Chapitre 11 : Matrices

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ est un corps commutatif (souvent un sous corps de $\mathbb{C}$). Les lettres n, p, q...désignent des éléments de $\mathbb{N}^*$.

I Définition

A) Matrice

Définition :
Une matrice de type (n, p) à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une famille $(a_{i,j})$ d'éléments de $\mathbb{K}$ indexée par $[\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$. Leur ensemble est noté $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ est noté aussi $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

B) Représentation d'une matrice

Une matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est représentée par un tableau à n lignes, p colonnes de sorte que, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$, $a_{i,j}$ est placé sur la i-ème ligne de la j-ème colonne.
Ainsi :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \tag{11.1}$$

La i-ème ligne de A est $(a_{i,1}, a_{i,2} \dots a_{i,p}) \in \mathscr{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ (matrice ligne)
La j-ème colonne de A est $(a_{1,j}, a_{2,j} \dots a_{n,j}) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (matrice colonne)
Une matrice de type (n, n) s'appelle une matrice carrée d'ordre n.

II Matrice d'une famille de vecteurs dans une base

Ici, E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension p, muni d'une base $\mathscr{B}_E = (e_1, e_2, \dots e_p)$.

Soit $v \in E$, on lui associe la matrice colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ de ses composantes dans la base $\mathscr{B}_E$.

L'application :

$$\begin{aligned} \varphi\colon E &\longrightarrow \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \\ v &\longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{11.2}$$

est évidemment bijective, d'inverse

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^{p} x_i e_i \tag{11.3}$$

Plus généralement, étant donnée une famille $\mathscr{F} = (v_1, v_2 \dots v_q)$ d'éléments de E, on introduit la matrice $A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ telle que, pour tout $j \in [\![1, q]\!]$, la j-ème colonne de A soit la colonne des composantes de v_j dans la base $\mathscr{B}_E$. Cette matrice sera notée $\text{mat}(\mathscr{F}, \mathscr{B}_E)$.

Exemple :

$$P = 1 - 2X, \qquad Q = 3 + X^2, \qquad R = 1 + X + X^2 \tag{11.4}$$

Matrice de (P, Q, R) dans la base naturelle de $\mathbb{R}_2[X]$ ($(1, X, X^2)$) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{11.5}$$

C'est aussi la matrice de $((1, -2, 0), (3, 0, 1), (1, 1, 1))$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

III Matrice d'une application linéaire dans des bases

Définition :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension p, muni d'une base $\mathscr{B}_E = (e_1, e_2, \dots e_p)$.

Soit F un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, muni d'une base $\mathscr{B}_F = (f_1, f_2, \dots f_n)$.

Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E, F)$

La matrice de φ dans les bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$ est, par définition, la matrice à n lignes, p colonnes, qui donne, par colonne, les $\varphi(e_j)$ dans la base $\mathscr{B}_F$:

C'est $\text{mat}((\varphi(e_1), \varphi(e_2) \dots \varphi(e_p)), \mathscr{B}_F)$, notée $\text{mat}(\varphi, \mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F)$.

Proposition :

La matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ détermine une unique application linéaire $\varphi \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que $A = \text{mat}(\varphi, \mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F)$.

Démonstration :

C'est le fait que la donnée des images des vecteurs de $\mathscr{B}_E$ détermine une et une seule application linéaire.

Ainsi, l'application $\begin{array}{rccl} \phi_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F} : & \mathscr{L}(E, F) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ & \varphi & \longmapsto & \text{mat}(\varphi, \mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F) \end{array}$ est bijective.

Cas particulier :

Si $E = F$ et $\mathscr{B}_E = \mathscr{B}_F$, alors $\text{mat}(\varphi, \mathscr{B}_E, \mathscr{B}_E)$, notée $\text{mat}(\varphi, \mathscr{B}_E)$ est la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}_E$

IV Le $\mathbb{K}$-ev $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Idée : Transporter avec $\varphi_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}$ la structure de $\mathbb{K}$-ev de $\mathscr{L}(E, F)$ de sorte que $\varphi_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}$ devienne un isomorphisme (et pas seulement une bijection).

A) Somme

Étude :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension p, muni d'une base $\mathscr{B}_E = (e_1, e_2, \dots e_p)$.

Soit F un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, muni d'une base $\mathscr{B}_F = (f_1, f_2, \dots f_n)$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$, de matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ dans $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$.

Soit $g \in \mathscr{L}(E, F)$, de matrice $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ dans $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$.

Alors, pour tout $j \in [\![1, p]\!]$:

$$(f+g)e_j = f(e_j) + g(e_f) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} f_i + \sum_{i=1}^{n} b_{i,j} f_i = \sum_{i=1}^{n} (a_{i,j} + b_{i,j} f_i \tag{11.6}$$

La matrice de $f+g$ dans $\mathscr{B}_E$, $\mathscr{B}_F$ est donc la matrice $C = (c_{i,j})$ définie par :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \forall j \in [\![1, p]\!], c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j} \tag{11.7}$$

Définition :

Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ deux éléments de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. $A+B$ est la matrice $C = (c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ telle que $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!], c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$.

Théorème :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension p, muni d'une base $\mathscr{B}_E = (e_1, e_2, \dots e_p)$.

Soit F un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, muni d'une base $\mathscr{B}_F = (f_1, f_2, \dots f_n)$.

Soient $f, g \in \mathscr{L}(E, F)$.

Alors $\operatorname{mat}(f+g, \mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F) = \operatorname{mat}(f, \mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F) + \operatorname{mat}(g, \mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F)$

Démonstration :

Résulte de l'étude.

B) Produit par un scalaire

L'étude est analogue à celle de la somme, avec $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Définition :

Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

λA est la matrice $A' = (a'_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ telle que $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!], a'_{i,j} = \lambda a_{i,j}$.

Théorème :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension p, muni d'une base $\mathscr{B}_E$.

Soit F un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, muni d'une base $\mathscr{B}_F$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

Alors $\operatorname{mat}(\lambda \cdot f, \mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F) = \lambda \cdot \operatorname{mat}(f, \mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F)$

C) Le $\mathbb{K}$-ev $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Théorème :

- $(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}),+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-ev.
- Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension p, muni d'une base $\mathscr{B}_E$.

  Soit F un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, muni d'une base $\mathscr{B}_F$.

  Alors $\begin{array}{rccl}\phi_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}\colon \mathscr{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ \varphi & \longmapsto & \mathrm{mat}(\varphi,\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F)\end{array}$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-ev.

Démonstration :

- Vérification immédiates des différentes règles de calcul dans un $\mathbb{K}$-ev (le neutre est noté $0_{\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})}$, matrice dont tout les coefficients sont nuls).
- Idem.

Cas particulier :

Si $E=\mathbb{K}^p$ muni de sa base canonique $\mathscr{B}_p$,
et $F=\mathbb{K}^n$ muni de sa base canonique $\mathscr{B}_n$,
alors l'isomorphisme $\begin{array}{rccl}\phi\colon \mathscr{L}(\mathbb{K}^p,\mathbb{K}^n) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f & \longmapsto & \mathrm{mat}(f,\mathscr{B}_p,\mathscr{B}_n)\end{array}$ est l'isomorphisme canonique de $\mathscr{L}(\mathbb{K}^p,\mathbb{K}^n)$ vers $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

D) Dimension

Théorème :

$\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de dimension $n\times p$, une base naturelle de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ étant la famille des $E_{i,j}$ pour $(i,j)\in [\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$ où $E_{i,j}$ est la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui d'indice (i,j) qui vaut 1.

Démonstration :

Repose sur le fait que pour toute matrice $A=(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$, on a $A=\sum_{i,j} a_{i,j}E_{i,j}$.

Conséquence :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension p, muni d'une base $\mathscr{B}_E$.
Soit F un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, muni d'une base $\mathscr{B}_F$.
Alors $\mathscr{L}(E,F)$ est de dimension $n\times p$.

Démonstration :

$\mathscr{L}(E,F)$ est isomorphe à $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

V Produit matriciel

A) Définition

Étude :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension p, muni d'une base $\mathscr{B}_E = (e_1, e_2, \dots e_p)$.

Soit F un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, muni d'une base $\mathscr{B}_F = (f_1, f_2, \dots f_n)$.

Soit G un $\mathbb{K}$-ev de dimension m, muni d'une base $\mathscr{B}_G = (g_1, g_2, \dots g_m)$.

Soit $\psi \colon E \to G$ linéaire.

Soit $\varphi \colon G \to F$ linéaire.

Alors $\varphi \circ \psi$ est linéaire de E dans F.

Soit $A = \mathrm{mat}(\varphi, \mathscr{B}_G, \mathscr{B}_E) = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$.

Soit $B = \mathrm{mat}(\psi, \mathscr{B}_E, \mathscr{B}_G) = (b_{i,j}) \in \mathscr{M}_{m,p}(\mathbb{K})$.

Soit $C = \mathrm{mat}(\varphi \circ \psi, \mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F) = (c_{i,j}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, on a :

$$\begin{aligned}
\varphi \circ \psi(e_j) = \varphi(\psi(e_j)) &= \varphi\left(\sum_{k=1}^{m} b_{k,j} g_k\right) = \sum_{k=1}^{m} b_{k,j}\varphi(g_k) \\
&= \sum_{k=1}^{m} b_{k,j}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,k} f_i\right) = \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} f_i\right) \\
&= \sum_{\substack{i\in[\![1,n]\!],\\ k\in[\![1,m]\!]}} a_{i,k} b_{k,j} f_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m} a_{i,k} b_{k,j} f_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m} a_{i,k} b_{k,j}\right) f_i
\end{aligned} \tag{11.8}$$

Donc $\forall i \in [\![1, n]\!], c_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} a_{i,k} b_{k,j}$.

Donc $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!], c_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} a_{i,k} b_{k,j}$

Définition :

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{m,p}(\mathbb{K})$. On note $A \times B$ la matrice C, élément de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, définie par $\forall i \in [\![1, n]\!], \forall j \in [\![1, p]\!], c_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} a_{i,k} b_{k,j}$

Théorème :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension p, muni d'une base $\mathscr{B}_E$.

Soit F un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, muni d'une base $\mathscr{B}_F$.

Soit G un $\mathbb{K}$-ev de dimension m, muni d'une base $\mathscr{B}_G$.

Soit $\psi \in \mathscr{L}(E, G)$, $\varphi \in \mathscr{L}(G, F)$. Alors :

$$\mathrm{mat}(\varphi \circ \psi, \mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F) = \mathrm{mat}(\varphi, \mathscr{B}_G, \mathscr{B}_F) \times \mathrm{mat}(\psi, \mathscr{B}_E, \mathscr{B}_G) \tag{11.9}$$

Démonstration :

Résulte de l'étude.

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -8 \\ 22 & 26 \end{pmatrix} \tag{11.10}$$

B) Composantes de l'image d'un vecteur

Théorème :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension p, muni d'une base $\mathscr{B}_E = (e_1, e_2, \dots e_p)$.

