats en passant par les endomorphismes.

On note ${}^tA = (b_{ij})$, où $\forall(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, b_{ij} = a_{ji}$.

On a donc :

$$\begin{aligned}\det({}^tA) &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) b_{\sigma(1),1} b_{\sigma(2),2} \dots b_{\sigma(n),n} \\ &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \dots a_{n,\sigma(n)}\end{aligned} \tag{12.23}$$

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Pour tout $\rho \in \mathfrak{S}_n$, on a :

$$a_{\rho(1),\sigma(\rho(1))} a_{\rho(2),\sigma(\rho(2))} \dots a_{\rho(n),\sigma(\rho(n))} = a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \dots a_{n,\sigma(n)} \tag{12.24}$$

(simple permutation de l'ordre des termes du produit)

Donc $\det({}^tA) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma^{-1}(1),1} a_{\sigma^{-1}(2),2} \dots a_{\sigma^{-1}(n),n}$.

De plus, $1 = \varepsilon(\sigma^{-1} \circ \sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1}) \times \varepsilon(\sigma)$.

Donc $\varepsilon(\sigma^{-1}) = \frac{1}{\varepsilon(\sigma)} = \varepsilon(\sigma)$. Donc

$$\begin{aligned}\det({}^tA) &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma^{-1}) a_{\sigma^{-1}(1),1} a_{\sigma^{-1}(2),2} \dots a_{\sigma^{-1}(n),n} \\ &= \sum_{\sigma'\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma') a_{\sigma'(1),1} a_{\sigma'(2),2} \dots a_{\sigma'(n),n} \\ &= \det(A)\end{aligned} \tag{12.25}$$

B) Propriétés portant sur les colonnes et les lignes

1) Sur les colonnes

Notation :

$C_1, C_2 \dots C_n$ étant les colonnes de $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on notera $A = [C_1, C_2 \dots C_n]$.

Résultat essentiel : $\det(A) = \det_{\mathscr{B}}(C_1, C_2 \dots C_n)$, où $\mathscr{B}$ est la base naturelle de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Donc les déterminants d'une matrice est une forme n-linéaire alternée de ses colonnes. Ainsi, le déterminant est linéaire par rapport à chaque colonne :

$$\det[C_1, C_2 \dots C_j + \lambda C'_j \dots C_n] = \det[C_1, C_2 \dots C_j \dots C_n] + \lambda \det[C_1, C_2 \dots C'_j \dots C_n] \tag{12.26}$$

Et c'est une forme linéaire alternée :

- $\det[C_1, C_2 \dots C_i \dots C_i \dots C_n] = 0$
- et $\det[C_1, C_2 \dots C_i \dots C_j \dots C_n] = -\det[C_1, C_2 \dots C_j \dots C_i \dots C_n]$
- et $\det[C_{\sigma(1)}, C_{\sigma(2)} \dots C_{\sigma(n)}] = \varepsilon(\sigma) \det[C_1, C_2 \dots C_n]$
- et aussi $\det[C_1, C_2 \dots \underbrace{\sum_{i\neq j} \alpha_i C_i}_{j} \dots C_n] = 0$

Du coup, pour les transformations :

- $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ ne modifie pas le déterminant :

$$\det[C_1, C_2 \dots C_i + \lambda C_j \dots C_n] = \det[C_1, C_2 \dots C_i \dots C_n] + \lambda \underbrace{\det[C_1, C_2 \dots \underbrace{C_j}_{i} \dots C_n]}_{=0} \quad (12.27)$$

- $C_i \leftarrow \alpha C_i$ « multiplie le déterminant par α »
- $C_i \leftrightarrow C_j$ « multiplie le déterminant par -1 »

2) Sur les lignes

Mêmes résultats obtenus par transposition

C) Déterminant d'une matrice triangulaire

Cas d'une matrice diagonale : $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$.

On a alors $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$ (si $\sigma \neq \mathrm{Id}$, alors $a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(n),n} = 0$).

Cas d'une matrice triangulaire : $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & -- & -- & -- \\ 0 & a_{2,2} & -- & -- \\ \vdots & \ddots & \ddots & -- \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$.

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$

Supposons que $a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(n),n} \neq 0$.

Alors :

- $\sigma(1) = 1$ (sinon $\sigma(1) > 1$ et $a_{\sigma(1),1} = 0$)
- $\sigma(2) \leqslant 2$ et $\sigma(2) \neq 1$ donc $\sigma(2) = 2$

$\vdots$

Donc $\sigma = \mathrm{Id}$

Donc $\det(A) = a_{1,1} a_{2,2} \dots a_{n,n}$. On retrouve le fait que A est inversible si et seulement si ses coefficients de la diagonale sont tout non nuls.

