Chapitre 8 : Espaces vectoriels

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (ou un sous corps de $\mathbb{C}$), muni des lois $+$ et $\times$ naturelles.

I Définitions

A) Définition

Définition :

Soit E un ensemble, muni d'une loi de composition interne $\oplus$ et d'une loi externe à opérateurs dans $\mathbb{K}$, notée $\cdot$, c'est-à-dire : $\begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & E \\ (u,v) & \longmapsto & u \oplus v \end{array}$ et $\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda,v) & \longmapsto & \lambda \cdot v \end{array}$.

On dit que $(E, \oplus, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$/un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K}$-ev) lorsque :

- $(E, \oplus)$ est un groupe commutatif.
- Pour tous $u, v \in E$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a :

$$(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u \oplus \mu \cdot u \tag{8.1}$$

$$\lambda \cdot (u \oplus v) = \lambda \cdot u \oplus \lambda \cdot v \tag{8.2}$$

$$(\lambda \times \mu) \cdot u = \lambda \cdot (\mu \cdot u) \tag{8.3}$$

$$1 \cdot u = u \tag{8.4}$$

Exemple :

$(\mathbb{R}, +, \times)$, $(\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \times)$ sont des $\mathbb{R}$-ev. $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est un $\mathbb{K}$-ev.

B) Règles de calcul

Soit $(E, \oplus, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-ev. Alors :

1. $\forall u \in E, 0 \cdot u = 0_E$ (neutre pour $\oplus$ du groupe $(E, \oplus)$ appelé le vecteur nul de E) :

$$\forall u \in E, 0 \cdot u = (0+0) \cdot u = 0 \cdot u \oplus 0 \cdot u, \tag{8.5}$$

   donc $0 \cdot u = 0_E$.

2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \cdot 0_E = 0_E$:

$$\lambda \cdot 0_E = \lambda \cdot (0_E \oplus 0_E) = \lambda \cdot 0_E \oplus \lambda \cdot 0_E, \tag{8.6}$$

   donc $\lambda \cdot 0_E = 0_E$.

3. $\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \cdot u = 0_E \iff \lambda = 0$ ou $u = 0_E$:
   Le sens $\Longrightarrow$ a été vu avec les deux premiers points.
   Pour $\Longleftarrow$: supposons que $\lambda \cdot u = 0_E$ et que $\lambda \neq 0$.
   Montrons qu'alors $u = 0_E$. On introduit λ^{-1} (ce qui est possible car $\lambda \neq 0$).

Alors $\lambda^{-1}\cdot(\lambda\cdot u)=(\lambda^{-1}\times\lambda)\cdot u=1\cdot u=u$ d'une part, et $\lambda^{-1}\cdot(\lambda\cdot u)=\lambda^{-1}\cdot 0_E=0_E$ d'autre part.
Donc $u=0_E$.

4. $\forall u\in E,\forall\lambda\in\mathbb{K},(-\lambda)\cdot u=\overset{\frown}{-}(\lambda\cdot u)=\lambda\cdot(\overset{\frown}{-}u)$:
On a $(\lambda\cdot u)\oplus((-\lambda)\cdot u)=(\lambda+(-\lambda))\cdot u=0_E$. Donc $(-\lambda)\cdot u=\overset{\frown}{-}(\lambda\cdot u)$.
Et $(\lambda\cdot u)\oplus(\lambda\cdot(\overset{\frown}{-}u))=\lambda\cdot(u\oplus\overset{\frown}{-}u)=\lambda\cdot 0_E=0_E$. Donc $\lambda\cdot(\overset{\frown}{-}u)=\overset{\frown}{-}(\lambda\cdot u)$.
5. $\forall u\in E,\forall n\in\mathbb{Z},n.u=n\cdot u$ (À gauche de l'égalité : itération dans $(E,\oplus)$; à droite : produit externe) :
Par récurrence pour les $n\geqslant 0$, puis le point précédent pour $n\leqslant 0$.

Ces règles permettent des écritures simplifiées : $+$ pour $\oplus$, . pour $\cdot$ voire omis, $-\lambda u$ pour la valeur commune de $(-\lambda)\cdot u$, $\overset{\frown}{-}(\lambda\cdot u)$ et $\lambda\cdot(\overset{\frown}{-}u)$.

Vocabulaire :
Dans un $\mathbb{K}$-ev $(E,+,\cdot)$, les éléments de E sont appelés des vecteurs, et les éléments de $\mathbb{K}$ des scalaires.

C) Exemple important

Proposition :
Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K}\times\mathbb{K}\times\ldots\times\mathbb{K}$) de la loi $\oplus$ et de la loi externe $\cdot$ à opérateurs dans $\mathbb{K}$ définis ainsi :

Pour tous $\begin{cases}(x_1,x_2,\ldots x_n)\in\mathbb{K}^n\\(y_1,y_2,\ldots y_n)\in\mathbb{K}^n\\\lambda\in\mathbb{K}\end{cases}$, on pose

$$(x_1,x_2,\ldots x_n)\oplus(y_1,y_2,\ldots y_n)=(x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots x_n+y_n)\tag{8.7}$$
$$\lambda\cdot(x_1,x_2,\ldots x_n)=(\lambda x_1,\lambda x_2,\ldots\lambda x_n)\tag{8.8}$$

Alors $(\mathbb{K}^n,\oplus,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-ev.

Démonstration :
Déjà, $(\mathbb{K}^n,\oplus)$ est un groupe commutatif :

- Le neutre pour $\oplus$ est évidemment $(0,0,\ldots 0)$, qui est bien dans $\mathbb{K}^n$.
- Associativité :
Soient $x,y,z\in\mathbb{K}^n$. Alors $x=(x_1,x_2,\ldots x_n)$, $y=(y_1,y_2,\ldots y_n)$ et $z=(z_1,z_2,\ldots z_n)$ où $x_1,x_2,\ldots x_n,y_1,y_2,\ldots y_n,z_1,z_2,\ldots z_n\in\mathbb{K}$. Alors :

$$\begin{aligned}x\oplus(y\oplus z)&=(x_1,x_2,\ldots x_n)\oplus((y_1,y_2,\ldots y_n)\oplus(z_1,z_2,\ldots z_n))\\&=\ldots=(x_1+(y_1+z_1),x_2+(y_2+z_2),\ldots x_n+(y_n+z_n))\\&=((x_1+y_1)+z_1,(x_2+y_2)+z_2,\ldots(x_n+y_n)+z_n)\\&=\ldots=(x\oplus y)\oplus z\end{aligned}\tag{8.9}$$

- Commutativité :

Soient $x, y \in \mathbb{K}^n$, $x = (x_1, x_2, \dots x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots y_n)$. Alors :

$$\begin{aligned} x \oplus y &= (x_1, x_2, \dots x_n) \oplus (y_1, y_2, \dots y_n) \\ &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots x_n + y_n) \\ &= (y_1 + x_1, y_2 + x_2, \dots y_n + x_n) \\ &= y \oplus x \end{aligned} \tag{8.10}$$

- Existence d'un inverse pour $\oplus$ de tout élément de $\mathbb{K}^n$:
  Soit $x \in \mathbb{K}^n$, $x = (x_1, x_2, \dots x_n)$. Alors $x' = (-x_1, -x_2, \dots - x_n)$ est dans $\mathbb{K}^n$ et est évidemment inverse de x pour $\oplus$.

