Chapitre 7 : Fonctions polynomiales, racines

Ici, $\mathbb{K}$ est un corps commutatif quelconque.

I Fonction polynomiale

Définition :

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $P = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k X^k$ où les a_k sont nuls à partir d'un certain rang. La fonction polynomiale associée à P est la fonction :

$$\begin{array}{rccl} \tilde{P}\colon & \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \longmapsto & \tilde{P}(x) = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} a_k x^k \end{array} \tag{7.1}$$

Attention : $P \in \mathbb{K}[X]$, c'est un polynôme formel, $\tilde{P} \in \mathscr{F}(\mathbb{K},\mathbb{K})$, c'est une fonction polynomiale.

Théorème :

Soit $x \in \mathbb{K}$. Alors, pour tous $P_1, P_2 \in \mathbb{K}[X]$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\widetilde{P_1 + P_2}(x) = \tilde{P}_1(x) + \tilde{P}_2(x) \tag{7.2}$$

$$\widetilde{P_1 \times P_2}(x) = \tilde{P}_1(x) \times \tilde{P}_2(x) \tag{7.3}$$

$$\widetilde{\lambda P_1}(x) = \lambda \tilde{P}_1(x) \tag{7.4}$$

$$\tilde{1}(x) = 1_{\mathbb{K}} \tag{7.5}$$

(La démonstration est immédiate).

On en tire alors les identités :

$$\widetilde{P_1 + P_2} = \tilde{P}_1 + \tilde{P}_2 \tag{7.6}$$

$$\widetilde{P_1 \times P_2} = \tilde{P}_1 \times \tilde{P}_2 \tag{7.7}$$

$$\widetilde{\lambda P_1} = \lambda \tilde{P}_1 \tag{7.8}$$

$$\tilde{1} = 1_{\mathscr{F}(\mathbb{K},\mathbb{K})} \tag{7.9}$$

(Car $\forall x \in \mathbb{K}, \widetilde{P_1 + P_2}(x) = (\tilde{P}_1 + \tilde{P}_2)(x)$, et de même pour les autres).

Ainsi, l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathscr{F}(\mathbb{K},\mathbb{K}) \\ P & \longmapsto & \tilde{P} \end{array}$ est un morphisme de l'anneau $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ vers l'anneau $(\mathcal{F}(\mathbb{K},\mathbb{K}), +, \times)$.

II Racines

A) Définition et caractérisation formelle

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

On dit que λ est une racine (dans $\mathbb{K}$) de P lorsque $\tilde{P}(\lambda) = 0_{\mathbb{K}}$.

Théorème :

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors λ est racine de P si et seulement si $(X - \lambda)$ divise P.

Démonstration :

Déjà, $(X - \lambda)$ est non nul.

On peut donc faire la division euclidienne de P par $(X-\lambda)$: $P = (X-\lambda)Q + R$, où $Q \in \mathbb{K}[X]$ et $R \in \mathbb{K}_0[X]$, soit $R = r \in \mathbb{K}$. Donc $P = (X-\lambda)Q + r$. Donc $\tilde{P} = \widetilde{(X-\lambda)}\tilde{Q} + \tilde{r}$, d'où $\tilde{P}(\lambda) = 0_{\mathbb{K}} \times \tilde{Q}(\lambda) + r = r$.

Donc λ est racine de P si et seulement si $r = 0$ soit si $(X - \lambda)$ divise P.

B) Multiplicité

Définition :

Soit $P \in \mathbb{K}[X] \backslash \{0_{\mathbb{K}}\}$.

Soit λ un scalaire. On suppose que λ est racine de P. La multiplicité de λ dans P est, par définition,

$$m = \max\{k \in \mathbb{N}, (X - \lambda)^k \text{ divise } P\}. \tag{7.10}$$

La définition est bien correcte car l'ensemble est non vide (contient 1) et est majoré (par $\deg(P)$).