Notation :

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} \quad (12.28)$$

Conséquence :

Méthode pratique : le pivot de Gauss pour calculer le déterminant.

Exemple :

On considère le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \tag{12.29}$$

première méthode exclue : formule développée...

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} &\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - L_4 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_4 \\ L_1 \leftarrow L_1 - 2L_4}}{=} \begin{vmatrix} 0 & -1 & -3 & 5 \\ 0 & -2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + L_3}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \\ &\underset{C_3 \leftarrow C_3 + C_4}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \underset{\substack{L_4 \leftrightarrow L_1 \\ L_3 \leftrightarrow L_4 \\ L_2 \leftrightarrow L_4}}{=} (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 15 \end{aligned} \tag{12.30}$$

V Développement selon une rangée

A) Petit lemme

Lemme :
Soit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n-1} & 0 \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}$.

Alors :

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(n),n} \\ &= \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n, \\ \sigma(n) = n}} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(n),n} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n-1}} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(n-1),n-1} \times 1 \\ &= \det(B) \end{aligned} \tag{12.31}$$

Où B est la matrice extraite de A en enlevant la dernière ligne et la dernière colonne.

B) Développement selon une colonne

Soient $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $k \in [\![1, n]\!]$.

La colonne C_k s'écrit :

$$C_k = a_{1,k} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{=E_1} + a_{2,k} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{=E_2} + \dots + a_{n,k} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}_{=E_n} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,k} E_i \tag{12.32}$$

Donc

$$\det A = \det[C_1, C_2 \dots C_n] = \sum_{i=1}^{n} a_{i,k} \underbrace{\det[C_1, C_2 \dots \underbrace{E_i}_{k} \dots C_n]}_{\mu_{i,k}} \tag{12.33}$$

Ainsi, $\boxed{\forall k \in [\![1, n]\!], \det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,k}\mu_{i,k}}$

$$\mu_{i,k} = \begin{array}{c} \\ \\ i \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} \_ & \_ & 0 & \_ \\ \_ & \_ & \vdots & \_ \\ \_ & \_ & 1 & \_ \\ \_ & \_ & 0 & \_ \end{vmatrix} \underset{\substack{C_k, C_{k+1}, \dots C_n \\ \text{permutés} \\ \text{circulairement}}}{=} (-1)^{n-k} \begin{vmatrix} \_ & \_ & \_ & 0 \\ \_ & \_ & \_ & \vdots \\ \_ & \_ & \_ & 1 \\ \_ & \_ & \_ & 0 \end{vmatrix} \leftarrow i$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ k \end{array} \tag{12.34}$$

$$= (-1)^{n-k} \times (-1)^{n-i} \begin{vmatrix} \_ & \_ & \_ & 0 \\ \_ & \_ & \_ & \vdots \\ \_ & \_ & \_ & \vdots \\ \_ & \_ & \_ & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{i+k} \det(A_{i,k})$$

où $A_{i,k}$ est extraite de A en « barrant » la i-ème ligne et la k-ième colonne.

Vocabulaire :

$\mu_{i,k}$ est le cofacteur du terme d'indice i, k

Exemple :

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix} \tag{12.35}$$

Alors :

$$\det A = a \times (-1)^2 \times \begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} - b \times \begin{vmatrix} a' & a'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} + c \times \begin{vmatrix} a' & a'' \\ b' & b'' \end{vmatrix} \tag{12.36}$$

(Pour les signes : forme de damier avec un + en haut à gauche : $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$).

ou $\det A = -a' \times \begin{vmatrix} b & b'' \\ c & c'' \end{vmatrix} + b' \times \begin{vmatrix} a & a'' \\ c & c'' \end{vmatrix} - c' \times \begin{vmatrix} a & a'' \\ b & b'' \end{vmatrix}$ |

C) Développement selon une ligne

Avec les mêmes notations : $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}\mu_{k,j}$.

Démonstration :

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det({}^tA) \quad \text{avec } {}^tA = (a'_{i,j}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a'_{i,k}\mu'_{i,k} = \sum_{i=1}^{n} a'_{i,k}(-1)^{i+k}\det(A'_{i,k}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{k,i}(-1)^{k+i}\det({}^tA_{k,i}) = \sum_{i=1}^{n} a_{k,i}(-1)^{k+i}\det(A_{k,i}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{k,i}\mu_{k,i}
\end{aligned} \tag{12.37}$$

VI Application à l'inverse d'une matrice carrée (si inversible)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition :
Pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\mu_{j,k} &= \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \det(A) & \text{si } i = j \end{cases} \\
\sum_{k=1}^{n} a_{k,i}\mu_{k,j} &= \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \det(A) & \text{si } i = j \end{cases}
\end{aligned} \tag{12.38}$$

Démonstration :

1. Si $i = j$, on reconnaît le développement selon la i-ème ligne du déterminant de A.
   Si $i \neq j$, on reconnaît le déterminant, développé selon la j-ème ligne, de :

$$A' = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} - & - & \cdots & - \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,n} \\ - & - & \cdots & - \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,n} \\ - & - & \cdots & - \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \end{array} \tag{12.39}$$

   Obtenue à partir de A en faisant la transformation $L_i \leftarrow L_j$ (non élémentaire !)
   En effet, les cofacteurs des termes de la j-ème ligne de A' sont les mêmes que les cofacteurs des termes de la j-ième ligne de A.

