



Chapitre 9 : \mathbb{K} -algèbres

\mathbb{K} désigne ici toujours un corps (commutatif).

I Définition

Soit E un ensemble, muni de deux lois internes \oplus et \otimes , et d'une loi externe à opérateurs dans \mathbb{K} , \cdot . Alors $(E, \oplus, \otimes, \cdot)$ est une \mathbb{K} -algèbre lorsque :

- (E, \oplus, \cdot) est un \mathbb{K} -ev.
- La loi \otimes est associative et admet un élément neutre (qu'on note 1_E)
- La loi \otimes est distributive sur la loi \oplus .
- Pour tous $u, v \in E$, et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $(\lambda u) \otimes v = u \otimes (\lambda v) = \lambda(u \otimes v)$.

Notation :

Les lois \oplus et \otimes sont généralement notées $+$ et \times .

Exemple :

\mathbb{R} est une \mathbb{R} -algèbre (pour les lois usuelles), et \mathbb{C} aussi. (\mathbb{C} est aussi une \mathbb{C} -algèbre).

$(\mathcal{F}(X, \mathbb{K}), +, \times, \cdot)$ est une \mathbb{K} -algèbre, X étant un ensemble quelconque.

II Sous-algèbres

Définition :

Une sous-algèbre d'une \mathbb{K} -algèbre $(E, +, \times, \cdot)$, c'est une partie F de E qui contient 1_E et qui est stable pour chacune des trois lois, c'est-à-dire :

- $1_E \in F$,
- $\forall (u, v) \in F^2, u + v \in F$ et $u \times v \in F$,
- $\forall u \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda u \in F$.

Proposition :

Une sous-algèbre d'une \mathbb{K} -algèbre est une \mathbb{K} -algèbre.

Exemple :

L'ensemble des fonctions polynomiales de \mathbb{K} dans \mathbb{K} constitue une sous-algèbre de l'algèbre $(\mathcal{F}(\mathbb{K}, \mathbb{K}), +, \times, \cdot)$.

III Morphisme de \mathbb{K} -algèbres

Définition :

Soient $(E, +, \times, \cdot)$, $(F, +, \times, \cdot)$ deux \mathbb{K} -algèbres. Soit $\varphi: E \rightarrow F$. Alors φ est un morphisme de \mathbb{K} -algèbres lorsque :

- $\forall (u, v) \in E^2, \varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$,
- $\forall (u, v) \in E^2, \varphi(u \times v) = \varphi(u) \times \varphi(v)$,
- $\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \varphi(\lambda u) = \lambda \varphi(u)$,
- $\varphi(1_E) = 1_F$.

Exemple :

L'ensemble des suites convergentes est une sous algèbre de la \mathbb{R} -algèbre des suites réelles, et l'application qui à une suite convergente associe sa limite est un morphisme d'algèbres.