On peut convenir que λ est de multiplicité 0 lorsque λ n'est pas racine de P.

C) Le premier théorème de factorisation

Théorème :

Soit $P \in \mathbb{K}[X] \backslash \{0_{\mathbb{K}}\}$. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_p$ des racines distinctes de P de multiplicités au moins égales à $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p$.

Alors $\prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ divise P.

Démonstration :

Les polynômes $(X - \lambda_i, i \in [\![1, n]\!]$ sont irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$ (car de degré 1). Ils tous distincts et unitaires, donc les $(X - \lambda_i)^{\alpha_i}, i \in [\![1, n]\!]$ sont premiers entre eux. De plus, ils divisent tous P. Donc leur produit divise P.

Conséquence :

Soit $P \in \mathbb{K}[X] \backslash \{0_{\mathbb{K}}\}$ de degré $n \in \mathbb{N}$. Alors le nombre de racines de P (en les comptant selon leur multiplicité) est inférieur ou égal à n.

Démonstration :

Si P admet les racines $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_p$ distinctes avec les multiplicités $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p$, alors $\prod_{i=1}^{p}(X-\lambda_i)^{\alpha_i}$, de degré $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k$, divise P donc $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k \leqslant n$.

Conséquence (pratique) :

Si $P \in \mathbb{K}_n[X]$, et si on a trouvé $n+1$ racines distinctes à P, alors $P=0$.

Conséquence :

On suppose $\mathbb{K}$ infini. Alors l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathscr{F}(\mathbb{K},\mathbb{K}) \\ P & \longmapsto & \tilde{P} \end{array}$ est injective :

Si $\tilde{P}=\tilde{Q}$, alors $\tilde{P}-\tilde{Q}=0_{\mathbb{K}}$, soit $\widetilde{P-Q}=0_{\mathbb{K}}$, c'est-à-dire $\forall x\in\mathbb{K}, (\widetilde{P-Q})(x)=0_{\mathbb{K}}$. Donc $\widetilde{P-Q}$ a une infinité de racines. Donc $P-Q=0_{\mathbb{K}}$. Donc $P=Q$.

Dans la suite du chapitre, $\mathbb{K}$ est un sous corps de $\mathbb{C}$. $\mathbb{K}$ est donc infini (car il contient au minimum $\mathbb{Q}$ puisqu'il contient 0 et 1 et est stable par $+$, $\times$ et passage à linverse)

Ainsi, on a l'équivalence, pour tout $P,Q\in\mathbb{K}[X]$: $\tilde{P}=\tilde{Q} \iff P=Q$.

On peut donc retirer les $\sim$ mais on distinguera $P=\sum_{k\in\mathbb{N}}a_kX^k$ et la fonction $x\mapsto P(x)$.

III Dérivation formelle

A) Définition

Définition :

Soit $P\in\mathbb{K}[X]$, $P=\sum_{k\in\mathbb{N}}a_kX^k$ où les a_k sont nuls à partir d'un certain rang.

Alors le polynôme dérivé de P est par définition le polynôme :

$$P'=\sum_{k\in\mathbb{N}^*}ka_kX^{k-1} \tag{7.11}$$

On définit par récurrence le polynôme dérivé n fois de P :

$$\begin{cases} P^{(0)}=P \\ \forall n\in\mathbb{N}^*, P^{(n+1)}=(P^{(n)})' \end{cases} \tag{7.12}$$

Remarque :

Si on considère la fonction $\begin{array}{cccc} \mathring{P}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & x & \longmapsto & P(x) \end{array}$, on remarque que $(\mathring{P})'=\mathring{\widehat{P'}}$.