Soit F un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, muni d'une base $\mathscr{B}_F = (f_1, f_2, \dots f_n)$.

Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E, F)$, $A = \mathrm{mat}(\varphi, \mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F)$.

Soit $u \in E$, $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ la colonne des composantes de u dans $\mathscr{B}_E$.

Soit $v \in F$, $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ la colonne des composantes de v dans $\mathscr{B}_F$.

On a l'équivalence : $v = \varphi(u) \iff Y = A \times X$.

Démonstration :

Notons $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

On a : $u = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j$. Donc

$$\varphi(u) = \sum_{j=1}^{p} x_j \varphi(e_j) = \sum_{j=1}^{p} x_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} f_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{p} x_j a_{i,j} \right)}_{\substack{i\text{-ème composante de} \\ \varphi(u) \text{ dans la base} \\ (f_1, f_2, \dots f_n)}} f_i \tag{11.11}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} v = \varphi(u) &\iff v \text{ et } \varphi(u) \text{ ont les mêmes composantes dans } \mathscr{B}_F && (11.12) \\ &\iff \forall i \in [\![1, n]\!], y_i = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j && (11.13) \\ &\iff Y = A \times X && (11.14) \end{aligned}$$

En effet :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{p} a_{1,j} x_j \\ \sum_{j=1}^{p} a_{2,j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{p} a_{n,j} x_j \end{pmatrix} \tag{11.15}$$

Exemple :

Soit $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ dans la base canonique $\mathscr{B}_2$ de $\mathbb{R}^2$.

Notons $\mathscr{B}_2 = (e_1, e_2)$; alors $\varphi(e_1) = (1, 2)$, $\varphi(e_2) = (3, 4)$.

Pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$, on a $\varphi(x, y) = (x', y')$,

avec $A \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, soit $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 3y \\ 2x + 4y \end{pmatrix}$.

C) Propriétés du produit

Proposition :
Pour tous $A, A' \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}), B, B' \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K}), C \in \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K}), \lambda \in \mathbb{K}$, on a :

1. $(A \times B) \times C = A \times (B \times C) = A \times B \times C$
2. $(A + A') \times B = A \times B + A' \times B$
3. $A \times (B + B') = A \times B + A \times B'$
4. $(\lambda A) \times B = \lambda.(A \times B) = A \times (\lambda B)$
5. $A \times I_p = A$ et $I_p \times B = B$, où $I_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ avec $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$, 0 sinon.

Démonstration :
En passant par les applications linéaires, par exemple pour (2) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension p, muni d'une base $\mathscr{B}_E$.
Soit F un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, muni d'une base $\mathscr{B}_F$.
Soit G un $\mathbb{K}$-ev de dimension q, muni d'une base $\mathscr{B}_G$.
Soient $\varphi, \varphi' \in \mathscr{L}(E, F)$ de matrices A, A' dans les bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$.
Soit $\psi \in \mathscr{L}(G, E)$ de matrice B dans les bases $\mathscr{B}_G$ et $\mathscr{B}_E$.
Alors :

$$\begin{aligned} (A + A') \times B &= \operatorname{mat}\big((\varphi + \varphi') \circ \psi, \mathscr{B}_G, \mathscr{B}_F\big) && (11.16) \\ &= \operatorname{mat}\big(\varphi \circ \psi + \varphi' \circ \psi, \mathscr{B}_G, \mathscr{B}_F\big) && (11.17) \\ &= \operatorname{mat}(\varphi \circ \psi, \mathscr{B}_G, \mathscr{B}_F) + \operatorname{mat}\big(\varphi' \circ \psi, \mathscr{B}_G, \mathscr{B}_F\big) && (11.18) \\ &= A \times B + A' \times B && (11.19) \end{aligned}$$

(On procède de la même manière pour les autres formules)

La démonstration directe sans passer pas les applications linéaires est pénible.

Remarque :
I_p s'appelle la matrice unité d'ordre p.

Attention : Il n'y a pas commutativité en général :

- $A \times B$ peut être défini mais pas $B \times A$.
  Exemple : A de type (n, p), B de type (p, q) avec $q \neq n$.
- $A \times B$ et $B \times A$ peuvent être définies mais pas de même type.
  Exemple : A de type (n, p), B de type (p, n) avec $p \neq n$.
- $A \times B$ et $B \times A$ peuvent être définies, de même type mais différentes.

Exemple : A de type (n,n), B de type (n,n) :

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\ 7 & -7\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \tag{11.20}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1 & -1\\ 7 & -7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}15 & -15\\ 15 & -15\end{pmatrix} \tag{11.21}$$

Il n'y a pas intégrité non plus (voir exemple ci-dessus).

VI La $\mathbb{K}$-algèbre $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

A) Rappel

$\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$: ensemble des matrices d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.
Une $\mathbb{K}$-algèbre est un ensemble A muni de deux lois de composition internes $+$, $\times$ et d'une loi à opérateurs dans $\mathbb{K}$ tels que :

- $(A,+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-ev.
- $\times$ est associative, distributive sur $+$ et, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tous, $a,b \in A$, $(\lambda a)\times b = \lambda\cdot(a\times b) = a\times(\lambda\cdot b)$.
- il existe un neutre 1_A pour $\times$.

Exemple : $\mathbb{K}, \mathscr{F}(\mathbb{K},\mathbb{K}), \mathbb{K}[X]$

B) Théorème

Théorème :

- $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}),+,\times,\cdot)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.
- Si E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension n muni d'une base $\mathscr{B}_E$, alors l'application $\begin{array}{rccl}\phi_{\mathscr{B}_E}: & \mathscr{L}(E) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{K})\\ & \varphi & \longmapsto & \text{mat}(\varphi,\mathscr{B}_E)\end{array}$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-algèbre. (On sait déjà que $(\mathscr{L}(E),+,\circ,\cdot)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre)

Démonstration :

- On sait que $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}),+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-ev (de dimension n^2). De plus, selon le paragraphe précédent, $\times$ est une loi de composition interne sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, associative, distributive sur $+$, admet comme élément neutre I_n, et « les scalaires sortent des produits ».
- On sait déjà que $\phi_{\mathscr{B}_E}$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-ev. De plus, pour tous $\varphi,\psi \in \mathscr{L}(E)$: $\phi_{\mathscr{B}_E}(\varphi\circ\psi) = \text{mat}(\varphi\circ\psi,\mathscr{B}_E) = \text{mat}(\varphi,\mathscr{B}_E)\times\text{mat}(\psi,\mathscr{B}_E) = \phi_{\mathscr{B}_E}(\varphi)\times\phi_{\mathscr{B}_E}(\psi)$, et $\phi_{\mathscr{B}_E}(\text{Id}_E) = \text{mat}(\text{Id}_E,\mathscr{B}_E) = I_n$.

Remarque :

Si on note $\mathscr{B}'_E$ une autre base de E, alors l'application $\begin{array}{rcl}\mathscr{L}(E) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{K})\\ \varphi & \longmapsto & \text{mat}(\varphi,\mathscr{B}_E,\mathscr{B}'_E)\end{array}$ est toujours un isomorphisme de $\mathbb{K}$-ev mais plus de $\mathbb{K}$-algèbre (car $\text{mat}(\text{Id}_E,\mathscr{B}_E,\mathscr{B}'_E) \neq I_n$).

Exemple :

Dans $\mathbb{R}^2$, $\mathscr{B} = [(1,0),(0,1)]$ et $\mathscr{B}' = [(1,2),(3,1)]$.

$$\operatorname{mat}(\mathrm{Id}_E, \mathscr{B}, \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{mat}(\mathrm{Id}_E, \mathscr{B}', \mathscr{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{11.22}$$

$$\operatorname{mat}(\mathrm{Id}_E, \mathscr{B}', \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{mat}(\mathrm{Id}_E, \mathscr{B}, \mathscr{B}') = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \tag{11.23}$$

C) Conséquences : règles de calcul

- Règles habituelles de l'anneau $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$,

  du $\mathbb{K}$-ev $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$.

  « Les scalaires sortent des produits ».

  (C'est-à-dire les règles habituelles d'une $\mathbb{K}$-algèbre)

- Notation habituelle dans un anneau :

  Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\begin{cases} A^0 = I_n \\ \forall k \in \mathbb{N}, A^{k+1} = A^k A \end{cases}$.

- Et (toujours dans l'anneau), si $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont deux éléments qui commutent, alors :

$$\forall m \in \mathbb{N}, (A+B)^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k A^k B^{m-k} \tag{11.24}$$

et

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, A^m - B^m = (A-B) \times (A^{m-1} + A^{m-2}B + \ldots + B^{m-1}) \tag{11.25}$$

Exemple :

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, calculer A^k.

Première méthode ; chercher une récurrence en calculant les premières valeurs, puis la montrer et donner le résultat.

Autre méthode, plus simple ; on peut en effet poser B telle que :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3I_3 + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{B} \tag{11.26}$$

On a alors : $B^0 = I_3$, $\quad B^1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad B^3 = 0$.

Donc, comme I_3 et B commutent (I_3 commute avec tout le monde), on a :

$$\begin{aligned} A^k = (3I_3 + B)^k &= \sum_{p=0}^{k} C_k^p (3I_3)^{k-p} B^p \\ &= \sum_{p=0}^{k} C_k^p 3^{k-p} B^p \\ \text{(pour } k \geqslant 2\text{)} &= C_k^0 3^{k-0} B^0 + C_k^1 3^{k-1} B + C_k^2 3^{k-2} B^2 \\ &= 3^k I_3 + k3^{k-1} B + \frac{k(k-1)}{2} 3^{k-2} B^2 \end{aligned} \tag{11.27}$$

Donc

$$A^k = \begin{pmatrix} 3^k & 2k3^{k-1} & k3^{k-1} + 2k(k-1)3^{k-2} \\ 0 & 3^k & 2k3^{k-1} \\ 0 & 0 & 3^k \end{pmatrix} \tag{11.28}$$

VII Transposition

A) Définition

Définition :

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, disons $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$.
La transposée de A est la matrice ${}^tA \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ définie par ${}^tA = (a'_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ où $\forall i \in [\![1,n]\!], \forall j \in [\![1,p]\!], a'_{i,j} = a_{j,i}$.

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \qquad {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \tag{11.29}$$

B) Propriétés

Propriété :

Pour tous $A, A' \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}), B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K}), \lambda \in \mathbb{K}$, on a :

- ${}^t({}^tA) = A$
- ${}^t(A + A') = {}^tA + {}^tA'$
- ${}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA$
- ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$

Démonstration :

Pour les trois premiers, c'est immédiat. Pour le quatrième :
Notons $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$, $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ 1\leqslant j\leqslant q}}$, $AB = (c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant q}}$, ${}^tA = (a'_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$, ${}^tB = (b'_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant q \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$, ${}^tB{}^tA = (c'_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant q \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$.
Pour tous $i \in [\![1,q]\!], j \in [\![1,n]\!]$, on a :

$$c'_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} b'_{i,k}a'_{k,j} = \sum_{k=1}^{p} b_{k,i}a_{j,k} = \sum_{k=1}^{p} a_{j,k}b_{k,i} = c_{j,i} \tag{11.30}$$

Donc ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$.