Soient maintenant $x, y \in \mathbb{K}^n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, avec $x = (x_1, x_2, \dots x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots y_n)$. Alors :

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \cdot x &= (\lambda + \mu) \cdot (x_1, x_2, \dots x_n) \\ &= ((\lambda + \mu)x_1, (\lambda + \mu)x_2, \dots (\lambda + \mu)x_n) \\ &= (\lambda x_1 + \mu x_1, \lambda x_2 + \mu x_2, \dots \lambda x_n + \mu x_n) \\ &= (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots \lambda x_n) \oplus (\mu x_1, \mu x_2, \dots \mu x_n) \\ &= \lambda \cdot (x_1, x_2, \dots x_n) + \mu \cdot (x_1, x_2, \dots x_n) \\ &= \lambda \cdot x \oplus \mu \cdot x \end{aligned} \tag{8.11}$$

$$\begin{aligned} \lambda \cdot (x \oplus y) &= \lambda \cdot (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots x_n + y_n) \\ &= (\lambda(x_1 + y_1), \lambda(x_2 + y_2), \dots \lambda(x_n + y_n)) \\ &= (\lambda x_1 + \lambda y_1, \lambda x_2 + \lambda y_2, \dots \lambda x_n + \lambda y_n) \\ &= (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots \lambda x_n) \oplus (\lambda y_1, \lambda y_2, \dots \lambda y_n) \\ &= \lambda \cdot x + \lambda \cdot y \end{aligned} \tag{8.12}$$

$$\begin{aligned} (\lambda\mu) \cdot x &= ((\lambda\mu)x_1, (\lambda\mu)x_2, \dots (\lambda\mu)x_n) \\ &= (\lambda(\mu x_1), \lambda(\mu x_2), \dots \lambda(\mu x_n)) \\ &= \lambda \cdot (\mu x_1, \mu x_2, \dots \mu x_n) \\ &= \lambda \cdot (\mu \cdot x) \end{aligned} \tag{8.13}$$

$$1 \cdot x = (1x_1, 1x_2, \dots 1x_n) = (x_1, x_2, \dots x_n) = x \tag{8.14}$$

Généralisation :
Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-ev, on peut munir naturellement $E \times F$ d'une structure de $\mathbb{K}$-ev en posant, pour tous $u, u' \in E, v, v' \in F, \lambda \in \mathbb{K}$:

$$\begin{cases} (u, v) + (u', v') = (u + u', v + v') \\ \lambda \cdot (u, v) = (\lambda \cdot u, \lambda \cdot v) \end{cases} \tag{8.15}$$

Et plus généralement $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ où les E_i sont des $\mathbb{K}$-ev.

D) Vecteurs, combinaisons linéaires

Ici, $(E, +, \cdot)$ désigne un K-ev.

Définition :

Soit $(u_1, u_2, \dots u_n)$ une famille finie d'éléments de E. Une combinaison linéaire de la famille $(u_1, u_2, \dots u_n)/$ des $u_i, i \in [\![1, n]\!]$ est un élément de E du type $\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \dots + \lambda_n \cdot u_n$, c'est-à-dire $\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot u_i$ où les λ_i sont des éléments de $\mathbb{K}$.

Définition :

Soit $u \in E$. Si $u = 0_E$, tout élément de E est dit colinéaire à u. Si $u \neq 0_E$, les vecteurs de E colinéaires à u sont les $\lambda \cdot u, \lambda \in \mathbb{K}$.

Proposition :

La relation « être colinéaire à » est une relation d'équivalence.

Démonstration :

- Déjà, elle est réflexive...
- Symétrique : Supposons v colinéaire à u :
  - ◇ Si $u = 0_E$, u est bien colinéaire à v car $u = 0 \cdot v$.
  - ◇ Si $u \neq 0_E$, alors v s'écrit $\lambda \cdot u$ où $\lambda \in \mathbb{K}$. Donc soit $\lambda = 0$ et alors $v = 0_E$ et donc u est colinéaire à v, soit $\lambda \neq 0$, et alors $u = \lambda^{-1} v$ donc u est colinéaire à v.
- Transitivité : immédiate.

Définition (équivalente) :

Soient $u, v \in E$. On a les équivalences :

$$u \text{ et } v \text{ sont colinéaires} \iff \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2 \backslash \{(0,0)\}, \alpha \cdot u + \beta \cdot v = 0_E \tag{8.16}$$

$$\iff u = 0_E \text{ ou } \exists \lambda \in \mathbb{K}, v = \lambda \cdot u \tag{8.17}$$

Démonstration :

8.16 est simplement une autre façon d'écrire la définition. Montrons que 8.16 $\implies$ 8.17. Supposons 8.16.

- Si $u = 0_E$, on peut prendre $(\alpha, \beta) = (1, 0)$.
- Si $u \neq 0_E$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $v = \lambda \cdot u$. Ainsi, avec $(\alpha, \beta) = (\lambda, -1)$, on a bien $\alpha \cdot u + \beta \cdot v = 0_E$

Montrons maintenant que 8.17 $\implies$ 8.16. Supposons 8.17. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K} \backslash \{(0,0)\}$ tel que $\alpha \cdot u + \beta \cdot v = 0_E$.

- Si $\beta \neq 0$, alors $v = \frac{-\alpha}{\beta} \cdot u$.
- Si $\beta = 0$, alors $\alpha \cdot u = 0_E$. Or, $\alpha \neq 0$ car $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. Donc $u = 0_E$.

II Sous-espace vectoriel

$(E, +, \cdot)$ désigne toujours un $\mathbb{K}$-ev.

A) Définition

Définition :

Soit F une partie de E. On dit que F est un sous-espace vectoriel (sev) de E lorsque :

- F contient 0_E.
- F est stable par $+$: $\forall u, v \in F, u+v \in F$.
- F est stable par $\cdot$: $\forall u \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \cdot u \in F$.

Proposition :

Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors $+$ constitue une loi de composition interne sur F, $\cdot$ constitue une loi externe à opérateurs dans $\mathbb{K}$, et $(F, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-ev.

Démonstration :

- Déjà, $(F, +)$ est bien un groupe commutatif puisque F est un sous-groupe de $(E, +)$ car $0_E \in F$, F est stable par $+$ et $\forall u \in F, -u = (-1) \cdot u \in F$.
- De plus, on vérifie immédiatement que les quatre règles sont bien vérifiées...

Exemple :

- $\mathbb{R}^2$ est un $\mathbb{R}$-ev. Quels en sont les sous-espaces vectoriels ?
  - ◇ $\{0_{\mathbb{R}^2}\}$
  - ◇ Pour $u \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0_{\mathbb{R}^2}\}$, $\{\lambda \cdot u, \lambda \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
  - ◇ $\mathbb{R}^2$.

  Il n'y en a pas d'autres : si un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ contient deux vecteurs non colinéaires, c'est $\mathbb{R}^2$.
- Si E est un $\mathbb{K}$-ev quelconque :
  - ◇ $\{0_E\}$ et E sont deux sous-espaces vectoriels de E.
  - ◇ Si $u \in E \backslash \{0_E\}$, $\{\lambda \cdot u, \lambda \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de E appelé la droite vectorielle de E engendrée par u.
- Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ sont exactement :
  - ◇ $\{0_{\mathbb{R}^3}\}$.
  - ◇ Pour $u \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, $\{\lambda \cdot u, \lambda \in \mathbb{R}\}$.
  - ◇ Pour $u, v \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ avec u et v non colinéaires, $\{\lambda \cdot u + \mu \cdot v, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ (plan vectoriel).
  - ◇ $\mathbb{R}^3$.
- Des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:
  - ◇ $H_a = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), f(a) = 0\}$ où a est un élément de $\mathbb{R}$ fixé.
  - ◇ $A =$ l'ensemble des fonctions du type $x \mapsto a \cdot x + b$, $a, b \in \mathbb{R}$.
  - ◇ Ou même $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{R}_n[X]$ (où $n \in \mathbb{N}$).
  - ◇ $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$,...
  - ◇ L'ensemble des fonctions paires, impaires...

B) Intersection de sous-espaces vectoriels

Théorème :

Toute intersection de sous-espaces vectoriels de E en est un sous-espace vectoriel.

Démonstration :

Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E.

Soit $F = \bigcap_{i\in I} F_i = \{u \in E, \forall i \in I, u \in F_i\}$.

- Alors $0_E \in F$ car $\forall i \in I, 0_E \in F_i$.
- F est stable par $+$:

  Soient $u, v \in F$. Alors $\forall i \in I, u \in F_i, v \in F_i$, donc $\forall i \in I, u + v \in F_i$. Donc $u + v \in F$
- F est stable par $\cdot$:

  Soient $u \in F, \lambda \in \mathbb{K}$. Alors $\forall i \in I, u \in F_i$, donc $\forall i \in I, \lambda \cdot u \in F_i$, donc $\lambda \cdot u \in F$.