B) Propriétés

Propriété :

1. Si $\deg P\leqslant n$, alors $P^{(n)}$ est constant, non nul si et seulement si $\deg P=n$.
2. $(P+Q)'=P'+Q'$, $\qquad (P+Q)^{(k)}=P^{(k)}+Q^{(k)}$
3. $(\lambda.P)'=\lambda.P'$, $\qquad (\lambda.P)^{(k)}=\lambda.P^{(k)}$
4. $(P\times Q)'=P'Q+PQ'$, $\qquad (PQ)^{(k)}=\sum_{i=0}^{k}\binom{i}{k}P^{(i)}Q^{(k-i)}$

5. $(P^m)' = mP'P^{m-1}, \quad (m \geqslant 1)$
6. $(P(Q))' = Q' \times P'(Q)$

Démonstration :

Si $P = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$, alors $P' = na_n X^{n-1} + (n-1)a_{n-1}X^{n-2} + \ldots + a_1$. Donc si $\deg P = n \geqslant 1$, alors $\deg P' = n-1$, d'où par récurrence $\deg P^{(n)} = 0$. Et si $\deg P \in \{0, -\infty\}$, alors $P' = 0$.

Pour le deuxième point, on a : $\forall x \in \mathbb{R}, (P+Q)'(x) = P'(x) + Q'(x)$. Donc $(P+Q)' - P' - Q'$ a une infinité de racines, donc $(P+Q)' = P' + Q'$.

De même pour les produits, puis par récurrence pour les dérivées k-ièmes.

Pour le dernier point, la démonstration ne convient pas si Q n'est pas à coefficients réels. Dans ce dernier cas (et aussi dans les autres) :

$$P(Q) = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k Q^k. \tag{7.13}$$

Donc

$$(P(Q))' = \sum_{k \in \mathbb{N}*} a_k k Q' Q^{k-1} \tag{7.14}$$

(d'après les points précédents), soit

$$(P(Q))' = Q' \sum_{k \in \mathbb{N}*} a_k k Q^{k-1} = Q'P'(Q). \tag{7.15}$$

Remarque :

$$(X^p)^{(i)} = \begin{cases} 0 & \text{si } i > p \\ \frac{p!}{(p-i)!} X^{p-i} & \text{si } 0 \leqslant i \leqslant p \end{cases} \tag{7.16}$$

Ainsi,

$$D^{(i)}(X^p)(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq p \\ p! & \text{si } i = p \end{cases} \tag{7.17}$$

C) Formule de Taylor pour les polynômes

Théorème :

Soit P un polynôme, soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant \deg P$. Alors pour tout $a, b \in \mathbb{K}$:

$$P(a+b) = P(a) + bP'(a) + \frac{b^2}{2!}P''(a) + \ldots + \frac{b^n}{n!}P^{(n)}(a) \tag{7.18}$$

Démonstration :

Si $a = 0$: on veut montrer que $\forall x \in \mathbb{K}, P(x) = P(0) + xP'(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!}P^{(n)}(0)$. On a $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Donc pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$D^{(p)}(P) = \sum_{k=0}^{n} a_k D^{(p)}(X^k). \tag{7.19}$$

Donc $D^{(p)}(P)(0) = p! a_p$. Donc $a_p = \frac{D^{(p)}(P)(0)}{p!}$.

Cas général : on pose $Q(X) = P(a+X)$. Alors $\forall k \in \mathbb{N}, Q^{(k)}(X) = P^{(k)}(a+X)$ (car $(a+X)' = 1$). Donc $\forall x \in \mathbb{K}, Q(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{Q^{(k)}(0)}{k!} x^k$. Soit $\forall x \in \mathbb{K}, P(a+x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} x^k$.

Théorème (Plus général) :
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant \deg P$. Alors, pour tous $A, B \in \mathbb{K}[X]$:

$$P(A+B) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(A)}{k!} B^k. \tag{7.20}$$

Démonstration :
Pour tout $x \in \mathbb{K}$, on a :

$$P(A(x)+B(x)) = \sum_{k=0}^{n} (B(x))^k \frac{P^{(k)}(A(x))}{k!} \tag{7.21}$$

(d'après le théorème précédent avec $a = A(x)$ et $b = B(x)$). D'où l'égalité des polynômes formels $P(A+B)$ et $\sum_{k=0}^{n} B^k \frac{P^{(k)}(A)}{k!}$ puisqu'ils coïncident sur $\mathbb{K}$.