C) Matrices symétriques, antisymétriques

Définition :

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

$$A \text{ est symétrique} \underset{\text{déf}}{\iff} \forall i \in [\![1,n]\!], \forall j \in [\![1,n]\!], a_{i,j} = a_{j,i} \iff {}^tA = A \tag{11.31}$$

$$A \text{ est antisymétrique} \underset{\text{déf}}{\iff} \forall i \in [\![1,n]\!], \forall j \in [\![1,n]\!], a_{i,j} = -a_{j,i} \iff {}^tA = -A \tag{11.32}$$

Exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ est symétrique, $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique.

Proposition :

Les ensembles $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ des matrices symétriques et antisymétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ forment deux sous-espaces supplémentaires de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, de dimensions $\frac{n(n+1)}{2}$ et $\frac{n(n-1)}{2}$.

Démonstration :

$$\mathscr{S}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots,}_{\frac{n(n-1)}{2}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},}_{n} \tag{11.33}$$

Et cette famille est évidemment libre est génératrice.

De même, $\dim \mathscr{A}_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n-1)}{2}$ (même famille que $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ en enlevant les n derniers et en remplaçant le 1 « du haut » par -1 dans les autres).

Donc $\dim \mathscr{A}_n(\mathbb{K}) + \dim \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) = n^2$.

De plus, si $M \in \mathscr{A}_n(\mathbb{K}) \cap \mathscr{S}_n(\mathbb{K})$, alors évidemment $M = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}$.

Donc $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ sont en somme directe, et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

VIII Matrices inversibles

A) Définitions – Rappels

Définition :

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

$$A \text{ est inversible} \underset{\text{déf}}{\iff} \exists B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), AB = BA = I_n \tag{11.34}$$

(C'est la définition générale de l'inversibilité pour × dans un anneau).

Proposition :

Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible, alors il existe un et un seul $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $AB = BA = I_n$. Cet élément s'appelle l'inverse de A et est noté A^{-1}. (la démonstration a été faite dans le cas général pour un anneau).

Définition :

L'ensemble des éléments inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est noté $\mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$. Il forme un groupe pour la loi $\times$. (idem, voir cours sur les anneaux).

Plus précisément :

- $\mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ est stable par $\times$:
  Si $A, B \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $AB \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- Si $A \in \mathscr{GL}_n(K)$, alors $A^{-1} \in \mathscr{GL}_n(K)$ et $(A^{-1})^{-1} = A$.
- $I_n \in \mathscr{GL}_n(K)$

Remarque :

Si $AB = BA$, alors A et B sont carrées de même type. Le fait d'avoir choisi $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ pour la définition d'inversibilité n'est donc pas restrictif pour $\mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$.

B) Théorème essentiel

Théorème :

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, muni d'une base $\mathscr{B}_E$.

Soit E' un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, muni d'une base $\mathscr{B}_{E'}$.

Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E, E')$ de matrice A dans les bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_{E'}$.

Alors A est inversible si et seulement si φ est bijective. Si c'est le cas, A^{-1} est la matrice de φ^{-1} dans les bases $\mathscr{B}_{E'}$ et $\mathscr{B}_E$.

Démonstration :

- Supposons A inversible : on peut introduire A^{-1} et l'application linéaire $\psi \colon E' \to E$ de matrice A^{-1} dans les bases $\mathscr{B}_{E'}$ et $\mathscr{B}_E$. Alors $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_E$ et $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_{E'}$. En effet :

  $$\mathrm{mat}(\varphi \circ \psi, \mathscr{B}_{E'}, \mathscr{B}_{E'}) = \mathrm{mat}(\varphi, \mathscr{B}_E, \mathscr{B}_{E'}) \times \mathrm{mat}(\psi, \mathscr{B}_{E'}, \mathscr{B}_E) = A \times A^{-1} = I_n, \tag{11.35}$$

  et

  $$\mathrm{mat}(\psi \circ \varphi, \mathscr{B}_E, \mathscr{B}_E) = \mathrm{mat}(\psi, \mathscr{B}_{E'}, \mathscr{B}_E) \times \mathrm{mat}(\varphi, \mathscr{B}_E, \mathscr{B}_{E'}) = A^{-1} \times A = I_n \tag{11.36}$$

  Donc φ est bijective et $\varphi^{-1} = \psi$.
- Supposons φ bijective. On introduit φ^{-1} et $B = \mathrm{mat}(\varphi^{-1}, \mathscr{B}_{E'}, \mathscr{B}_E)$. Alors :

  $$\begin{aligned} A \times B &= \mathrm{mat}(\varphi, \mathscr{B}_E, \mathscr{B}_{E'}) \times \mathrm{mat}(\varphi^{-1}, \mathscr{B}_{E'}, \mathscr{B}_E) \\ &= \mathrm{mat}(\varphi \circ \varphi^{-1}, \mathscr{B}_{E'}, \mathscr{B}_{E'}) \\ &= \mathrm{mat}(\mathrm{Id}_{E'}, \mathscr{B}_{E'}, \mathscr{B}_{E'}) \\ &= I_n \end{aligned} \tag{11.37}$$

et

$$\begin{aligned} B \times A &= \mathrm{mat}(\varphi^{-1}, \mathscr{B}_{E'}, \mathscr{B}_E) \times \mathrm{mat}(\varphi, \mathscr{B}_E, \mathscr{B}_{E'}) \\ &= \mathrm{mat}(\varphi^{-1} \circ \varphi, \mathscr{B}_E, \mathscr{B}_E) \\ &= \mathrm{mat}(\mathrm{Id}_E, \mathscr{B}_E, \mathscr{B}_E) \\ &= I_n \end{aligned} \tag{11.38}$$

Donc A est inversible et $A^{-1} = B$.

Théorème (Cas particulier) :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, muni d'une base $\mathscr{B}$.

Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E)$, $A = \mathrm{mat}(\varphi, \mathscr{B})$.

Alors A est inversible si et seulement si φ est bijective, et dans ce cas $A^{-1} = \mathrm{mat}(\varphi^{-1}, \mathscr{B})$.

Conséquence :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, muni d'une base $\mathscr{B}$.

Alors $\begin{array}{rcl} \phi_{\mathscr{B}} \colon \mathscr{GL}(E) & \longrightarrow & \mathscr{GL}_n(\mathbb{K}) \\ \varphi & \longmapsto & \mathrm{mat}(\varphi, \mathscr{B}) \end{array}$ est un isomorphisme de groupe.

C) Exemples

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. A est-elle inversible, si oui que vaut A^{-1} ?

- première méthode, exclue :

  Soit $B = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}$. On a les équivalences :

$$AB = BA = I_n \iff \begin{cases} \text{système de 8 équations} \\ \text{à 4 inconnues} \end{cases} \tag{11.39}$$

- deuxième méthode :

  Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice A dans la base canonique $\mathscr{B}_2$. Alors, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2, \varphi(x, y) = (x - y, 2x + y)$. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a les équivalences :

$$\varphi(x, y) = (a, b) \iff \begin{cases} x - y = a \\ 2x + y = b \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{a+b}{3} \\ y = \frac{b-2a}{3} \end{cases} \tag{11.40}$$

  Donc φ est bijective et φ^{-1} a pour matrice $\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ dans $\mathscr{B}_2$.

Donc $A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Autre exemple :

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Soit $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ de matrice A dans la base canonique $\mathscr{B}_2 = (\vec{i}, \vec{j})$.

Alors $\mathrm{Im}\,\varphi = \mathrm{Vect}(\varphi(\vec{i}), \varphi(\vec{j})) = \mathrm{Vect}((2, 1), (4, 2)) = \mathrm{Vect}((2, 1))$. Donc $\mathrm{Im}\,\varphi$ est de dimension 1. Donc φ n'est pas de rang 2, donc φ n'est pas bijective, donc A n'est pas inversible.

D) Diverses caractérisations

Ici, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Avec les endomorphismes

Proposition :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, muni d'une base $\mathscr{B}$.

Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E)$ de matrice A dans la base $\mathscr{B}$.

On a les équivalences :

$$\begin{aligned} A \text{ est inversible } &\iff \varphi \text{ est bijective} \\ &\iff \varphi \text{ est injective} \\ &\iff \varphi \text{ est surjective} \end{aligned} \tag{11.41}$$

2) Avec les colonnes

Proposition :

On a les équivalences :

$$\begin{aligned} A \text{ est inversible } &\iff \text{Ses colonnes forment une base de } \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ &\iff \text{Ses colonnes forment une famille libre} \\ &\iff \text{Ses colonnes forment une famille génératrice de } \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \end{aligned} \tag{11.42}$$

Démonstration :

Les deux dernières équivalences viennent du fait que $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est de dimension n.

Concernant la première équivalence :

Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ de matrice A dans la base naturelle de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$:

$$\left(E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, E_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right) \tag{11.43}$$

Alors :

$$\begin{aligned} A \text{ est inversible } &\iff \phi \text{ est bijective} \\ &\iff [\phi(E_1), \phi(E_2), \dots \phi(E_n)] \text{ est une base de } \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \end{aligned} \tag{11.44}$$

Or, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $\phi(E_j)$ n'est autre que la j-ème colonne de A, d'où l'équivalence.

Généralisation :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, muni d'une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots e_n)$.

Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on note v_j le vecteur de E dont les composantes dans $\mathscr{B}$ sont données par la j-ème colonne de A.

Alors :

$$\boxed{A \text{ est inversible } \iff [v_1, v_2, \dots v_n] \text{ est une base de } E} \tag{11.45}$$

La démonstration est la même en prenant $\phi \in \mathscr{L}(E)$ de matrice A dans la base $\mathscr{B}$ (puisque $\forall j \in [\![1, n]\!], v_j = \phi(e_j)$).

Cas particulier :

Si $E = \mathbb{K}^n$ et $\mathscr{B}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Les v_j sont alors appelés les vecteurs colonnes (c'est-à-dire les colonnes vues comme n-uplets)

3) Avec les systèmes

Proposition :

A est inversible si et seulement si pour tout $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ le système

$$AX = B, \tag{S}$$

où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est la colonne des inconnues, a une unique solution.

Démonstration :

En effet : (S) traduit l'assertion « ϕ est bijectif, où ϕ est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-ev E de matrice A dans une base $\mathscr{B}$ ».