C) Définitions équivalentes

Proposition :

Soit $F \subset E$. Alors :

$$F \text{ est un sev de } E \iff \begin{cases} 0_E \in F & (0) \\ \forall u, v \in F, u + v \in F & (1) \\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in F, \lambda \cdot u \in F & (2) \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 0_E \in F & (0) \\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall u, v \in F, \alpha \cdot u + \beta \cdot v \in F & (3) \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 0_E \in F & (0) \\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u, v \in F, u + \lambda \cdot v \in F & (3b) \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 0_E \in F & (0) \\ F \text{ est stable par combinaison linéaire} & (3c) \end{cases} \tag{8.18}$$

Pour (3c) : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (u_1, u_2, \dots u_n) \in F^n, \forall (\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot u_i \in F$.

Démonstration :

- (1) et (2) $\implies$ (3) : évident.
- (3) $\implies$ (3b) : immédiat.
- (3) $\implies$ (3c) : immédiat par récurrence.
- (3c) $\implies$ (3) : cas particulier.
- (3b) et (0) $\implies$ (1) et (2) :

  Si on a (3b) et (0), on applique (3b) avec $u = 0_E$ et on obtient (2), puis (3b) avec $\lambda = 1$ et on obtient (1).

D'où toutes les équivalences.

De plus, on peut partout remplacer (0) par (0b) : « $F \neq \varnothing$ ».

D) Sous-espace vectoriel engendré par une partie

Définition :

Soit $A \subset E$. Le sous-espace vectoriel engendré par A, noté $\text{Vect}(A)$, est le plus petit des sous-espaces vectoriels de E contenant A.

Justification :

L'ensemble $\mathscr{E}$ des sous-espaces vectoriels de E contenant A n'est pas vide, puisqu'il contient E, et l'intersection $\bigcap_{X\in\mathscr{E}} X$ est un sous-espace vectoriel de E contenant A, et est contenu dans chaque X de $\mathscr{E}$, c'est donc bien le plus petit élément de $\mathscr{E}$.

Proposition :

- $\text{Vect}(\varnothing) = \{0_E\}$
- Si $u \in E\backslash\{0_E\}$, $\text{Vect}(\{u\}) = \{\lambda \cdot u, \lambda \in \mathbb{K}\}$, noté aussi $\text{Vect}(u)$.
- A est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $\text{Vect}(A) = A$.
- Si F est un sous-espace vectoriel de E, et si $A \subset F$, alors $\text{Vect}(A) \subset F$
(En effet, $F \in \mathscr{E}$ et $\text{Vect}(A) = \min_{X\in\mathscr{E}}\{X\}$)
- Si $A \subset B$, alors $\text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(B)$
($A \subset B \subset \text{Vect}(B)$, donc $A \subset \text{Vect}(B)$, donc $\text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(B)$ d'après le point précédent)

Cas particulier (Sous-espace vectoriel engendré par une partie finie) :

Soient $u_1, u_2, \dots u_n$ des vecteurs de E.

Alors $\text{Vect}(\{u_1, u_2, \dots u_n\})$, plutôt noté $\text{Vect}(u_1, u_2, \dots u_n)$, est appelé le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $(u_1, u_2, \dots u_n)$ ou « par les u_i ».

Proposition :

$\text{Vect}(u_1, u_2, \dots u_n)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des u_i, c'est-à-dire :

$$\{\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n, (\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n) \in \mathbb{K}^n\} \tag{8.19}$$

Démonstration :

Notons $C(u_1, u_2, \dots u_n) = \{\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n, (\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n) \in \mathbb{K}^n\}$.

Alors $C(u_1, u_2, \dots u_n)$ contient 0_E et est stable par $+$ et $\cdot$, car

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i + \sum_{i=1}^{n} \lambda'_i u_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \lambda'_i) u_i \tag{8.20}$$

et

$$\lambda \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda\lambda_i u_i. \tag{8.21}$$

Donc $C(u_1, u_2, \dots u_n)$ est un sous-espace vectoriel de E contenant les u_i, et c'est le plus petit car si un sous-espace vectoriel de E contient les u_i, il en contient alors toutes les combinaisons linéaires. Donc $\text{Vect}(u_1, u_2, \dots u_n) = C(u_1, u_2, \dots u_n)$.

Vocabulaire :

- Si F est le sous-espace vectoriel engendré par une famille (finie) $\mathscr{F} = (u_1, u_2, \dots u_n)$ de vecteurs de E, on dit que $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de F.

- Si un espace vectoriel E admet une famille génératrice finie, on dit que E est de type fini.

Exemple :

- $\mathbb{K}^n$ est de type fini, une famille génératrice étant $[(1,0,\dots 0),(0,1,0,\dots,0),\dots,(0,0,\dots,1)]$.
- $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de type fini. En effet, supposons qu'il admette une famille génératrice finie $(P_1,P_2,\dots P_m)$; si on prend $N=\max_{i\in[\![1,m]\!]}\deg(P_i)$, on aurait alors $\forall P\in\mathbb{K}[X], \deg P\leqslant N$, ce qui est faux.

Propriété :

Pour tout $(u_1,u_2,\dots u_m)\in E^m$, on a :

- Pour tous $i,j\in[\![1,m]\!]$ avec $i\neq j$,

$$\mathrm{Vect}(u_1,u_2,\dots,u_i,\dots,u_j,\dots,u_m)=\mathrm{Vect}(u_1,u_2,\dots,u_j,\dots,u_i,\dots,u_m). \tag{8.22}$$

- Pour tout $i\in[\![1,m]\!]$ et tout $a\in\mathbb{K}\{0\}$,

$$\mathrm{Vect}(u_1,u_2,\dots,au_i,\dots,u_m)=\mathrm{Vect}(u_1,u_2,\dots,u_i,\dots,u_m). \tag{8.23}$$

- Pour tout $i,j\in[\![1,m]\!]$ distincts et tout $\lambda\in\mathbb{K}$,

$$\mathrm{Vect}(u_1,u_2,\dots,u_i+\lambda u_j,\dots,u_m)=\mathrm{Vect}(u_1,u_2,\dots,u_i,\dots,u_m) \tag{8.24}$$

Démonstration (du 3e point) :

Soit $w\in\mathrm{Vect}(\underbrace{u_1}_{u'_1},\underbrace{u_2}_{u'_2},\dots,\underbrace{u_i+\lambda u_j}_{u'_i},\dots,\underbrace{u_m}_{u'_m})$. Alors

$$w=\sum_{k=1}^m\lambda_k u'_k=\sum_{k\neq i}\lambda_k u_k+\lambda_i(u_i+\lambda u_j)=\sum_{k=1}^m\mu_k u_k, \tag{8.25}$$

avec

$$\mu_k=\begin{cases}\lambda_k & \text{si } k\neq j\\ \lambda_j+\lambda\lambda_i & \text{si } k=j\end{cases}. \tag{8.26}$$

L'autre inclusion est analogue.

On a donc un algorithme pour déterminer le Vect (sur un exemple) :

$$\begin{aligned}\mathrm{Vect}[(1,2,3,4),(4,6,0,2),(1,4,9,2)]&=\mathrm{Vect}[(1,2,3,4),\underbrace{(0,-2,-12,-14)}_{u_2-4u_1},\underbrace{(0,2,6,-2)}_{u_3-u_1}]\\&=\mathrm{Vect}[(1,2,3,4),(0,1,3,-1),(0,0,-6,-16)]\\&=\mathrm{Vect}[(1,2,3,4),(0,1,3,-1),(0,0,3,8)]\\&=\mathrm{Vect}[(1,2,0,-4),(0,1,0,-9),(0,0,3,8)]\\&=\mathrm{Vect}[(1,0,0,14),(0,1,0,-9),(0,0,3,8)]\\&=\mathrm{Vect}[(1,0,0,14),(0,1,0,-9),(0,0,1,\frac{8}{3})]\\&=\left\{x(1,0,0,14)+y(0,1,0,-9)+z(0,0,1,\frac{8}{3}),x,y,z\in\mathbb{R}\right\}\\&=\left\{(x,y,z,14x-9y+\frac{8}{3}z),x,y,z\in\mathbb{R}\right\}\end{aligned} \tag{8.27}$$

Ainsi, on a l'équivalence : pour tout $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$,

$$(x,y,z,t)\in\mathrm{Vect}[(1,2,3,4),(4,6,0,2),(1,4,9,2)] \iff t=14x-9y+\frac{8}{3}z \tag{8.28}$$

Autres résultats :

- Si $1\leqslant p\leqslant m$, alors $\mathrm{Vect}(u_1,u_2,\dots,u_p)\subset\mathrm{Vect}(u_1,u_2,\dots,u_m)$.
- Pour tout $v\in E$, $v\in\mathrm{Vect}(u_1,u_2,\dots,u_m)\iff\mathrm{Vect}(u_1,u_2,\dots,u_m,v)=\mathrm{Vect}(u_1,u_2,\dots,u_m)$

III Sommes et sommes directes

$(E, +, \cdot)$ désigne ici encore un $\mathbb{K}$-ev.