2. On le démontre de la même manière avec la matrice A' déduite de A en faisant la transformation $C_i \leftarrow C_j$

Conséquence :
Notons $M = (\mu_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (M s'appelle la comatrice de A, notée $\mathrm{com}(A)$).
Les formules précédentes disent : $A \times {}^tM = \det(A) I_n$ et ${}^tM \times A = \det(A) I_n$
Ainsi, si $A \notin \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$, ${}^tM \times A = A \times {}^tM = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}$. Et, si A est inversible : $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}{}^tM = \frac{1}{\det(A)}{}^t(\mathrm{com}(A))}$.

Exemple :
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. A est-elle inversible, si oui quel est son inverse ?

$\text{com}(A) = \begin{pmatrix} 4 & & \\ -5 & & \\ 3 & & \end{pmatrix}$. Déjà, $\det(A) = 1 \times 4 + (-1) \times 5 + 1 \times 3 = 12 \neq 0$. Donc A est inversible. On continue :

$$\text{com}(A) = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -5 & 1 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \tag{12.40}$$

Donc $A^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 & -5 & 3 \\ 4 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Cas particulier (à connaître) :
Si $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, $\det(A) = ad - bc$; $\text{com}\, A = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Si $\det(A) \neq 0$, $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$ (correspond en fait à un échange entre a et d, et une multiplication de b et c par -1).

VII Formules de Cramer

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, inversible.

On s'intéresse au système : $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, de solution $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Or, $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t(\text{com}(A))$.
Ainsi,

$$\forall p \in [\![1, n]\!], x_p = \frac{1}{\det A} \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\mu_{k,p}}_{\text{transposée !}} b_k = \frac{1}{\det A} \det \begin{pmatrix} \text{la matrice obtenue à partir de } A \\ \text{en remplaçant sa } p\text{-ième colonne} \\ \text{(c-à-d celle des coefficients de } x_p \\ \text{par la colonne du second membre} \end{pmatrix} \tag{12.41}$$

Exemple :
On considère le système

$$\begin{cases} 6x + 3y + 4z & = 1 \\ 5x - 7y + 5z & = 2 \\ 5x + 3y + 3z & = 0 \end{cases} \tag{S}$$

Matrice du système : $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 \\ 5 & -7 & 5 \\ 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. $\det(A) = 14$.

Donc (S) est de Cramer, et :

$$x = \frac{1}{14}\begin{vmatrix}1 & 3 & 4\\ 2 & -7 & 5\\ 0 & 3 & 3\end{vmatrix} = \frac{1}{14}(-7\times 3 - 5\times 3 - 2(9-12)) = -\frac{30}{14} = -\frac{15}{7} \tag{12.42}$$

$$y = \frac{1}{14}\begin{vmatrix}6 & 1 & 4\\ 5 & 2 & 5\\ 5 & 0 & 3\end{vmatrix} = \frac{1}{14}(-(5\times 3 - 5\times 5) + 2(6\times 3 - 5\times 4)) = \frac{6}{14} = \frac{3}{7} z \quad = \frac{1}{14}\begin{vmatrix}6 & 3 & 1\\ 5 & -7 & 2\\ 5 & 3 & 0\end{vmatrix} = \frac{1}{14}(15+35-2(18-15)) = \tag{12.43}$$

VIII Complément : polynôme caractéristique d'une matrice carrée

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On note $I = I_n$.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on pose $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. Alors la fonction $\lambda \mapsto P(\lambda)$ est polynomiale en λ, de degré n :

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \begin{vmatrix} a_{1,1}-\lambda & a_{1,2} & \dots & a_{1,n}\\ a_{2,1} & a_{2,2}-\lambda & \dots & a_{2,n}\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ a_{n,1} & \dots & \dots & a_{n,n}-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (a_{1,1}-\lambda)(a_{2,2}-\lambda)\dots(a_{n,n}-\lambda) + \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n\setminus\{\mathrm{Id}\}} \varepsilon(\sigma) a'_{\sigma(1),1}a'_{\sigma(2),2}\dots a'_{\sigma(n),n} \end{aligned} \tag{12.44}$$

où $a'_{i,j} = a_{i,j}$ si $i \neq j$ et $a'_{i,j} = a_{i,j} - \lambda$ sinon.