En effet : Si $\phi \in \mathscr{L}(E)$, $\text{mat}(\phi, \mathscr{B}) = A$, $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots e_n)$, alors :

$$\begin{aligned} A \text{ est inversible } &\iff \phi \text{ est bijective} \\ &\iff \forall \vec{b} \in E, \exists! \vec{x} \in E, \phi(\vec{x}) = \vec{b} \\ &\iff \forall (b_1, b_2, \dots b_n) \in \mathbb{K}^n, \exists! (x_1, x_2, \dots x_n) \in \mathbb{K}^n, \phi(\vec{x}) = \vec{b} \\ &\iff \forall (b_1, b_2, \dots b_n) \in \mathbb{K}^n, \exists! (x_1, x_2, \dots x_n) \in \mathbb{K}^n, AX = B \end{aligned} \tag{11.46}$$

Définition :

Un système $AX = B$ où :

$$\begin{cases} A \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K}) \\ B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \text{ est la colonne des inconnues} \end{cases} \tag{11.47}$$

est appelé un système de Cramer. Il admet l'unique solution $X = A^{-1}B$.

4) Inversibilité à droite ou à gauche seulement

Théorème :

On a les équivalences :

$$\begin{aligned} A \text{ est inversible} &\iff \exists B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), AB = I_n && (11.48) \\ &\iff \exists B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), BA = I_n && (11.49) \end{aligned}$$

Et dans ces cas là $B = A^{-1}$.

Démonstration :

Déjà, les implications de gauche à droite sont évidentes.

- Pour la première équivalence : Supposons qu'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $AB = I_n$

  Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, muni d'une base $\mathscr{B}$.

  Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E)$ de matrice A dans la base $\mathscr{B}$.

  Soit $\psi \in \mathscr{L}(E)$ de matrice B dans la base $\mathscr{B}$.

  Alors $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_E$.

  Donc φ est surjective : tout élément v de E s'écrit $\varphi(\psi(v))$. Donc φ est bijective. Donc A est inversible. Et on a $AB = I_n$, donc $A^{-1}AB = A^{-1}$, donc $B = A^{-1}$.

- Pour la deuxième équivalence : on introduit les mêmes éléments.

  $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_E$. Donc φ est injective :

  $$\varphi(x') = \varphi(x) \implies \psi(\varphi(x')) = \psi(\varphi(x)) \implies x' = x \qquad (11.50)$$

  Donc φ est bijective. Donc A est inversible et $B = A^{-1}$.

5) Transposition

Proposition :

On a l'équivalence :

$$A \text{ est inversible} \iff {}^tA \text{ est inversible}, \qquad (11.51)$$

et dans ce cas, $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

Démonstration :

Supposons A inversible : $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

Alors :

$$ {}^t(AA^{-1}) = {}^t(A^{-1}A) = {}^tI_n = I_n \qquad ; \qquad {}^t(A^{-1}){}^tA = {}^tA{}^t(A^{-1}) = I_n \qquad (11.52)$$

Donc ${}^tA$ est inversible, d'inverse ${}^t(A^{-1})$.

Réciproquement, si ${}^tA$ est inversible, alors ${}^t({}^tA)$ est inversible, c'est-à-dire que A est inversible.

Conséquence :
On a les équivalences :

$$\begin{aligned} A \text{ est inversible} &\iff \text{Ses lignes forment une base de } \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K}) \\ &\iff \text{Ses lignes forment une famille libre} \\ &\iff \text{Ses lignes forment une famille génératrice de } \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K}) \\ &\iff \text{la famille de ses vecteurs lignes } (\in \mathbb{K}^n \text{ !!}) \text{ a les mêmes propriétés...} \end{aligned} \tag{11.53}$$

(Les vecteurs lignes de A sont les vecteurs colonnes de ${}^tA$)

E) Exemples importants

1) Les matrices diagonales

On note $\mathrm{Diag}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$. (attention, ce n'est pas une notation standard !). Alors $\mathrm{Diag}_n(\mathbb{K})$ est une sous algèbre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (et même commutative).

Proposition :
Soit $A \in \mathrm{Diag}_n(\mathbb{K})$:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{11.54}$$

Alors A est inversible si et seulement si $\forall i \in [\![1,n]\!], \lambda_i \neq 0$, et dans ce cas :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix} \tag{11.55}$$

Démonstration :

- Si un des λ_i est nul, la colonne C_i est nulle, donc la famille des colonnes de A n'est pas libre. Donc A n'est pas inversible.
- Si aucun des λ_i n'est nul, on introduit la matrice proposée (on la nomme B), et alors $AB = BA = I_n$. Donc A est inversible et $A^{-1} = B$.

2) Les matrices triangulaires supérieures

On note $TS_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$, c'est-à-dire du type $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$ où $i > j \implies a_{i,j} = 0$. (la notation n'est pas standard non plus)
Alors $TS_n(\mathbb{K})$ est une sous algèbre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (mais non commutative).

Proposition :

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in TS_n(\mathbb{K})$.

Alors A est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.

Démonstration :

- Si les $a_{i,i}$ sont tous non nuls :

$$A = \begin{pmatrix} * & - & - & - \\ 0 & * & - & - \\ \vdots & \ddots & \ddots & - \\ 0 & \dots & 0 & * \end{pmatrix} \qquad (* \text{ désigne un scalaire non nul}) \tag{11.56}$$

  Alors la famille de ses colonnes $(C_1, C_2 \dots C_n)$ est libre :

  Si $\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \dots + \lambda_n C_n = 0$, alors, avec le dernier coefficient, $\lambda_n a_{n,n} = 0$. Donc $\lambda_n = 0$ (car $a_{n,n} \neq 0$), et ainsi de suite...

- Si l'un des $a_{i,i}$ est nul : $C_1, C_2 \dots C_i$ sont i éléments d'un ensemble de dimension $i-1$, à savoir l'ensemble des colonnes du type $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{i-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ (qui est $\text{Vect}(E_1, E_2, \dots E_{i-1})$, où $(E_1, E_2, \dots E_n)$ est la base naturelle de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$).

  Donc $(C_1, C_2 \dots C_i)$ est liée. Donc A n'est pas inversible.

D'où l'équivalence.

Remarque :

On peut montrer que si une matrice triangulaire supérieure est inversible, alors l'inverse de cette matrice est aussi triangulaire supérieure.

3) Matrice triangulaire inférieure

On a le même résultat que pour les matrices triangulaires supérieures, avec la même démonstration (ou en remarquant que A est triangulaire supérieure si et seulement si ${}^tA$ est triangulaire inférieure...)

Conséquence :

Un système carré (c'est-à-dire du type $A \times \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, où $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est la colonne des inconnues) qui est triangulaire (c'est-à-dire que A est triangulaire) sans 0 sur la diagonale est de Cramer (c'est-à-dire qu'il admet une et une seule solution)

Exemple :

On considère le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 x_1 & + & \cdots & \cdots & \cdots & = & b_1 \\ & & \lambda_2 x_2 & + & \cdots & = & b_2 \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \lambda_n x_n & = & b_n \end{array}\right. \tag{S}$$

Alors :

- Le système admet une et une seule solution lorsque les coefficients diagonaux sont tous non nuls.
- Si l'un des λ_i est nul, le système n'a pas une et une seule solution.

Démonstration (de la conséquence, en utilisant la notation de l'exemple) :

Supposons l'un des λ_i nul. On note $k = \min\{i \in [\![1, n]\!], \lambda_i = 0\}$.

- Si $k = n$ (c'est-à-dire $\lambda_n = 0$ et $\forall i < n, \lambda_i \neq 0$), alors :
  - ◇ Soit $b_n \neq 0$ et le système est incompatible.
  - ◇ Soit $b_n = 0$, alors on voit qu'on peut fixer x_n quelconque et obtenir une solution $(x_1, x_2 \dots x_n)$ à (S) en résolvant le système (S') composé des $n-1$ premières équations et considéré comme d'inconnues $x_1, x_2 \dots x_{n-1}$ (qui a une unique solution puisque triangulaire sans 0 sur la diagonale). Donc (S) a une infinité de solutions (avec un degré de liberté).
- Sinon, soit (S'') le système « sous » (strictement) la k-ième équation, en tant que d'inconnues $x_{k+1}, x_{k+2} \dots x_n$.
  - ◇ Si (S'') est incompatible, alors (S) l'est aussi.
  - ◇ Si (S'') est compatible :
    - — Si aucune des solutions de (S'') ne satisfait la k-ième ligne, alors (S) est incompatible.
    - — Sinon, l'une au moins, $(x_{k+1}, x_{k+2} \dots x_n)$ par exemple, des solutions de (S'') satisfait la k-ième ligne : on peut alors fixer arbitrairement x_k et obtenir une solution $(x_1, x_2, \dots x_k, x_{k+1} \dots x_n)$ en résolvant le système (S''') au-dessus (strictement) de la k-ième ligne, qui est de Cramer en tant que d'inconnues $x_1, x_2, \dots x_k$. Donc (S) a une infinité de solutions (avec au moins un degré de liberté)

Démonstration (Autre argument) :

On considère le système plus générique

$$AX = B, \qquad A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{11.57}$$

On va voir plus généralement que si $A \notin \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$, alors soit (11.57) n'a pas de solution, soit il en a une infinité (pour $\mathbb{K}$ infini seulement). En effet :

- Si (11.57) n'a pas de solution, alors il n'a pas de solution... !
- Sinon, il admet une solution X_0. Montrons alors qu'il en a d'autres :
  A n'est pas inversible. Soit φ l'endomorphisme canoniquement associé à A. Donc φ n'est pas injectif. Donc $\ker\varphi \neq \{0\}$. Donc l'équation $AX = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}$ a des solutions autres que 0. Alors les $X_0 + \lambda U$, où U est une solution non nulle de $AX = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ sont des solutions de (11.57). En effet : $A \times (X_0 + \lambda U) = A \times X_0 + \lambda AU = B + 0 = B$.

IX Changement de base

A) Changement de base : matrice de passage, composantes d'un vecteur

E est ici un $\mathbb{K}$-ev de dimension n.
Soit $\mathscr{B}=(e_1,e_2\dots e_n)$ une base de E (« ancienne »).
Soit $\mathscr{B}'=(e'_1,e'_2\dots e'_n)$ une autre base de E (« nouvelle »).