Définition, proposition :

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. La somme de F et G est :

$$F + G := \{u + v, u \in F, v \in G\} = \{w \in E, \exists (u, v) \in F \times G, w = u + v\} \tag{8.29}$$

Alors $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E, et c'est même $\mathrm{Vect}(F \cup G)$.

Démonstration :

Déjà, $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E, car il contient 0_E et est stable par $+, \cdot$ (évident en utilisant la deuxième égalité de la définition de $F + G$).

De plus, $F + G$ contient F (car tout u de F s'écrit $u + 0_E$ où $0_E \in G$) et G.

Il contient donc $F \cup G$. Enfin, si un sous-espace vectoriel de E contient $F \cup G$, alors il contient au moins $F + G$ car il contient tous les éléments de F, tous les éléments de G et est stable par $+$, donc contient tous les $u + v$ pour $u \in F$ et $v \in G$.

Exemple :

- Dans $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

  Soit F l'ensemble des fonctions polynomiales de degré $\leqslant 3$, G l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ et négligeables devant $x \mapsto x^2$ au voisinage de 0.

  Alors $F + G = \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

  Démonstration :

  Une première implication est déjà évidente. Pour l'autre :

  Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Alors f admet un DL à l'ordre 2 en 0 :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \underbrace{a_0 + a_1 x + a_2 x^2}_{P(x)} + \underbrace{x^2 \varepsilon(x)}_{h(x)}. \tag{8.30}$$

  Alors h est de classe $\mathcal{C}^2$ car $h = f - P$, et de plus $h = o(x^2)$ en 0, d'où l'autre inclusion et l'égalité.

- Dans $\mathbb{R}^4$:

  $F = \mathrm{Vect}((1, 2, 0, 0)), G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x - z = y - t = 0\}$. Alors $G = \{(x, y, x, y), x, y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1))$, et donc $F + G = \mathrm{Vect}((1, 2, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1))$.

Définition (Somme directe) :

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

On dit que la somme $F + G$ est directe lorsque tout élément de $F + G$ s'écrit de manière unique sous la forme $u + v$ avec $u \in F$ et $v \in G$.

Autrement dit, étant donné qu'on connaît déjà l'existence (par définition) de l'écriture, la définition devient :

$$\begin{aligned} \text{La somme de } F \text{ et } G \text{ est directe } \iff & \forall (u, v) \in F \times G, \forall (u', v') \in F \times G, \\ & (u + v = u' + v' \implies u = u' \text{ et } v = v') \end{aligned} \tag{8.31}$$

Exemple :

La somme de deux droites vectorielles distinctes dans $\mathbb{R}^2$.

Proposition :
On a l'équivalence entre les propositions suivantes :

1. La somme de F et G est directe (expression de la définition précédente)
2. $\forall(u,v)\in F\times G, (u+v=0_E \implies u=0_E \text{ et } v=0_E)$.
3. $F\cap G=\{0_E\}$

$((1) : \forall(u,v)\in F\times G, \forall(u',v')\in F\times G, (u+v=u'+v' \implies u=u' \text{ et } v=v'))$

Démonstration :

- On voit déjà que $(1) \implies (2)$
  (c'est un cas particulier avec $(u',v')=(0_E,0_E)$)
- Montrons que $(2) \implies (3)$. Supposons (2) :
  Soit alors $w\in F\cap G$. On a : $w+(-w)=0_E$. Or, $w\in F$ et $-w\in G$ (car $w\in G$ et G est stable par $-$).
  Donc, d'après (2), $w=0_E$ (et $-w=0_E$), d'où une inclusion et l'égalité.
- Montrons que $(3) \implies (1)$. Supposons (3) :
  Soient $(u,v)\in F\times G, (u',v')\in F\times G$. Supposons que $u+v=u'+v'$.
  Alors $u-u'=v'-v$, et $u-u'\in F, v'-v\in G$, donc $u-u'\in F\cap G, v'-v\in F\cap G$.
  Donc $u-u'=0_E$ et $v'-v=0_E$, c'est-à-dire $u=u'$ et $v=v'$.

D'où les équivalences.

Notation :
Si la somme de F et G est directe, on peut la noter $F\oplus G$.

Définition :
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont supplémentaires dans E lorsque :

$$\begin{cases} F+G=E \\ F\cap G=\{0_E\} \end{cases} \tag{8.32}$$

Ainsi, lorsque F et G sont supplémentaires dans E, on peut noter $E=F\oplus G$.
Deux sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si tout élément de E s'écrit de manière unique $u+v$, où $u\in F$ et $v\in G$.

IV Applications linéaires

Dans cette section, E, F et G sont trois $\mathbb{K}$-ev.

A) Définition

Définition :
Soit $\varphi\colon E\to F$. On dit que φ est linéaire/un morphisme du $\mathbb{K}$-ev E vers le $\mathbb{K}$-ev F lorsque :

$$\forall u,u'\in E, \varphi(u+u')=\varphi(u)+\varphi(u') \tag{8.33}$$

$$\forall u\in E, \forall\lambda\in\mathbb{K}, \varphi(\lambda\cdot u)=\lambda\cdot\varphi(u) \tag{8.34}$$

Proposition :
Si φ est une application linéaire de E dans F, alors φ est un morphisme du groupe $(E,+)$ vers $(F,+)$.

Vocabulaire :

- L'ensemble des applications linéaires de E vers F est noté $\mathscr{L}(E,F)$
- Une application linéaire de E vers E s'appelle aussi un endomorphisme de E, et $\mathscr{L}(E,E)$ est plutôt noté $\mathscr{L}(E)$.
- Une application linéaire de E vers $\mathbb{K}$ s'appelle forme linéaire de E. $\mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ est noté E^*. L'ensemble des formes linéaires de E s'appelle le dual de E.

Caractérisation :
Soit $\varphi\colon E \to F$. On a les équivalences :

$$\begin{aligned}\varphi \in \mathscr{L}(E,F)(1) &\iff \forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2, \forall(u,u')\in E^2, \varphi(\alpha.u+\beta.u') = \alpha.\varphi(u)+\beta.\varphi(u')(2)\\ &\iff \forall\lambda\in\mathbb{K}, \forall(u,u')\in E^2, \varphi(u+\lambda.u') = \varphi(u)+\lambda.\varphi(u')(3)\end{aligned} \tag{8.35}$$

Démonstration :
(1) $\implies$ (2) $\implies$ (3) : évident.