Coefficient de X^n : $(-1)^n$

Coefficient de X^0 : $P(0) = \det(A)$

Coefficient de X^{n-1} :

$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n\setminus\{\mathrm{Id}\}} \varepsilon(\sigma) a'_{\sigma(1),1}a'_{\sigma(2),2}\dots a'_{\sigma(n),n}$ est polynomial en λ, mais de degré $\leqslant n-2$: si une permutation σ fixe $n-1$ éléments, alors elle fixe le n-ième aussi et donc $\sigma = \mathrm{Id}$.

Donc le coefficient de X^{n-1} vaut : $(-1)^{n-1}\sum_{i=1}^n a_{i,i} = (-1)^{n-1}\times \mathrm{Tr}(A)$

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n, $\mathscr{B}$ une base de E, $A = \mathrm{mat}(f, \mathscr{B})$.

Alors le polynôme P caractéristique de A ne dépend pas du choix de $\mathscr{B}$ (on l'appelle le polynôme caractéristique de f). En effet, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det(f - \lambda\,\mathrm{Id})$.

On a les équivalences :

$$\begin{aligned} \lambda \text{ est racine de } P &\iff \det(f - \lambda\,\mathrm{Id}) = 0 \\ &\iff f - \lambda\,\mathrm{Id} \text{ est non bijective} \\ &\iff f - \lambda\,\mathrm{Id} \text{ est non injective} \\ &\iff \ker(f - \lambda\,\mathrm{Id}) \neq \{0\} \\ &\iff \exists u \in E\setminus\{0\}, f(u) = \lambda u \\ &\underset{\text{déf}}{\iff} \lambda \text{ est valeur propre de } f \end{aligned} \tag{12.45}$$

Si P admet n racines distinctes deux à deux, alors il existe une base $\mathscr{B}'$ de E dans laquelle la matrice de f est diagonale :

Notons $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ ces racines.

On peut introduire $u_1, u_2, \dots u_n \in Ei \setminus \{0\}$ tels que $\forall k \in [\![1, n]\!], f(u_k) = \lambda_k u_k$.

Montrons que $(u_1, u_2, \dots u_n)$ est libre.

Pour cela, montrons par récurrence que $\forall k \in [\![1, n]\!], (u_1, u_2, \dots u_k)$ est libre.

- pour $k = 1$, ok car $u_1 \neq 0$
- soit $k \in [\![1, n-1]\!]$, supposons que $(u_1, u_2, \dots u_k)$ est libre.

  Soit $(\mu_1, \mu_2, \dots \mu_{k+1}) \in \mathbb{K}^n$, supposons que

$$\mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \dots + \mu_{k+1} u_{k+1} = 0 \tag{12.46}$$

  Alors, en appliquant f, on a

$$\mu_1 \lambda_1 u_1 + \mu_2 \lambda_2 u_2 + \dots + \mu_{k+1} \lambda_{k+1} u_{k+1} = 0 \tag{12.47}$$

  Puis en faisant $\lambda_{k+1}(12.46) - (12.47)$:

$$\mu_1(\lambda_{k+1} - \lambda_1)u_1 + \mu_2(\lambda_{k+1} - \lambda_2)u_2 + \dots + \mu_k(\lambda_{k+1} - \lambda_k)u_k = 0 \tag{12.48}$$

  Donc $\forall i \in [\![1, k]\!], \mu_i = 0$, car les λ_i sont distincts deux à deux, et $(u_1, u_2, \dots u_k)$ est libre.

  Enfin, $\mu_{k+1} = 0$ car $u_{k+1} \neq 0$.

  Donc $(u_1, u_2, \dots u_{k+1})$ est libre, ce qui achève la récurrence.

Donc $(u_1, u_2, \dots u_n)$ est libre, de cardinal n. c'est donc une base de E.

De plus, par construction, la matrice de f dans cette base est diagonale :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{12.49}$$

Exemple où P a n racines non distinctes et f n'est pas diagonalisable :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Alors $P(\lambda) = \det(A_n - \lambda I_n) = (1-\lambda)^n$. (matrice triangulaire supérieure)

On doit donc trouver $\mathscr{B}' = (e_1, e_2, \dots e_n)$ tel que :

$$\operatorname{mat}(f, \mathscr{B}') = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{12.50}$$

Mais alors, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$: $f(e_k) = \lambda_k e_k$.

Comme $e_k \neq 0$, λ_k est racine de P, donc $\lambda_k = 1$.

Donc $\operatorname{mat}(f, \mathscr{B}') = I_n$, ce qui est impossible.