On suppose qu'on connaît les composantes des e'_j dans la base $\mathscr{B}$. (d'où le nom d'ancienne et de nouvelle). Alors la matrice qui donne, par colonne, les composantes des vecteurs de $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$ s'appelle la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.
Ainsi :

$$\begin{aligned} P &= \text{la matrice de passage de } \mathscr{B} \text{ à } \mathscr{B}'. \\ &= \text{la matrice des } (a_{i,j}) \text{ de sorte que } \forall j\in[\![1,n]\!], e'_j=\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}e_i \end{aligned} \tag{11.58}$$

notée $\operatorname{mat}(\mathscr{B}',\mathscr{B})$ (matrice de la famille $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$)

Proposition :
On a :

$$P=\operatorname{mat}(\operatorname{Id}_E,\mathscr{B}',\mathscr{B}) \tag{11.59}$$

(attention, la base de départ est $\mathscr{B}'$)

Conséquence :
Si P est la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$, alors P est inversible, et P^{-1} est la matrice de passage de $\mathscr{B}'$ à $\mathscr{B}$.
En effet : On a $\operatorname{Id}_E\in\mathscr{GL}(E)$. Donc $\operatorname{mat}(\operatorname{Id}_E,\mathscr{B}',\mathscr{B})$ est inversible, d'inverse $\operatorname{mat}(\operatorname{Id}_E^{-1},\mathscr{B},\mathscr{B}')=\operatorname{mat}(\operatorname{Id}_E,\mathscr{B},\mathscr{B}')$ qui est la matrice de passage de $\mathscr{B}'$ à $\mathscr{B}$.

Remarque :
Si $\mathscr{B}$ est une base de E et $\mathscr{F}$ une famille de n vecteurs de E, alors $\mathscr{F}$ est une base de E si et seulement si la matrice qui donne par colonne les composantes des vecteurs de $\mathscr{F}$ dans la base $\mathscr{B}$ est inversible.

Théorème :
Soit $\mathscr{B}$ une base de E, $\mathscr{B}'$ une autre base de E.
Soit P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.
Soit $u\in E$, et X la colonne de ses composantes dans $\mathscr{B}$, X' celle de ses composantes dans $\mathscr{B}'$.
Alors $X=PX'$ (on obtient les anciennes en fonction des nouvelles)

Démonstration :
On a $u=u$ donc $u=\operatorname{Id}_E(u)$, c'est-à-dire $X=PX'$ (la base de départ est $\mathscr{B}'$ pour Id_E !)

Démonstration (variante) :

On note

$$P = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n,\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \tag{11.60}$$

On a :

$$u = \sum_{j=1}^{n} x'_j e'_j = \sum_{j=1}^{n} x'_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x'_j \right) e_i \tag{11.61}$$

et

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \tag{11.62}$$

Donc $\forall i \in [\![1, n]\!], x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x'_j$. Donc $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$

Exemple :

Dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique $\mathscr{B} = (\vec{i}, \vec{j})$.
Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équation :

$$2x^2 + 5y^2 - 2xy = 9 \tag{E}$$

dans $\mathscr{B}$ (C'est-à-dire que $\mathscr{C}$ est l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}^2$ dont les composantes (x, y) dans $\mathscr{B}$ vérifient (E).

Soit $\vec{I} = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{J} = \vec{i} - \vec{j}$ alors $\mathscr{B}' = (\vec{I}, \vec{J})$ est une nouvelle base de $\mathbb{R}^2$. On cherche l'équation de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{B}'$.

Matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

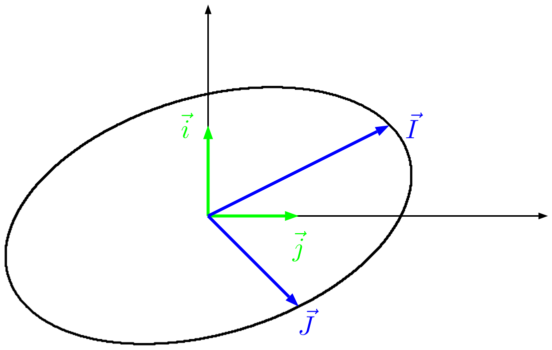
Soit $u \in \mathbb{R}^2$, de composantes $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans $\mathscr{B}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans $\mathscr{B}'$.

Alors $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

On a les équivalences :

$$\begin{aligned} u \in \mathscr{C} &\iff 2x^2 + 5y^2 - 2xy = 9 \\ &\iff 2(2x' + y')^2 + 5(x' - y')^2 - 2(2x' + y')(x' - y') = 9 \\ &\iff 8x'^2 + 8x'y' + 2y'^2 + 5x'^2 - 10x'y' + 5y'^2 - 4x'^2 + 2y'^2 + 2x'y' = 9 \\ &\iff 9x'^2 + 9y'^2 = 9 \\ &\iff x'^2 + y'^2 = 1 \end{aligned} \tag{11.63}$$

Aspect :



B) Les formules de changement de base pour une application linéaire

Théorème :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension p, et $\mathscr{B}_E$, $\mathscr{B}'_E$ deux bases de E. Soit P la matrice de passage de $\mathscr{B}_E$ à $\mathscr{B}'_E$.

Soit F un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, et $\mathscr{B}_F$, $\mathscr{B}'_F$ deux bases de F. Soit Q la matrice de passage de $\mathscr{B}_F$ à $\mathscr{B}'_F$.

Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E,F)$, soit $A = \text{mat}(\varphi, \mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F)$, $A' = \text{mat}(\varphi, \mathscr{B}'_E, \mathscr{B}'_F)$.

Alors $A' = Q^{-1}AP$

Démonstration :

On a

$$\varphi = \text{Id}_F \circ \varphi \circ \text{Id}_E \tag{11.64}$$

Donc

$$\text{mat}(\varphi, \mathscr{B}'_E, \mathscr{B}'_F) = \text{mat}(\text{Id}_F, \mathscr{B}_F, \mathscr{B}'_F) \times \text{mat}(\varphi, \mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F) \times \text{mat}(\text{Id}_E, \mathscr{B}'_E, \mathscr{B}_E) \tag{11.65}$$

Soit $A' = Q^{-1}AP$

Démonstration (variante) :

Pour tout vecteur colonne X', on note $X = PX'$, $Y = AX$, $Y' = A'X'$. Alors $Y = QY'$, donc $QY' = APX'$. Donc $Y' = Q^{-1}APX'$. Or, $Y' = A'X'$. Donc $A'X' = Q^{-1}APX'$. D'où $A' = Q^{-1}AP$.

Cas particulier :

Soient $\varphi \in \mathscr{L}(E)$, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E, et P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.

Soient $A = \text{mat}(\varphi, \mathscr{B})$, $A' = \text{mat}(\varphi, \mathscr{B}')$.

Alors $A' = P^{-1}AP$.

X Matrices équivalentes et rang

A) Rang d'une matrice

Définition :

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

$$\text{rg}(A) \underset{\text{déf}}{=} \text{le rang de la famille de ses colonnes.} \tag{11.66}$$

Proposition :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension p, muni d'une base $\mathscr{B}_E$.

Soit F un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, muni d'une base $\mathscr{B}_F$.

Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E,F)$ de matrice A dans les bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$.

Soit $(v_1, v_2, \dots v_p)$ une famille de vecteurs de F dont les composantes dans $\mathscr{B}_F$ sont les colonnes de A.

Alors $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(v_1, v_2, \dots v_p) = \operatorname{rg}(\varphi)$.

Démonstration :

On a l'isomorphisme ϕ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ dans F qui envoie la base naturelle $(E_1, E_2, \dots E_n)$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sur $\mathscr{B}_F$.

C'est-à-dire : $\phi\colon \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & F \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i f_i \end{array}$

Alors les v_j ne sont autres que les $\phi(C_j)$ (où $C_1, C_2, \dots C_p$ sont les colonnes de A).

Or, ϕ conserve le rang (c'est un isomorphisme).

Donc $\operatorname{rg}(A) \underset{\text{déf}}{=} \operatorname{rg}(C_1, C_2, \dots C_p) = \operatorname{rg}(v_1, v_2, \dots v_p)$.

Or, les v_j sont les $\varphi(e_j)$, et on sait que $\operatorname{rg}(\varphi) = \operatorname{rg}(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots \varphi(e_p))$.

Donc $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(v_1, v_2, \dots v_p) = \operatorname{rg}(\varphi)$.

Conséquence :

- Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et si $r = \operatorname{rg}(A)$, alors $r \leqslant n$ (rang d'une famille de vecteurs dans un espace de dimension n) et $r \leqslant p$ (rang de p vecteurs).
- A est inversible si et seulement si $r = n = p$.
- A est nulle si et seulement si $r = 0$.

B) Matrice équivalente

Définition :

Soient $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On dit que B est équivalente à A lorsqu'il existe $P \in \mathscr{GL}_p(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $B = Q^{-1}AP$.

Remarque :

Le $^{-1}$ n'est que décoratif : si Q est dans $\mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $Q' = Q^{-1}$ y est aussi

Proposition :

Soient $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension p, muni d'une base $\mathscr{B}_E$.

Soit F un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, muni d'une base $\mathscr{B}_F$.

Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E,F)$ de matrice A dans les bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$.

Alors B est équivalente à A si et seulement si il existe une base $\mathscr{B}'_E$ de E et $\mathscr{B}'_F$ de F telles que B soit la matrice de φ dans les bases $\mathscr{B}'_E$ et $\mathscr{B}'_F$.

En résumé, une matrice B est équivalente à A si et seulement si elles représentent la même application linéaire dans des bases différentes.

Démonstration :

Si on trouve $\mathscr{B}'_E$ et $\mathscr{B}'_F$ telles que $B = \operatorname{mat}(\varphi, \mathscr{B}'_E, \mathscr{B}'_F)$, alors $B = Q^{-1}AP$ où Q est la matrice de passage de $\mathscr{B}_F$ à $\mathscr{B}'_F$ et P la matrice de passage de $\mathscr{B}_E$ à $\mathscr{B}'_E$.

Inversement : si $B = Q^{-1}AP$, on peut introduire une base $\mathscr{B}'_E$ de E telle que P soit la matrice de passage de $\mathscr{B}_E$ à $\mathscr{B}'_E$, et une base $\mathscr{B}'_F$ de F telle que Q soit la matrice de passage de $\mathscr{B}_F$ à $\mathscr{B}'_F$. Ainsi, $B = \operatorname{mat}(\varphi, \mathscr{B}'_E, \mathscr{B}'_F)$.

Proposition :

La relation « être équivalente à » sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est une relation d'équivalence, c'est-à-dire réflexive, transitive et symétrique :

Réflexive : $A = I_n^{-1}AI_n$

Symétrique : Si $B = Q^{-1}AP$, alors $A = QBP^{-1} = (Q^{-1})^{-1}B(P^{-1})$

Transitive : Si $B = Q^{-1}AP$ et $C = R^{-1}BS$, alors $C = R^{-1}BS = R^{-1}(Q^{-1}AP)S = (R^{-1}Q^{-1})A(PS) = (QR)^{-1}A(PS)$

C) Théorème

Théorème :

Soient $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

A et B sont équivalentes si et seulement si $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(B)$.