D) Application à la multiplicité

Théorème :
Soient $P \in \mathbb{K}[X] \backslash \{0\}$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Alors λ est racine d'ordre au moins k de P si et seulement si :

$$P^{(0)}(\lambda) = P^{(1)}(\lambda) = \ldots = P^{(k-1)}(\lambda) = 0 \tag{7.22}$$

Par conséquent, λ est racine de P d'ordre exactement k si et seulement si :

$$P^{(0)}(\lambda) = P^{(1)}(\lambda) = \ldots = P^{(k-1)}(\lambda) = 0 \tag{7.23}$$

et

$$P^{(k)}(\lambda) \neq 0. \tag{7.24}$$

Démonstration :
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant \deg P$ et $n \geqslant k$. Alors :

$$\begin{align} P(X) &= P(\lambda + (X-\lambda)) \tag{7.25} \\ &= \underbrace{P(\lambda) + (X-\lambda)P'(\lambda) + \cdots + \frac{(X-\lambda)^{k-1}}{(k-1)!} P^{(k-1)}(\lambda)}_{\text{polynôme } R \text{ de degré } \leqslant k-1} + \underbrace{\ldots + \frac{(X-\lambda)^n}{n!} P^{(n)}(\lambda)}_{\text{polynôme divisible par } (X-\lambda)^k} \tag{7.26} \end{align}$$

Donc R est le reste dans la division euclidienne de P par $(X-\lambda)^k$. On a donc les équivalences :

$$\begin{align} \lambda \text{ est racine d'ordre au moins } k \text{ de } P &\iff (X-\lambda)^k \text{ divise } P \tag{7.27} \\ &\iff R = 0 \tag{7.28} \\ &\iff \sum_{i=0}^{k-1} (X-\lambda)^i \frac{P^{(i)}(\lambda)}{i!} = 0 \tag{7.29} \\ &\iff \forall i \in [\![0, k-1]\!], \frac{P^{(i)}(\lambda)}{i!} = 0 \tag{7.30} \end{align}$$

Pour la dernière équivalence (l'un des sens étant évident) : si $\sum_{i=0}^{k-1} (X-\lambda)^i \frac{P^{(i)}(\lambda)}{i!} = 0$, alors $\forall x \in \mathbb{K}, \sum_{i=0}^{k-1} (x-\lambda)^i \frac{P^{(i)}(\lambda)}{i!} = 0$, donc $\forall y \in \mathbb{K}, \sum_{i=0}^{k-1} y^i \frac{P^{(i)}(\lambda)}{i!} = 0$.

Ainsi, $\sum_{i=0}^{k-1} X^i \frac{P^{(i)}(\lambda)}{i!} = 0$, d'où $\forall i \in [\![0, k-1]\!], \frac{P^{(i)}(\lambda)}{i!} = 0$.

IV Polynôme scindé

A) Définition

Définition :
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, de degré $n \geqslant 1$.
On dit que P est scindé (dans $\mathbb{K}$) lorsque P a toutes ses racines dans $\mathbb{K}$, ce qui équivaut à dire que P admet exactement n racines dans $\mathbb{K}$ en comptant les multiplicités et aussi à dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$, des éléments $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_p$ de $\mathbb{K}$ distincts, des éléments $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p$ de $\mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{K}^*$ tels que $P = a \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ (théorème de factorisation), ou à dire qu'il existe n éléments $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_n$ de $\mathbb{K}$ et $a \in \mathbb{K}^*$ tels que $P = a \prod_{i=1}^{n} (X - \mu_i)$.

Exemple :
$X^3 - 1$ est scindé dans $\mathbb{C}[X]$ mais pas dans $\mathbb{R}[X]$.