Montrons que (3) $\implies$ (1). On applique (3) avec $\lambda = 1$. Donc

$$\forall(u,u')\in E^2, \varphi(u+u') = \varphi(u)+\varphi(u'). \tag{8.36}$$

Donc avec $(u,u') = (0_E, 0_E)$, $\varphi(0_E) = 0_F$. Donc

$$\forall\lambda\in\mathbb{K}, \forall u\in E, \varphi(0_E+\lambda\cdot u) = \varphi(0_E)+\lambda\cdot\varphi(u) = 0_F+\lambda\cdot\varphi(u) = \lambda\cdot\varphi(u) \tag{8.37}$$

Exemple :

- L'application nulle de E dans F est linéaire.
- L'application identité de E dans E est linéaire.
- Les applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont exactement les applications de la forme $x \mapsto a\cdot x$ où $a\in\mathbb{R}$:
  Démonstration :
  - ◇ Déjà, si f est de la forme $f\colon x\mapsto a\cdot x$, alors f est linéaire, car

  $$\forall\lambda\in\mathbb{R}, \forall x,x'\in\mathbb{R}, f(x+\lambda.x') = a(x+\lambda.x') = ax+\lambda.(ax') = f(x)+\lambda.f(x') \tag{8.38}$$

  - ◇ Inversement, soit $f\in\mathscr{L}(\mathbb{R})$. Alors, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x) = f(x.1) = x.f(1)$.
    Ainsi, avec $a = f(1)$, on a bien $\forall x\in\mathbb{R}, f(x) = a.x$.
- L'application $D\colon \begin{array}{ccc}\mathcal{D}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})\\ f & \longmapsto & f'\end{array}$ est linéaire.
- L'application $\begin{array}{ccc}S_C(\mathbb{N},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ u & \longmapsto & \lim(u)\end{array}$ est une forme linéaire de $S_C(\mathbb{N},\mathbb{R})$, où $S_C(\mathbb{N},\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des suites convergentes.
- L'application $\psi\colon \begin{array}{ccc}\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ f & \longmapsto & f(\pi)\end{array}$ est linéaire :
  Démonstration :
  - ◇ Pour tous $f,g\in\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\psi(f+g) = (f+g)(\pi) = f(\pi)+g(\pi) = \psi(f)+\psi(g)$.

◇ Pour tout $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\psi(\lambda.f) = (\lambda.f)(\pi) = \lambda.f(\pi) = \lambda.\psi(f)$.

- L'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & xy \end{array}$ n'est pas linéaire.

  Mais, à x fixé, $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & xy \end{array}$ est linéaire (idem si y est fixé).

  On dit alors que $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & xy \end{array}$ est bilinéaire.

B) Noyau et image

Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E,F)$.

Définition, proposition :

Le noyau de φ, c'est le noyau du morphisme de groupe :

$$\ker\varphi = \{x \in E, \varphi(x) = 0_E\}. \tag{8.39}$$

Alors $\forall u, u' \in E, (\varphi(u) = \varphi(u') \iff u - u' \in \ker\varphi)$.

Donc φ est injective $\iff \ker\varphi = \{0_E\}$.

Démonstration :

- Si φ est injective :

  Soit $u \in \ker\varphi$. Alors $\varphi(u) = 0_F = \varphi(0_E)$. Donc $u = 0_E$.

  D'où une première inclusion, et l'égalité, l'autre inclusion étant évidente.

- Supposons maintenant que $\ker\varphi = \{0_E\}$.

  Si $\varphi(u) = \varphi(u')$, alors $u - u' \in \ker\varphi$, donc $u - u' = 0_E$. Donc $u = u'$.

  Donc φ est injective.

Proposition :

$\ker\varphi$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration :

Déjà, $\ker\varphi \subset E$, et $0_E \in \ker\varphi$.

Soient $u, u' \in E, \lambda \in K$. On a :

$$\varphi(u + \lambda.u') = \varphi(u) + \lambda.\varphi(u') = 0_F + \lambda.0_F = 0_F \tag{8.40}$$

Définition, proposition :

L'image de φ est

$$\operatorname{Im}\varphi = \varphi(E) = \{\varphi(u), u \in E\} = \{v \in F, \exists u \in E, \varphi(u) = v\}. \tag{8.41}$$

Alors φ est surjective si et seulement si $\operatorname{Im}\varphi = F$.

Proposition :

$\operatorname{Im}\varphi$ est un sous-espace vectoriel de F.

Démonstration :

Déjà, $\operatorname{Im}\varphi \subset F$ et $0_F \in \operatorname{Im}\varphi$ car $\varphi(0_E) = 0_F$.

$\operatorname{Im}\varphi$ est stable par $+$ et $\cdot$:

Soient $v, v' \in \operatorname{Im}\varphi, \lambda \in \mathbb{K}$.

Il existe alors $u, u' \in E$ tels que $v = \varphi(u)$, $v' = \varphi(u')$.

Alors $v + \lambda.v' = \varphi(u) + \lambda.\varphi(u') = \varphi(u + \lambda.u')$. Donc $v + \lambda.v' \in \operatorname{Im}\varphi$.

C) Image directe, image réciproque d'un sous-espace vectoriel

Proposition :

Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E, F)$.

- L'image directe par φ d'un sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de F.
- L'image réciproque par φ d'un sous-espace vectoriel de F est un sous-espace vectoriel de E.

Cas particulier :

- $\varphi(E)$ est un sous-espace vectoriel de F (c'est $\operatorname{Im}\varphi$).
- $\varphi^{-1}(\{0_F\})$ est un sous-espace vectoriel de E (c'est $\ker\varphi$).

(On adapte aisément la démonstration de ces cas particuliers pour le cas général de la proposition)

D) Structure sur des ensembles d'applications linéaires

1) Somme, produit par un réel

Définition, proposition :

Soient $\varphi, \psi \in \mathscr{L}(E, F)$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

On définit :

$$\begin{array}{rrcl} \varphi + \psi \colon & E & \longrightarrow & F \\ & u & \longmapsto & \varphi(u) + \psi(u) \end{array} \tag{8.42}$$

et

$$\begin{array}{rrcl} \lambda.\varphi \colon & E & \longrightarrow & F \\ & u & \longmapsto & \lambda.\varphi(u) \end{array} . \tag{8.43}$$

Alors $\varphi + \psi, \lambda.\varphi \in \mathscr{L}(E, F)$.

On peut donc considérer $(\mathscr{L}(E, F), +, \cdot)$, et $(\mathscr{L}(E, F), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-ev (et même un sous-espace vectoriel de $(\mathscr{F}(E, F), +, \cdot)$).

Démonstration :

Déjà, on vérifie que $(\mathscr{F}(E, F), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-ev...

$\mathscr{L}(E, F)$ est une partie de $\mathscr{F}(E, F)$, contient $x \mapsto 0_F$ et est stable par $+$ et $\cdot$:

Soient $\varphi, \psi \in \mathscr{L}(E, F)$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

On a, pour tous $u, u' \in E$ et tout $\mu \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} (\varphi + \psi)(u + \mu.u') &= \varphi(u + \mu.u') + \psi(u + \mu.u') \\ &= \varphi(u) + \mu.\varphi(u') + \psi(u) + \mu.\psi(u') \\ &= (\varphi + \psi)(u) + \mu.(\varphi + \psi)(u') \end{aligned} \tag{8.44}$$

et

$$\begin{aligned}(\lambda.\varphi)(u+\mu.u') &= \lambda.\varphi(u+\mu.u') \\ &= \lambda.(\varphi(u)+\mu.\varphi(u')) \\ &= \lambda.(\varphi(u))+\lambda.(\mu.\varphi(u')) \\ &= (\lambda.\varphi)(u)+\mu.((\lambda.\varphi)(u'))\end{aligned} \tag{8.45}$$

Donc $\varphi+\psi, \lambda.\varphi \in \mathscr{L}(E,F)$, et $\mathscr{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathscr{F}(E,F),+,\cdot)$, donc un $\mathbb{K}$-ev.

2) Composition

Proposition :
La composée, quand elle est définie, de deux applications linéaires est linéaire.

Démonstration :
Soient $\varphi \in \mathscr{L}(E,F)$ et $\psi \in \mathscr{L}(F,G)$. Alors $\psi\circ\varphi$ est bien définie et va de E dans G. Et de plus, elle est linéaire :
Pour tous $u,u' \in E$ et tout $\mu \in \mathbb{K}$, on a :

$$\begin{aligned}(\psi\circ\varphi)(u+\mu.u') &= \psi(\varphi(u+\mu.u')) \\ &= \psi(\varphi(u)+\mu.\varphi(u')) \\ &= \psi(\varphi(u))+\mu.\psi(\varphi(u')) \\ &= (\psi\circ\varphi)(u)+\mu.(\psi\circ\varphi)(u')\end{aligned} \tag{8.46}$$

Propriété :
Pour tous $\varphi,\varphi' \in \mathscr{L}(E,F)$, $\psi,\psi' \in \mathscr{L}(F,G)$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

1. $\psi\circ(\varphi+\varphi') = \psi\circ\varphi+\psi\circ\varphi'$
2. $(\psi+\psi')\circ\varphi = \psi\circ\varphi+\psi'\circ\varphi$
3. $\psi\circ(\lambda.\varphi) = \lambda.(\psi\circ\varphi)$
4. $(\lambda.\psi)\circ\varphi = \lambda.(\psi\circ\varphi)$

Démonstration :
Déjà, les applications sont bien définies et vont de E dans G.
De plus, pour tout $u \in E$:

- $$\begin{aligned}[\psi\circ(\varphi+\varphi')](u) &= \psi[(\varphi+\varphi')(u)] \\ &= \psi[\varphi(u)+\varphi'(u)] \\ &= \psi(\varphi(u))+\psi(\varphi'(u)) \\ &= (\psi\circ\varphi)(u)+(\psi\circ\varphi')(u) \\ &= [\psi\circ\varphi+\psi\circ\varphi'](u),\end{aligned} \tag{8.47}$$

  d'où (1).