Démonstration :

1. Si A et B sont équivalentes : Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension p, muni d'une base $\mathscr{B}_E$.
   Soit F un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, muni d'une base $\mathscr{B}_F$.
   Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E, F)$ de matrice A dans les bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$.
   Donc il existe une base $\mathscr{B}'_E$ de E et $\mathscr{B}'_F$ de F telles que B soit la matrice de φ dans les bases $\mathscr{B}'_E$ et $\mathscr{B}'_F$.
   C'est-à-dire : $A = \operatorname{mat}(\varphi, \mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F)$ et $B = \operatorname{mat}(\varphi, \mathscr{B}'_E, \mathscr{B}'_F)$.
   Donc $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(\varphi) = \operatorname{rg}(B)$.
2. Supposons inversement que $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(B) = r$.
   Lemme :
   Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, notons $r = \operatorname{rg}(A)$. On va montrer que A est équivalente à :

$$J_{n,p,r} = \underbrace{\left(\begin{array}{ccccccc}
1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\
\vdots & \ddots & 1 & 0 & & & \vdots \\
\vdots & & 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\multicolumn{3}{c}{\underbrace{0 \quad \dots \quad \dots}_{r}} & \dots & \dots & \dots & 0
\end{array}\right)}_{p}
\begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\0\\1\end{matrix}}\right\}r \\ \vphantom{\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}} \end{matrix}
\left.\vphantom{\begin{matrix}1\\0\\1\\0\\0\\0\end{matrix}}\right\}n \tag{11.67}$$

C'est-à-dire $J_{n,p,r} = (\gamma_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ où $\gamma_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \leqslant r \\ 0 & \text{si } i \neq j \text{ ou } (i = j \text{ et } i > r) \end{cases}$

Démonstration (du lemme) :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension p, muni d'une base $\mathscr{B}_E$.

Soit F un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, muni d'une base $\mathscr{B}_F$.

Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E, F)$ de matrice A dans les bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$.

Alors $\mathrm{rg}(\varphi) = r$. Donc $\dim(\ker\varphi) = p - r$. Soit $(u_{r+1}, \dots u_p)$ une base de $\ker\varphi$.

Soit G un supplémentaire de $\ker\varphi$ dans E.

Donc $\dim(G) = r$. Soit $(u_1, \dots u_r)$ une base de G.

Alors $B'_E = (u_1, \dots u_r, u_{r+1}, \dots u_p)$ est une base de E.

Soient $v_1, \dots v_r$ les images par φ de $u_1, \dots u_r$.

Alors $(v_1, \dots v_r)$ est libre. En effet :

$$\begin{aligned} \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_r v_r = 0 &\implies \varphi(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_r u_r) = 0 \\ &\implies \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_r u_r \in \ker\varphi \cap G \\ &\implies \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_r u_r = 0 \\ &\implies \forall i \in [\![1, r]\!], \alpha_i = 0 \end{aligned} \tag{11.68}$$

On complète alors cette famille en une base de F : $\mathscr{B}'_F = (v_1, \dots v_n)$.

Ainsi, par construction : $J_{n,p,r} = \mathrm{mat}(\varphi, \mathscr{B}'_E, \mathscr{B}'_F)$.

Donc A est équivalente à $J_{n,p,r}$.

D'où, pour la démonstration du théorème : A et B sont toutes les deux de rang r, donc équivalentes à $J_{n,p,r}$. Donc A et B sont équivalentes.

Théorème :

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tA)$.

Démonstration :

Notons $r = \mathrm{rg}(A)$. Alors, comme $J_{n,p,r}$ est de rang r, A est équivalente à $J_{n,p,r}$. Il existe donc $P \in \mathscr{GL}_p(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ tels que $A = Q^{-1} J_{n,p,r} P$.

Donc ${}^tA = {}^tP\,{}^tJ_{n,p,r}\,{}^t(Q^{-1})$.

Or, ${}^tP \in \mathscr{GL}_p(\mathbb{K})$, ${}^t(Q^{-1}) = ({}^tQ)^{-1}$ et ${}^tQ \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ et ${}^tJ_{n,p,r} = J_{p,n,r}$ (qui est de rang r).

Donc ${}^tA$ est équivalente à une matrice de rang r. donc $\mathrm{rg}({}^tA) = r$.

Donc $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tA)$.

Ainsi, le rang d'une matrice est aussi le rang de la famille de ses lignes.

Exemple (Recherche pratique du rang) :

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{11.69}$$

Quel est le rang de A ?

Remarque :

On a vu que, étant donnés $(v_1, \dots v_n)$ vecteurs d'un $\mathbb{K}$-ev E, les modifications du type

$$v_i \leftarrow \lambda v_i \text{ avec } \lambda \neq 0 \tag{11.70}$$

$$v_i \leftarrow v_i + \alpha v_j \text{ avec } i \neq j \tag{11.71}$$

$$v_i \leftrightarrow v_j \tag{11.72}$$

ne modifient pas $\mathrm{Vect}(v_1, \dots v_n)$ et par conséquent le rang. On va utiliser cette remarque sachant que le rang d'une matrice est celui de ses colonnes, mais aussi celui de ses lignes.

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(A) &\underset{\substack{L_4 \leftarrow L_4 - 4L_5 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_5 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_5 \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_5}}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftrightarrow L_4}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\underset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_4}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_3 \leftrightarrow L_1 \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_1 \leftarrow \frac{1}{3} L_1}}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= 5
\end{aligned} \tag{11.73}$$

XI Transformations élémentaires

A) Sur les colonnes

Définition :

On note C_p l'ensemble des matrices à p colonnes. Une transformation élémentaire T_C sur les colonnes d'une matrice à p colonnes est une application $T_C\colon \begin{array}{ccc} C_p & \longrightarrow & C_p \\ A & \longmapsto & A' \end{array}$ où A' est déduite de A par l'une des opérations suivantes :

- $c_i \leftarrow \lambda c_i$ avec $\lambda \neq 0$
- $c_i \leftarrow c_i + \alpha c_j$ avec $i \neq j$
- $c_i \leftrightarrow c_j$

Théorème :

Soit T_C une transformation élémentaire sur les colonnes d'une matrice à p colonnes. Alors il existe une et une seule matrice $P \in \mathscr{GL}_p(\mathbb{K})$ telle que $\forall A \in C_p, T_C(A) = A \times P$

Démonstration :

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension p, muni d'une base $\mathscr{B}_E = (e_1, e_2, \dots e_p)$.

Soit F un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, muni d'une base $\mathscr{B}_F = (f_1, f_2, \dots f_n)$.

Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E,F)$ tel que $A = \text{mat}(\varphi, \mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F)$.
Soit $A' = T_C(A)$.

- Si T_C est la transformation $c_i \leftarrow \lambda c_i$ avec $\lambda \neq 0$,
  on voit alors que $A' = \text{mat}(\varphi, \mathscr{B}'_E, \mathscr{B}_F)$ où $\mathscr{B}'_E = (e_1, e_2, \dots \lambda e_i \dots e_p)$.
  Selon les formules de changement de base, $A' = I_n^{-1}AP = AP$, où P est la matrice de passage de $\mathscr{B}_E$ à $\mathscr{B}'_E$, c'est-à-dire

$$P = \begin{array}{r@{}c} \begin{array}{r} \\ \\ i\to \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} = I_p + (\lambda - 1)E_{i,i} \tag{11.74}$$

- Si T_C est la transformation $c_i \leftarrow c_i + \alpha c_j$ avec $i \neq j$,
  alors, de même, $A' = \text{mat}(\varphi, \mathscr{B}'_E, \mathscr{B}_F)$ avec $\mathscr{B}'_E = (e_1, e_2, \dots e_i + \alpha e_j \dots e_p)$.
  $A' = I_n^{-1}AP = AP$ où

$$P = \begin{array}{c|ccccc} & & & i & & \\ & & & \downarrow & & \\ \hline & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ j\to & 0 & 1 & \alpha & & \vdots \\ & \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{array} = I_p + \alpha E_{j,i} \tag{11.75}$$

- Si T_C est la transformation $c_i \leftrightarrow c_j$,
  $A' = \text{mat}(\varphi, \mathscr{B}'_E, \mathscr{B}_F)$ avec $\mathscr{B}'_E = (e_1, e_2, \dots \underset{i}{e_j} \dots \underset{j}{e_i} \dots e_p)$.
  $A' = I_n^{-1}AP = AP$ où

$$P = \begin{array}{c|cccccc} & & & i & & j & \\ & & & \downarrow & & \downarrow & \\ \hline & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ & 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ i\to & \vdots & 0 & 0 & \ddots & 1 & \vdots \\ & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ j\to & \vdots & & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{array} = I_p - E_{j,j} - E_{i,i} + E_{j,i} + E_{i,j} \tag{11.76}$$

D'où l'existence.

Unicité : Si P convient, on a nécessairement : $T_C(I_p) = I_pP = P$. Donc P est l'image de l'identité.

B) Transformation élémentaire sur les lignes

Définition :

Soit L_n l'ensemble des matrices à n lignes. Une transformation élémentaire T_L sur les lignes d'une matrice à n lignes est une application $\begin{array}{rccc} T_L\colon & L_n & \longrightarrow & L_n \\ & A & \longmapsto & A' \end{array}$ où A' est déduite de A par l'une des transformations suivantes :

- $l_i \leftarrow \lambda l_i$ avec $\lambda \neq 0$
- $l_i \leftarrow l_i + \alpha l_j$ avec $i \neq j$
- $l_i \leftrightarrow l_j$

Théorème :

Soit T_L une transformation élémentaire sur les lignes des matrices à n lignes. Alors il existe une et une seule matrice $Q \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $\forall A \in L_n, T_L(A) = Q \times A$.

Démonstration :

On peut refaire la même démonstration que précédemment (attention, c'est $\mathscr{B}_F$ qui sera alors changé), ou alors :

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on note $A' = T_L(A)$. Alors il est évident que ${}^tA'$ est obtenue à partir de ${}^tA$ par une transformation élémentaire sur les colonnes (correspondant à T_L). Donc il existe $P \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que ${}^tA' = ({}^tA) \times P$. Donc $A' = \underbrace{{}^tP}_{\in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})} \times A$.

Remarque :

Si $\forall A \in L_n, T_L(A) = Q \times A$, alors $Q = T_L(I_n)$.

C) Intérêt de ces théorèmes

- On retrouve le fait qu'une transformation élémentaire sur les lignes/colonnes d'une matrice conserve son rang. En effet, une matrice A sera changée, par succession de transformations, en $A' = \underbrace{Q_l \dots Q_1}_{\in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})} A \underbrace{P_1 \dots P_k}_{\in \mathscr{GL}_p(\mathbb{K})}$ donc A' est équivalente à A, donc de même rang.
- On voit ce qui se passe quand on fait des transformations élémentaires sur les lignes d'un système :

  On considère le système

  $$AX = B, \quad A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \qquad \text{(S)}$$

  (A : « matrice du système », B : « matrice du 2^{nd} membre »)

  Alors

  $$\text{(S)} : \left\{ \begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p &= b_n \end{aligned} \right. \qquad (11.77)$$

Faire une transformation élémentaire sur les lignes, c'est simplement écrire : $AX = B \iff A'X = B'$, où A' et B' sont déduites de A et B par une même transformation T_L sur les lignes. Autrement dit, c'est écrire $AX = B \iff QAX = QB$ où $Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.

Transformation sur les colonnes d'un système : déconseillée. Exemple :

$$\begin{aligned}
&\left\{\begin{aligned} 2x+y+z &= a \\ 2x-y &= b \\ 5x &= c \end{aligned}\right. , \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\
\iff &\left\{\begin{aligned} z+y+2x &= a \\ -y+2x &= b \\ 5x &= c \end{aligned}\right. , \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad A'\begin{pmatrix} z \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{11.78}$$

On a juste échangé deux inconnues.

XII Retour à la méthode du pivot

A) Cas des matrices inversibles

Proposition :

Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$. Alors il existe une suite de transformations élémentaires sur les lignes qui conduit à I_n.

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}}{\longrightarrow} A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 3 & -6 & -9 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}{\longrightarrow} A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{11.79}$$

On voit ici que A est inversible car $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A_1) = \mathrm{rg}(A_2) = 3$. On continue :

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 4L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_3}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2 \\ L_3 \leftarrow -L_3}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2}{\longrightarrow} I_3 \tag{11.80}$$

Exemple :

$$\begin{aligned}
A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 7 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} &\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&\underset{L_3 \leftrightarrow -L_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - 4L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2 \\ L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1}}{\longrightarrow} I_3
\end{aligned} \tag{11.81}$$

Démonstration (par récurrence) :

Pour $n = 1$, ok.

Soit $n \geqslant 2$. Supposons que pour toute matrice $A \in \mathcal{GL}_{n-1}(\mathbb{K})$, il existe une succession de transformations

élémentaires sur les lignes qui conduit à I_{n-1}.
Soit alors $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ (On note L_i ses lignes).
Alors l'un des $a_{i,1}$ est non nul (car $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$). Un éventuel échange de lignes ramène au cas $a_{1,1} \neq 0$.
Puis les transformations $L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i,1}}{a_{1,1}}L_1$ pour $i \in [\![2, n]\!]$ amènent à :

$$\left(\begin{array}{c|ccc} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array}\right) \tag{11.82}$$

Alors B est inversible : ses lignes forment une famille libre car sinon il existerait un $(n-1)$-uplet $(\lambda_2, \dots \lambda_n) \neq (0, \dots 0)$ tel que $\sum_{i=2}^{n} \lambda_i l_i = 0$ (où l_i est la $(i-1)$-ème ligne de B), et on aurait aussi $\sum_{i=2}^{n} \lambda_i L_i = 0$.
De plus, les transformations sur les lignes de B reviennent aux mêmes transformations sur les L_i ($i \geqslant 2$), et amènent par hypothèse de récurrence à :

$$\left(\begin{array}{c|ccc} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & I_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right) \tag{11.83}$$

Ensuite, les transformations $L_1 \leftarrow L_1 - a_{1,j}L_j$ pour $j \geqslant 2$, puis la transformation $L_1 \leftarrow \frac{1}{a_{1,1}}L_1$ amènent à I_n.

Application :
On a une nouvelle présentation pour calculer l'inverse d'une matrice A inversible.

Exemple :
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \tag{11.84}$$

$1^{\text{ère}}$ méthode : point de vue des systèmes. On cherche à résoudre le système $AX = B$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et

$B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. On a les équivalences :

$$\begin{aligned}
AX = B \iff & \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\
\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}}{\iff} & \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & -6 & -9 \end{pmatrix} \times X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times B \\
\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_3 \leftarrow \quad -L_3}}{\iff} & \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \times B \\
\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 4L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + \frac{4}{3}L_2 \\ L_2 \leftarrow \quad -\frac{1}{3}L_2}}{\iff} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times X = \begin{pmatrix} -4 & 6 & -\frac{7}{3} \\ 2 & -3 & \frac{4}{3} \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \times B
\end{aligned} \tag{11.85}$$

Donc $A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -12 & 18 & -7 \\ 6 & -9 & 4 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$

Autre présentation :

Soient $A, M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K})$ $\left(A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}\right)$

On a les équivalences :

$$AM = I_3 \iff \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \iff \cdots \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -12 & 18 & -7 \\ 6 & -9 & 4 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} \tag{11.86}$$

Ainsi, on a trouvé un inverse à droite, donc un inverse, de A.

B) Cas d'une matrice quelconque

Exemple :

$$
\begin{aligned}
A = \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
&\xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2+2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3+L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4+L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-2L_1}]{}
\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 6 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -6 & -3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\
\xrightarrow[\substack{L_3 \leftarrow L_3-L_2 \\ L_5 \leftarrow L_5+L_2}]{}
\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0}^{*} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
&\xrightarrow[C_3 \leftrightarrow C_6]{}
\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
\xrightarrow[L_3 \leftrightarrow L_4]{}
\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
&\xrightarrow[C_4 \leftrightarrow C_5]{}
\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\xrightarrow[L_4 \leftrightarrow L_5]{} A' =
&\left(\begin{array}{cccc|cc} -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
\end{aligned}
\tag{11.87}
$$

On voit ici que la matrice A est de rang 4 (puisqu'elle est équivalente à A'). On peut maintenant faire des transformations élémentaires pour se ramener à $J_{5,6,4}$.

∗. Comme il n'y a plus que des 0 sur la troisième colonne, on fait un échange de colonne.

Généralisation, théorème :

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, de rang r. Alors :

1. Une succession de transformations élémentaires sur les lignes et, éventuellement, d'échange de colonnes, conduit à une matrice du type :

$$G = \begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccc|cccc} * & - & - & - & - & - & - \\ 0 & \ddots & - & - & - & - & - \\ \vdots & \ddots & * & - & - & - & - \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{array}\right) \\ \underbrace{\hphantom{0\ \dots\ 0}}_{r}\hphantom{0\ \dots\ \dots\ 0} \\ \underbrace{\hphantom{0\ \dots\ 0\ 0\ \dots\ \dots\ 0}}_{p}\end{array} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}*\\0\\\vdots\end{array}}\right\}r \\ \vphantom{\begin{array}{c}0\\\vdots\\0\end{array}} \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c}*\\0\\\vdots\\0\\\vdots\\0\end{array}}\right\}n \tag{11.88}$$

   (À adapter quand $r = 0$: on a alors $A = 0$)

2. Des transformations élémentaires sur les colonnes conduisent alors à $J_{n,p,r}$.

On retrouve ainsi le fait que A est équivalente à $J_{n,p,r}$: $J_{n,p,r} = \underbrace{Q_m \dots Q_1}_{\in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})} A \underbrace{P_1 \dots P_k}_{\in \mathscr{GL}_p(\mathbb{K})}$.

Remarque :

Une matrice du type de G s'appelle une réduite de Gauss. Une telle matrice est évidemment de rang r. Par conséquent, si, partant de A de rang inconnu, on arrive à G, on trouve alors le rang de A.

Démonstration (Rapide) :

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Pour la première colonne de A, si elle est nulle :

- Soit toutes les autres colonnes de A sont nulles, et alors $A = 0$.
- Soit une colonne, C_j, n'est pas nulle : on fait alors $C_1 \leftrightarrow C_j$.

On peut supposer maintenant $C_1 \neq 0$.

Si $a_{1,1} = 0$, on cherche i tel que $a_{i,1} \neq 0$ (c'est possible car $C_1 \neq 0$), et on fait $L_1 \leftrightarrow L_i$.

On peut supposer maintenant $a_{1,1} \neq 0$.

On fait ensuite les transformations $L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i,1}}{a_{1,1}} L_1$ (pour $i \geqslant 2$), ce qui amène à :

$$A_1 = \left(\begin{array}{c|c} * & - \ - \\ \hline 0 & \\ \vdots & A' \end{array}\right) \tag{11.89}$$

Puis on recommence avec A' et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à

$$\begin{pmatrix} * & - & - & - & - & - \\ 0 & \ddots & - & - & - & - \\ \vdots & & * & - & - & - \\ \vdots & & 0 & & & \\ \vdots & & \vdots & & 0 & \\ 0 & \dots & 0 & & & \end{pmatrix} \tag{11.90}$$

XIII Synthèse et compléments sur les systèmes

A) Définition

Un système linéaire de n équations, p inconnues à coefficients dans $\mathbb{K}$ est :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p &=& b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p &=& b_2 \\ &\vdots& \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p &=& b_n \end{array}\right. \tag{S}$$

Où la matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est appelée la matrice du système, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ la colonne des inconnues et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ la colonne du second membre.

Résoudre (S), c'est donner l'ensemble des solutions, c'est-à-dire l'ensemble des p-uplets $(x_1, \dots x_p) \in \mathbb{K}^p$ tels que les égalités de (S) soient satisfaites.

B) Interprétation

(S) **peut traduire une égalité vectorielle du type $\sum_{j=1}^{p} x_i\vec{v}_j = \vec{w}$,** où les $\vec{v}_j$ sont les vecteurs de composantes $\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$ et $\vec{w}$ le vecteur de composantes $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ (dans une base $\mathscr{B}_F$ d'un espace vectoriel F de dimension n, par exemple $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ avec sa base naturelle). On voit alors que :

- (S) admet au moins une solution si et seulement si $\vec{w} \in \mathrm{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_p)$.
- (S) admet au plus une solution si et seulement si $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_p)$ est libre.

Démonstration (le premier point est évident) :

- Si $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_p)$ est libre :
  - ◇ si il n'y a pas de solution, on a 0 solutions.
  - ◇ si il y en a une, disons $(x_1, x_2, \dots x_p)$. Soit $(x'_1, x'_2, \dots x'_p)$ une autre solution. Montrons que $(x_1, x_2, \dots x_p) = (x'_1, x'_2, \dots x'_p)$. On a $\sum_{j=1}^{p} x_j\vec{v}_j = \sum_{j=1}^{p} x'_j\vec{v}_j = \vec{w}$, soit $\sum_{j=1}^{p}(x_j - x'_j)\vec{v}_j = 0$. Donc $\forall k \in [\![1,p]\!], x_k = x'_k$.
- Si $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_p)$ est liée, il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \neq (0, 0, \dots 0)$ tel que $\sum_{j=1}^{p} \lambda_j\vec{v}_j = 0$. Donc si $(x_1, x_2, \dots x_p)$ est solution de (S), alors $(x_1 + \lambda_1, x_2 + \lambda_2, \dots, x_p + \lambda_p)$ en est aussi solution.

Remarque :

Si $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p)$ est une base de F, $(n = p)$, alors (S) admet une unique solution quel que soit $\vec{w}$.

(S) **peut traduire une égalité du type $\varphi(\vec{u}) = \vec{w}$,** où φ est une application linéaire d'un espace E de dimension p vers un espace F de dimension n et dont la matrice dans les bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$ données est A et où $\vec{w}$ est un élément de F de composantes $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ dans $\mathscr{B}_F$ et où $\vec{u}$ est un vecteur (inconnu) de composantes $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ dans $\mathscr{B}_E$ (remarque : si $\mathscr{B}_E = (e_1, e_2 \dots e_p)$, les $\vec{v}_j$ sont les $\varphi(\vec{e}_j)$).