- $$\begin{aligned}[(\psi+\psi')\circ\varphi](u) &= (\psi+\psi')(\varphi(u)) \\ &= \psi(\varphi(u))+\psi'(\varphi(u)) \\ &= (\psi\circ\varphi)(u)+(\psi'\circ\varphi)(u) \\ &= [\psi\circ\varphi+\psi'\circ\varphi](u),\end{aligned} \tag{8.48}$$

  d'où (2) (ici, on n'a pas utilisé la linéarité…)

- $$\begin{aligned}[\psi\circ(\lambda.\varphi)](u) &= \psi[(\lambda.\varphi)(u)] \\ &= \psi[\lambda.\varphi(u)] \\ &= \lambda.\psi(\varphi(u)) \\ &= \lambda.(\psi\circ\varphi)(u) \\ &= [\lambda.(\psi\circ\varphi)](u),\end{aligned} \tag{8.49}$$

  d'où (3)

- $$\begin{aligned}[(\lambda.\psi)\circ\varphi](u) &= (\lambda.\psi)(\varphi(u)) \\ &= \lambda.(\psi(\varphi(u)) \\ &= \lambda.(\psi\circ\varphi)(u) \\ &= [\lambda.(\psi\circ\varphi)](u),\end{aligned} \tag{8.50}$$

  d'où (4) (on n'a pas non plus utilisé la linéarité)

Conséquence :

$\circ$ définit une loi de composition interne sur $\mathscr{L}(E)$, et $(\mathscr{L}(E),+,\circ)$ est un anneau :
$(\mathscr{L}(E),+)$ est un groupe commutatif (car $(\mathscr{L}(E),+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-ev).
De plus, il résulte de (1) et (2) que $\circ$ est distributive sur $+$, et on sait que $\circ$ est associative (vrai dans $\mathscr{F}(E,E)$).
Enfin, il y a un neutre, à savoir Id_E.

Attention, l'anneau n'est ni commutatif ni intègre en général.

Exemple :

$$f\colon \begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x,x)\end{array}, \qquad g\colon \begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x-y,0)\end{array}. \tag{8.51}$$

Alors $f\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$:
Soient $u,u'\in\mathbb{R}^2,\lambda\in\mathbb{R}$, $u=(x,y)$, $u'=(x',y')$. Alors :

$$\begin{aligned}f(u+\lambda.u') &= f((x,y)+\lambda.(x',y')) \\ &= f(x+\lambda.x',y+\lambda.y') \\ &= (x+\lambda.x',x+\lambda.x') \\ &= (x,x)+\lambda.(x',x') \\ &= f(u)+\lambda.f(u').\end{aligned} \tag{8.52}$$

Et $g \in \mathscr{L}(R^2)$:

Soient $u, u' \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{R}$, $u = (x, y)$, $u' = (x', y')$. Alors :

$$\begin{aligned} g(u + \lambda.u') &= g((x, y) + \lambda.(x', y')) \\ &= g(x + \lambda.x', y + \lambda.y') \\ &= (x + \lambda.x' - (y + \lambda.y'), 0) \\ &= (x - y, 0) + \lambda.(x' - y', 0) \\ &= g(u) + \lambda.g(u'). \end{aligned} \tag{8.53}$$

On a alors :

$$f \circ g\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x - y, x - y) \end{array}, \qquad g \circ f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (0, 0) \end{array}, \tag{8.54}$$

ce qui montre la non commutativité et la non intégrité.

3) Inversion (éventuelle)

Proposition :

Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E, F)$. Si φ est bijective, alors $\varphi^{-1} \in \mathscr{L}(F, E)$. On dit alors que φ est un isomorphisme de E vers F.

Définition :

Deux espaces vectoriels sont dis isomorphes lorsqu'il existe un isomorphisme de l'un vers l'autre.

Démonstration :

Soient $v, v' \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

On doit montrer que

$$\varphi^{-1}(v + \lambda.v') = \varphi^{-1}(v) + \lambda.\varphi^{-1}(v'), \tag{8.55}$$

c'est-à-dire que $v + \lambda.v'$ a pour antécédent $\varphi^{-1}(v) + \lambda.\varphi^{-1}(v')$ par φ, ce qui est vrai car

$$\varphi(\varphi^{-1}(v) + \lambda.\varphi^{-1}(v')) = \varphi(\varphi^{-1}(v)) + \lambda.\varphi(\varphi^{-1}(v')) = v + \lambda.v'. \tag{8.56}$$

Vocabulaire :

Un automorphisme de E est une application linéaire bijective de E dans E, ou autrement dit un isomorphisme de E dans E ou encore un endomorphisme bijectif de E.

L'ensemble des automorphismes de E est noté $\mathscr{GL}(E)$.

Alors $\mathscr{GL}(E)$ est stable par $\circ$, et $(\mathscr{GL}(E), \circ)$ est un groupe (le groupe linéaire de E). C'est le groupe des éléments inversibles de l'anneau $(\mathscr{L}(E), +, \circ)$.

Attention, ce groupe n'est pas non plus commutatif en général.

Exemple :

On considère les deux fonctions

$$f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x + y, x - y) \end{array}, \qquad g\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (y, x) \end{array}. \tag{8.57}$$

Alors f et g sont linéaires et bijectives. (g est bijective car involutive, et $f \circ f = 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$, donc $f^{-1} = \frac{1}{2}f$), et :

$$f \circ g\colon (x, y) \mapsto (y + x, y - x), \qquad g \circ f\colon (x, y) \mapsto (x - y, x + y), \tag{8.58}$$

donc $g \circ f \neq f \circ g$ car
$$g \circ f(1,1) = (0,2) \neq f \circ g(1,1) = (2,0) \tag{8.59}$$

4) Autre opération

Proposition :
Soit f une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$ (une forme linéaire de E). Soit $w_0 \in F$. Alors l'application
$$\begin{array}{rccc} \varphi\colon & E & \longrightarrow & F \\ & u & \longmapsto & f(u).w_0 \end{array} \tag{8.60}$$
est linéaire.

Démonstration :
Soient $u, v \in E, \lambda \in \mathbb{K}$. Alors :
$$\varphi(u+\lambda.v) = f(u+\lambda.v).w_0 = f(u).w_0 + \lambda.f(v).w_0 = \varphi(u) + \lambda.\varphi(v) \tag{8.61}$$

Exemple :
L'application $\begin{array}{rccc} P_1\colon & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & x \end{array}$ est linéaire :
Pour tous $u = (x,y,z), u' = (x',y',z') \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :
$$P_1(u+\lambda.u') = P_1((x+\lambda.x', y+\lambda.y', z+\lambda.z')) = x+\lambda.x' = P_1(u) + \lambda.P_1(u'). \tag{8.62}$$
P_1 est la « première projection canonique de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}$ ».
De même, $\begin{array}{rccc} P_1\colon & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & y \end{array}$ et $\begin{array}{rccc} P_3\colon & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & z \end{array}$ sont linéaires.

- Il résulte de 4 que pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}$,
$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & a.x+b.y+c.z \end{array} \tag{8.63}$$
est linéaire, car $f = aP_1 + bP_2 + cP_3$.
- Et de 14 que pour tout $a, b, c \in \mathbb{R}$,
$$\begin{array}{rccc} f_1\colon & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (a.x+b.y+c.z, 0) \end{array} \tag{8.64}$$
est linéaire, car $f_1 = f.(1,0)$:
$$\begin{array}{rccc} f_1\colon & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & u & \longmapsto & f(u).(1,0) \end{array} \tag{8.65}$$
De même,
$$\begin{array}{rccc} f_1\colon & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (0, a'.x+b'.y+c'.z, 0) \end{array}, \tag{8.66}$$
d'où
$$\begin{array}{rccc} F\colon & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (a.x+b.y+c.z, a'.x+b'.y+c'.z, 0) \end{array} \tag{8.67}$$
est linéaire.

On verra que toutes les applications de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ sont de ce type. (On peut généraliser le résultat à $\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p$)

V Quelques endomorphismes intéressants

E désigne toujours un $\mathbb{K}$-ev.

A) Homothétie (vectorielle)

Définition :

Une homothétie de E est une application du type :

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ u & \longmapsto & \alpha.u \end{array}, \tag{8.68}$$

où $\alpha \in \mathbb{K}$.

Proposition :

Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, l'application

$$f_\alpha \colon \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ u & \longmapsto & \alpha.u \end{array}, \tag{8.69}$$

appelée homothétie de rapport α est linéaire. Elle est nulle si $\alpha = 0$, sinon elle est bijective, d'inverse $f_{1/\alpha}$

B) Projecteurs (vectoriels)

Définition :

Soient F, G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Le projecteur sur F selon G est l'application

$$p \colon \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ u & \longmapsto & v \end{array}, \tag{8.70}$$

où v est l'élément de E tel que $u = v + w$ avec $v \in F, w \in G$. (La définition a bien un sens, car tout élément de E s'écrit $v + w$ de manière unique avec $v \in F$ et $w \in G$).

On écrit parfois

$$p \colon \begin{array}{ccc} E = F \oplus G & \longrightarrow & E \\ u = v + w & \longmapsto & v \end{array}. \tag{8.71}$$

Proposition :

L'application p est linéaire, de noyau G et d'image F.

Démonstration :

Soient $u, u' \in E, \lambda \in \mathbb{K}$. Alors $u = \underbrace{v}_{\in F} + \underbrace{w}_{\in G}$, $u' = \underbrace{v'}_{\in F} + \underbrace{w'}_{\in G}$.

Donc $u + \lambda.u' = \underbrace{v + \lambda.v'}_{\in F} + \underbrace{w + \lambda.w'}_{\in G}$, soit $p(u + \lambda.u') = v + \lambda.v' = p(u) + \lambda.p(u')$.

Noyau : Soit $u \in E$, $u = \underbrace{v}_{\in F} + \underbrace{w}_{\in G}$. On a les équivalences :

$$u \in \ker p \iff p(u) = 0_E \iff v = 0_E \iff u \in G \tag{8.72}$$

Image : On voit déjà que $\mathrm{Im}\, p \subset F$. Inversement, $F \subset \mathrm{Im}\, p$ car tout élément v de F est l'image d'un élément de E, par exemple lui-même.

Définition :

Soit $f : E \to E$. On dit que f est un projecteur lorsqu'il existe deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E tels que f est le projecteur sur F selon G.

Vocabulaire :

p est le projecteur sur F selon G.

Pour $u \in E$, $p(u)$ est la projection de u sur F selon G.

Théorème :

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Alors f est un projecteur si et seulement si $f \circ f = f$.

Démonstration :

Soit f un projecteur, disons sur F selon G où $F \oplus G = E$.

Alors $f^2 = f$:

Soit $u \in E$, $u = \underbrace{v}_{\in F} + \underbrace{w}_{\in G}$, et $f(u) = v$.

De plus, $f \circ f(u) = f(f(u)) = f(v) = v = f(u)$.

C'est valable pour tout u, donc $f^2 = f$.

Soit $f \in L(E)$, supposons que $f \circ f = f$.

Posons $F = \mathrm{Im}\, f$ et $G = \ker f$.

Alors déjà F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E. Montrons qu'ils sont supplémentaires.

Soit $u \in E$. Alors $f(u) \in F$, et on a :

$$u = \underbrace{f(u)}_{\in F} + u - f(u), \tag{8.73}$$

$$f(u - f(u)) = f(u) - f(f(u)) = 0_E, \tag{8.74}$$

donc $u - f(u) \in G$.

Donc déjà $F + G = E$.

Montrons maintenant que $F \cap G = \{0_E\}$:

Soit $u \in F \cap G$.

On a $u \in F$, donc $u = f(u')$ où $u' \in E$.

Comme $u \in G$, $f(u) = 0_E$, soit $f(f(u')) = 0_E$. Comme $f^2 = f$, $f(u') = 0_E$.

Donc $u = f(u') = 0_E$, d'où une première inclusion, et l'égalité, l'autre inclusion étant évidente.

Donc $F \oplus G = E$.

Montrons maintenant que f est le projecteur sur F selon G :

Soit $u \in E$. Alors $u = \underbrace{f(u)}_{\in F} + \underbrace{(u - f(u))}_{\in G}$. Donc $f(u)$ est la composante selon F dans la décomposition de u sous la forme $\underbrace{v}_{\in F} + \underbrace{w}_{\in G}$

Remarque :

Si p est le projecteur sur F selon G, alors :

$$\begin{aligned} F &= \{u \in E, p(u) = u\} \\ &= \text{ ensemble des invariants par } p \\ &= \ker(p - \mathrm{Id}_E) \end{aligned} \tag{8.75}$$

Démonstration :

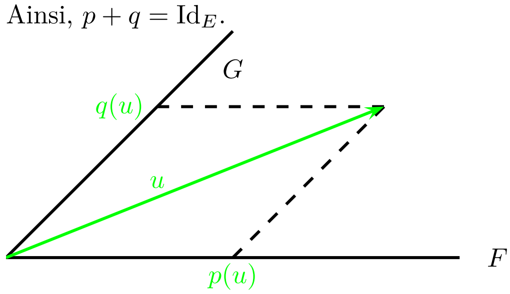
$$\underbrace{p(u) = u}_{(p-\mathrm{Id}_E)(u)=0_E} \iff v = u \iff w = 0 \iff u \in F \tag{8.76}$$

Définition :

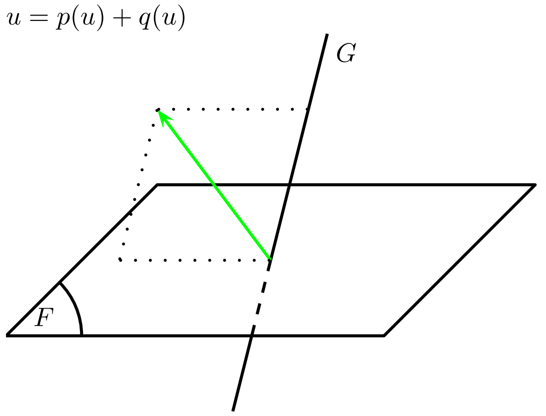
Soit p la projection sur F selon G.

Le projecteur associé à p est le projecteur q sur G selon F.

Ainsi, $p + q = \mathrm{Id}_E$.



$u = p(u) + q(u)$



Cas particulier :

Le projecteur sur E selon $\{0_E\}$ est l'identité sur E.

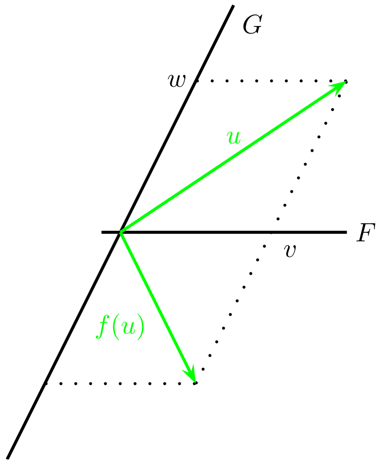
Le projecteur sur $\{0_E\}$ selon E est l'application nulle.