- (S) admet au moins une solution si et seulement si $\vec{w} \in \operatorname{Im}\varphi$.
- (S) admet au plus une solution si et seulement si φ est injective (même démonstration).
- Si φ est bijective (alors $n = p$), (S) a une et une seule solution, quel que soit le second membre.
- Si φ n'est pas bijective, le comportement de (S) dépend du second membre :
  - ◇ Si $\vec{w} \notin \operatorname{Im}\varphi$, alors (S) n'a pas de solution.
  - ◇ Si $\vec{w} \in \operatorname{Im}\varphi$, alors (S) a au moins une solution. Plus précisément :
    - — Si φ est injective, une seule solution.
    - — Sinon, une infinité (pour $\mathbb{K}$ infini), et ces solutions sont les $\{\vec{u}_0 + \vec{n}, \vec{n} \in \ker\varphi\}$, où $\vec{u}_0$ est une solution fixée de (S). En effet : si $\vec{u}_0$ est solution, alors : $\vec{u}$ solution $\iff \varphi(\vec{u}_0) = \varphi(\vec{u}) \iff \vec{u}_0 - \vec{u} \in \ker\varphi$.

Cas particulier :

Si $n = p$ (alors φ est injective si et seulement si φ est surjective). Si φ n'est pas bijective, alors :

- Si $\vec{w} \notin \operatorname{Im}\varphi$, alors (S) n'a pas de solution.
- Si $\vec{w} \in \operatorname{Im}\varphi$, alors (S) a une infinité de solutions.

(S) **peut traduire un système de la forme**

$$\left\{\begin{aligned} \varphi_1(u) &= b_1 \\ \varphi_2(u) &= b_2 \\ &\vdots \\ \varphi_n(u) &= b_n \end{aligned}\right. \tag{11.91}$$

Où les φ_i sont n formes linéaires sur un espace vectoriel E de dimension p :

$$\begin{aligned} \varphi_i : \quad & E \longrightarrow \mathbb{K} \\ u \text{ de composantes } \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} & \longmapsto \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j \end{aligned} \tag{11.92}$$

Dans le cas particulier d'un système homogène (c'est-à-dire que la colonne du second membre est nulle), le système traduit : $u \in \bigcap_{i=1}^{n} H_i$ où H_i est l'hyperplan $\ker\varphi_i$.

Remarque :

Dans tout les cas, l'ensemble des solutions de (S) : $AX = B$ est l'ensemble $\{X_0 + U, U \in \mathscr{S}_H\}$ où X_0 est une solution de (S) et $\mathscr{S}_H$ l'ensemble des solutions du système (H) homogène associé à (S) :

$$AX = 0 \tag{H}$$

C) Résolution

Après méthode du pivot (transformation sur les lignes et, éventuellement, échange d'inconnues), on est ramené à :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} * & - & - & - & - & - \\ 0 & \ddots & - & - & - & - \\ \vdots & & * & - & - & - \\ \hline \vdots & & 0 & & & \\ \vdots & & \vdots & & 0 & \\ 0 & \dots & 0 & & & \end{array}\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad \text{(S)}$$

où le premier bloc est carré de taille r.

On voit déjà que (S) est compatible si et seulement si $\forall i \in [\![r+1, n]\!], b_i = 0$.

- Si $\exists i \in [\![r+1, n]\!], b_i \neq 0$, alors (S) est incompatible.
- Si $\forall i \in [\![r+1, n]\!], b_i = 0$, le système (S) équivaut alors au système (S') :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} * & - & - & - & - & - \\ 0 & \ddots & - & - & - & - \\ \vdots & \ddots & * & - & - & - \end{array}\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_r \end{pmatrix} \qquad \text{(S')}$$

Or, en tant que d'inconnues $x_1, x_2, \dots x_r$, ayant fixé les autres, le système est un système triangulaire supérieur sans 0 sur la diagonale :

$$\begin{pmatrix} * & - & - \\ 0 & \ddots & - \\ \vdots & \ddots & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - \sum_{j=r+1}^{p} a_{1,j} x_j \\ \vdots \\ b_r - \sum_{j=r+1}^{p} a_{r,j} x_j \end{pmatrix} \qquad (11.93)$$

Le système a des solutions, obtenues « en fixant arbitrairement $p - r$ inconnues ».

Ainsi :

On considère un système à n équations, p inconnues, de rang r. Alors :

- Il y a $n - r$ conditions de compatibilité
- Lorsqu'elles sont satisfaites, le système admet des solutions avec $p - r$ degrés de liberté.

Cas particulier :

- Si $r = n$, le système est toujours compatible (0 conditions de compatibilité)
- Si $r = p$ et que le système est compatible, il y a une unique solution.
- Si $r = p = n$, le système a une et une seule solution.
- Si le système est homogène, il est toujours compatible (au moins la solution nulle) et l'ensemble de ses solution est un $\mathbb{K}$-ev de dimension $p - r$.

D) Compléments

1) Polynôme de matrices

Soit $A \in \mathscr{M}_m(\mathbb{K})$.

Pour $P \in \mathbb{K}[X]$, disons $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on note $P(A) = \sum_{k=0}^{n} a_k A^k$ ($A^0 = I_m$).

Alors l'application $\begin{array}{rccl} \phi\colon & \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathscr{M}_m(\mathbb{K}) \\ & P & \longmapsto & P(A) \end{array}$ est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres, c'est-à-dire que pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$:

- $(P + \lambda Q)(A) = P(A) + \lambda Q(A)$
- $(PQ)(A) = P(A) \times Q(A)$
- $1_{\mathbb{K}[X]}(A) = I_m$

(Vérifications simples, sauf pour la multiplication où il faut faire attention)

Proposition :

Toute matrice A admet un polynôme annulateur de A non nul et de degré $\leqslant m^2$ (un polynôme annulateur est un polynôme tel que $P(A) = 0$).

En effet : $A^0, A^1, \dots A^{m^2}$ sont $m^2 + 1$ vecteurs de $\mathscr{M}_m(\mathbb{K})$. Donc la famille $(A^k)_{k \in [\![0, m^2]\!]}$ est liée. Il existe donc $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{m^2}) \neq (0, 0, \dots, 0)$ tel que $\sum_{k=0}^{m^2} \lambda_k A^k = 0$. Le polynôme $P = \sum_{k=0}^{m^2} \lambda_k X^k$ est donc non nul et vérifie $P(A) = 0$.

(On a montré en même temps que φ n'est pas injective, puisque $\ker \varphi \neq \{0\}$).

Proposition :

Il existe $M \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\{P \in \mathbb{K}[X], P(A) = 0\} = \{MQ, Q \in \mathbb{K}[X]\}$.

M est unique à une constante multiplicative près.

En effet : On pose M un polynôme de degré minimal (mais non nul) annulateur de A.

Soit alors N un autre polynôme annulateur.

La division euclidienne de N par M donne :

$N = MQ + R$ avec $\deg R < \deg M$

Donc $\underbrace{N(A)}_{=0} = \underbrace{M(A)}_{=0} \times Q(A) + R(A)$. Donc $R(A) = 0$. Donc $R = 0$ car sinon M n'est pas de degré minimal. Donc M divise N.

2) Matrices semblables

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A et B sont semblables (ou que B est semblable à A) lorsqu'il existe $P \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $B = P^{-1}AP$

On peut montrer aisément que « être semblable à » est une relation d'équivalence. Elle est plus fine que la relation « être équivalent à » sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, c'est-à-dire que « être semblable à » implique « être équivalent à ».

Mais la réciproque est fausse : $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont équivalentes (car de même rang), mais non semblables : si on trouve P tel que $A = P^{-1}IP$, alors $A = P^{-1}P = I$.

Ainsi, B est semblable à A si et seulement si elles représentent le même endomorphisme dans une base différente.

Plus précisément :

Étant donné E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n muni d'une base $\mathscr{B}$, et $\varphi \in \mathscr{L}(E)$ tel que $A = \text{mat}(\varphi, \mathscr{B})$,
B est semblable à A si et seulement si il existe une autre base $\mathscr{B}'$ de E telle que $B = \text{mat}(\varphi, \mathscr{B}')$.
(La démonstration est la même que pour l'équivalence)

Une matrice semblable à une matrice diagonale est une matrice diagonalisable (attention, toutes ne le sont pas)

Exemple :
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrons que A n'est pas diagonalisable.
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension 2 muni d'une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$.
Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E)$ tel que $A = \text{mat}(\varphi, \mathscr{B})$.
Peut-on trouver $\mathscr{B}'$ telle que $\text{mat}(\varphi, \mathscr{B}')$ soit diagonale ?
Supposons que $\mathscr{B}'$ existe, disons $\mathscr{B}' = (e_1', e_2')$.
Alors il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\varphi(e_1') = \lambda_1 e_1'$ et $\varphi(e_2') = \lambda_2 e_2'$. Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ la colonne des composantes de e_1' dans $\mathscr{B}$.
Alors $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, donc $\begin{cases} x + y = \lambda_1 x \\ y = \lambda_1 y \end{cases}$. Si $\lambda_1 \neq 1$, alors $x = y = 0$, ce qui est impossible car e_1' est un vecteur d'une base.
Donc $\lambda_1 = 1$. De même, $\lambda_2 = 1$.
Donc $\varphi = \text{Id}_E$, ce qui est contradictoire car $A \neq I_2$. Donc A n'est pas diagonalisable.

3) Trace

Définition :
Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On note

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} \tag{11.94}$$

Proposition :
L'application $\begin{array}{rcl} \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ A & \longmapsto & \text{Tr}(A) \end{array}$ est une forme linéaire (évident).

Proposition :
Pour tous $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.

Démonstration :

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$, $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$, $C = AB = (c_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$, $D = BA = (d_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$.
On a :

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(C) = \sum_{i=1}^{n} c_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,i} \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,k} b_{k,i} \right) \\ = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} b_{k,i} a_{i,k} \right) = \sum_{k=1}^{n} d_{k,k} = \operatorname{Tr}(D) = \operatorname{Tr}(BA)\end{aligned} \tag{11.95}$$

Conséquence :

Si A et B sont semblables, alors elles ont même trace (réciproque fausse) :

$$\operatorname{Tr}(B) = \operatorname{Tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{Tr}(P^{-1}(AP)) = \operatorname{Tr}(APP^{-1}) = \operatorname{Tr}(A) \tag{11.96}$$

Contre-exemple pour la réciproque : $\operatorname{Tr} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{Tr} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$, mais $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Conséquence :

On peut définir la trace d'un endomorphisme :

$\operatorname{Tr}(\varphi)$ est la trace de n'importe quelle matrice A telle que $A = \operatorname{mat}(\varphi, \mathscr{B})$.