C) Symétries (vectorielles)

Définition :

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires. La symétrie par rapport à F selon G est l'application

$$\begin{array}{rccc} f\colon & E=F\oplus G & \longrightarrow & E \\ & u=v+w & \longmapsto & v-w \end{array}. \tag{8.77}$$



Proposition :

Si f est le symétrique par rapport à F selon G, alors :

- $f \in \mathscr{L}(E)$.
  En effet, on remarque que $f = p - q = 2p - \mathrm{Id}_E$, où p est le projecteur sur F selon G et q le projecteur associé à p.
- f est bijective, et même involutive.
  Ainsi, $f \circ f = \mathrm{Id}_E$, $\operatorname{Im} f = E$ (car f est surjective), et $\ker f = \{0_E\}$ (car f est injective).
- $F = \{u \in E, f(u) = u\} = \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, $\quad G = \{u \in E, f(u) = -u\} = \ker(f + \mathrm{Id}_E)$.

Théorème :

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

Alors f est une symétrie si et seulement si $f \circ f = \mathrm{Id}_E$ c'est-à-dire si et seulement si f est involutive, ou encore si et seulement si f est élément d'ordre $\leqslant 2$ du groupe $\mathscr{GL}(E)$

Démonstration :

L'implication $\Longrightarrow$ a déjà été vue.

$\Longleftarrow$: supposons que $f^2 = \mathrm{Id}_E$.

Posons $F = \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $G = \ker(f + \mathrm{Id}_E)$.

Alors F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, car ce sont des noyaux d'endomorphismes de E.

$F \cap G = \{0_E\}$ car si $u \in F \cap G$, alors $f(u) = u$ et $f(u) = -u$, donc $2.u = 0_E$, soit $u = 0_E$ (car $2 \neq 0$)

De plus tout élément u de E s'écrit $u = \underbrace{v}_{\in F} + \underbrace{w}_{\in G}$, car $u = \frac{1}{2}(u + f(u)) + \frac{1}{2}(u - f(u))$.

Or, $u + f(u) \in F$ car $f(\underbrace{u + f(u)}_{x}) = f(u) + f(f(u)) = f(u) + u = \underbrace{u + f(u)}_{x}$.

Et $u - f(u) \in G$ car $f(u - f(u)) = f(u) - f(f(u)) = f(u) - u = -(u + f(u))$.
Enfin, f est la symétrie par rapport à F selon G. En effet :
Si $u = \underbrace{v}_{\in F} + \underbrace{w}_{\in G}$, on a $v = \frac{1}{2}(u + f(u))$ et $w = \frac{1}{2}(u - f(u))$.
Donc $v - w = f(u)$.

VI Familles libres (finies)

E désigne toujours un $\mathbb{K}$-ev.

A) Définition

Définition :
Soit $\mathscr{F} = (u_1, u_2, \dots u_n)$ une famille de vecteurs de E.
$\mathscr{F}$ est dite libre si la seule combinaison linéaire des u_i qui donne 0_E est celle dont tous les coefficients sont nuls, c'est-à-dire :

$$\forall(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k = 0_E \implies \forall i \in [\![1, n]\!], \lambda_i = 0\right) \tag{8.78}$$

Vocabulaire :

- $(u_1, u_2, \dots u_n)$ est dite liée si $(u_1, u_2, \dots u_n)$ n'est pas libre.
- Lorsque $(u_1, u_2, \dots u_n)$ est liée, une relation du type $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k = 0_E$ où les λ_k sont non tous nuls s'appelle une relation de dépendance linéaire.
- Pour dire que $(u_1, u_2, \dots u_n)$ est libre, on dit parfois que les u_i sont linéairement indépendants.

Exemple :

- Par convention, une famille vide est libre.
- Cas d'une famille de 1 vecteur (u_1).
  La famille (u_1) est libre si et seulement si$u_1 \neq 0_E$.
- Cas d'une famille de 2 vecteurs (u_1, u_2).
  (u_1, u_2) est libre si et seulement si u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires.

B) Propriétés générales

Propriété :

- Si une famille contient 0_E, elle est liée :
  Si $u_i = 0_E$, alors $\underbrace{1}_{\neq 0}.u_i = 0_E$
- Si une famille contient deux vecteurs égaux, elle est liée : Si $u_i = u_j$ (avec $i \neq j$), alors $u_i - u_j = 0_E$
- Si une sous-famille d'une famille $\mathscr{F}$ est liée, alors $\mathscr{F}$ est liée.
- Si $\mathscr{F} = (u_1, u_2, \dots u_n)$ est libre, alors $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, (u_{\sigma(1)}, u_{\sigma(2)}, \dots u_{\sigma(n)})$ est libre.
- Si $(u_1, u_2, \dots u_n)$ est libre et $(u_1, u_2, \dots u_n, v)$ est liée, alors $v \in \text{Vect}(u_1, u_2, \dots u_n)$.

Démonstration :

Il existe $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n, \mu$ scalaires non tous nuls tels que :

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots \lambda_n u_n + \mu.v = 0_E. \tag{8.79}$$

Alors $\mu \neq 0$, car sinon l'un des λ_i au moins serait non nul et on aurait alors une relation de dépendance entre les $u_i, 1 \leqslant i \leqslant n$.

Donc $v = \mu^{-1} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k$

- $(u_1, u_2, \dots u_n)$ est liée si et seulement si l'un au moins des u_i est combinaison linéaire des autres.

VII Bases (finies)

Définition, proposition :

Soit $(u_1, u_2, \dots u_n)$ une famille de vecteurs de E.

$(u_1, u_2, \dots u_n)$ est une base de E si $(u_1, u_2, \dots u_n)$ est une famille libre et génératrice de E.

Une formulation équivalente est que tout vecteur v de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des $u_i, 1 \leqslant i \leqslant n$, sous la forme $\sum_{k=1}^{n} x_k u_k$. Les x_k s'appellent alors les composantes de v dans la base $(u_1, u_2, \dots u_n)$.

Démonstration :

$\Longrightarrow$: supposons que $(u_1, u_2, \dots u_n)$ est une base de E.

Soit alors $v \in E$. Comme $(u_1, u_2, \dots u_n)$ est génératrice de E, il existe $(x_1, x_2, \dots x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $v = \sum_{k=1}^{n} x_k u_k$.

Supposons qu'on ait aussi $v = \sum_{k=1}^{n} x'_k u_k$.

Alors $\sum_{k=1}^{n} (x_k - x'_k) u_k = 0_E$. Comme $(u_1, u_2, \dots u_n)$ est libre, on a $\forall k \in [\![1, n]\!], x_k - x'_k = 0$, soit $\forall k \in [\![1, n]\!], x_k = x'_k$.

D'où l'existence et l'unicité de l'écriture.

$\Longleftarrow$: Supposons que tout vecteur v de E s'écrit de manière unique...

Déjà, $(u_1, u_2, \dots u_n)$ est génératrice de E.

Ensuite, si $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0_E$, alors nécessairement $\forall i \in [\![1, n]\!], \lambda_i = 0$, car sinon on aurait deux écritures différentes de 0_E, à savoir $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0_E$ et $\sum_{i=1}^{n} 0.u_i = 0_E$

Exemple :

- $[(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)]$ est une base de $\mathbb{R}^3$, on l'appelle la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
- $[(-1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 1, -1)]$ en est aussi une. Le triplet des composantes d'un vecteur (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ dans cette base est $\left(\frac{z+y}{2}, \frac{z+x}{2}, \frac{x+y}{2}\right)$.
- $[\underbrace{(1, \sqrt{\pi}, 12)}_{u}, \underbrace{(e, 4, 1)}_{v}, \underbrace{(1, 0, 0)}_{w}]$ est aussi une base de $\mathbb{R}^3$:

  Soit $\vec{x} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On doit montrer qu'il existe un unique triplet de $\mathbb{R}^3$ tel que

$$\vec{x} = x.u + y.v + z.w \tag{8.80}$$

  L'équation vectorielle équivaut au système :

$$(S) \quad \begin{cases} x + e.y + z = a \\ \sqrt{\pi}x + 4y = b \\ 12x + y = c \end{cases} \tag{8.81}$$

Or,

$$(S) \iff \begin{cases} x + e.y + z = a \\ x = \frac{b-4c}{\sqrt{\pi}-48} \\ y = c - 12\frac{b-4c}{\sqrt{\pi}-48} \end{cases}, \tag{8.82}$$

donc (S) a bien une unique solution.