B) Relations entre coefficients et racines pour un polynôme scindé

1) Fonctions symétriques élémentaires

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit les fonctions $\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_n$ de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}$ par les formules :

$$\sigma_1(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n) = \lambda_1 + \lambda_2 \dots + \lambda_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tag{7.31}$$

$$\begin{aligned}\sigma_2(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n) &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \dots + \lambda_1\lambda_n \\ &+ \lambda_2\lambda_3 + \dots + \lambda_2\lambda_n \\ &+ \dots + \lambda_{n-1}\lambda_n = \sum_{i<j} \lambda_i\lambda_j\end{aligned} \tag{7.32}$$

$$\sigma_3(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n) = \sum_{i<j<k} \lambda_i\lambda_j\lambda_k \tag{7.33}$$

$$\sigma_n(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \tag{7.34}$$

Pour $k \in [\![1, n]\!], \sigma_k(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n) = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} \lambda_{i_1}\lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_k}$. Ces fonctions sont symétriques, au sens suivant :

Étant donnée $f \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, on dit que f est symétrique lorsque

$$\forall (x_1, x_2, \dots x_n) \in \mathbb{K}^n, \forall s \in \mathfrak{S}_n, f(x_{s(1)}, x_{s(2)}, \dots x_{s(n)}) = f(x_1, x_2, \dots x_n). \tag{7.35}$$

Ce sont les fonctions symétriques élémentaires sur n éléments en vertu d'un résultat (hors programme) : toutes les fonctions symétriques rationnelles sur n éléments sont fonctions rationnelles des σ_k.

2) Le résultat

Soit P un polynôme scindé de degré $n \geqslant 1$ de $\mathbb{K}[X]$, d'écriture développée $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et d'écriture factorisée $P = a_n \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$.

Pour alléger, on notera σ_k pour $\sigma_k(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n)$, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Les formules suivantes donnent un lien entre les σ_k et les a_k :

$$-a_n\sigma_1 = a_{n-1} \tag{7.36}$$

$$a_n\sigma_2 = a_{n-2} \tag{7.37}$$

$$\dots (-1)^k a_n\sigma_k = a_{n-k} \tag{7.38}$$

En effet :

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i) = X^n - (\lambda_1 + \lambda_2 \dots + \lambda_n)X^{n-1} + \sum_{i<j} \lambda_i\lambda_j X^{n-2} \\ + \dots + (-1)^k \sum_{i_1<i_2<\dots<i_k} \lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\cdots\lambda_{i_k}X^{n-k} \\ + \dots + \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n\end{aligned} \tag{7.39}$$

3) Réciproque

Soient $u_1, u_2, \dots u_n \in \mathbb{K}$. Alors les solutions du système suivant, d'inconnues $x_1, x_2, \dots x_n$ dans $\mathbb{K}$:

$$\begin{cases} \sigma_1(x_1, x_2, \dots x_n) & = u_1 \\ \sigma_2(x_1, x_2, \dots x_n) & = u_2 \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ \sigma_n(x_1, x_2, \dots x_n) & = u_n \end{cases} \tag{7.40}$$

sont exactement les racines du polynôme :

$$P = X^n - u_1X^{n-1} + \dots + (-1)^k u_k X^{n-k} + \dots (-1)^n u_n \tag{7.41}$$

Démonstration :

- Si $x_1, x_2, \dots x_n$ sont racines de P, alors $(x_1, x_2, \dots x_n)$ est solution de 7.40 d'après le point précédent.
- Si $(x_1, x_2, \dots x_n)$ est solution de 7.40, alors le polynôme $P = \prod_{i=1}^{n}(X - x_i)$ s'écrit sous forme développée $X^n - u_1X^{n-1} + \dots + (-1)^n u_n$.

V Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$

A) Dans $\mathbb{C}[X]$

Théorème (de D'Alembert) :
Tout polynôme de degré $\geqslant 1$ à coefficients dans $\mathbb{C}$ a au moins une racine. Par conséquent, les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ de degré $\geqslant 1$ sont tous scindés dans $\mathbb{C}[X]$

(démonstration par récurrence)

Théorème (Énoncé équivalent) :
Les polynômes irréductibles unitaires de $\mathbb{C}[X]$ sont exactement les polynômes $X-\lambda, \lambda \in \mathbb{C}$.

Définition :
On dit que $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.

B) Dans $\mathbb{R}[X]$

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, racine de multiplicité α. Alors $\bar{\lambda}$ est aussi racine de P, et avec la même multiplicité α.

Démonstration :

- Si λ est racine de P, où $P=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, alors :

$$P(\lambda)=a_n\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_0\lambda^0=0 \tag{7.42}$$

Donc $\overline{P(\lambda)}=0$, et :

$$\begin{aligned}\overline{P(\lambda)}&=\overline{a_n\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_0\lambda^0}\\&=a_n\bar{\lambda}^n+a_{n-1}\bar{\lambda}^{n-1}+\cdots+a_0\bar{\lambda}^0\\&=P(\bar{\lambda})\end{aligned} \tag{7.43}$$

Soit $P(\bar{\lambda})=0$. Donc $\bar{\lambda}$ est racine de P.

- Si λ est racine de multiplicité $\alpha \geqslant 1$ de P, alors : $P(\lambda)=P'(\lambda)=\ldots=P^{(\alpha-1)}(\lambda)=0$, et $P^{(\alpha)}(\lambda)\neq 0$. Donc $P(\bar{\lambda})=P'(\bar{\lambda})=\ldots=P^{(\alpha-1)}(\bar{\lambda})=0$ (étape précédente appliquée aux $P^{(k)}$), et $P^{(\alpha)}(\bar{\lambda})\neq 0$ car sinon $P^{(\alpha)}(\lambda)=P^{(\alpha)}(\bar{\lambda})=0$.

Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et λ une racine de P. Peut-on affirmer que $(X-\lambda)(X-\bar{\lambda})$ divise P ?

C'est vrai uniquement si $\lambda \notin \mathbb{R}$, car sinon dans ce cas là $\lambda=\bar{\lambda}$ et donc on peut avoir $(X-\lambda)$ qui divise P mais pas forcément $(X-\lambda)^2$.

Théorème :
Les irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont exactement les polynômes de degré 1 et de degré 2 sans racine réelle. Ainsi, tout polynôme P à coefficients réels de degré $\geqslant 1$ s'écrit de manière unique $P=a\prod_{i=1}^{n} P_i$ où $a \in \mathbb{R}^*$ et où $P_i \in \mathbb{R}_2[X]\backslash\{P \in \mathbb{R}_2[X], \Delta(P)\geqslant 0\}$.

Démonstration :

- Déjà, si $P=aX+b$ ($(a,b)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$), alors P est irréductible.

Si $P=aX^2+bX+c$ avec $\begin{cases}(a,b,c)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\\ b^2-4ac<0\end{cases}$, alors P est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ (sinon il s'écrirait $(\alpha X+\beta)(\alpha'.X+\beta')$ et aurait deux racines réelles).

- Soit maintenant P un polynôme de degré $\geqslant 2$. Selon le théorème de D'Alembert, il y a au moins une racine $\lambda \in \mathbb{C}$.
  - Si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $P=(X-\lambda)Q$ où $\deg Q=n-1\geqslant 1$, donc P n'est pas irréductible.

◇ Si $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, alors $\bar{\lambda}$ est aussi racine de P, et $\bar{\lambda} \neq \lambda$ donc $(X-\lambda)(X-\bar{\lambda})$ divise P. Or, $(X-\lambda)(X-\bar{\lambda}) = X^2 - (\lambda+\bar{\lambda})X + \lambda\bar{\lambda} \in \mathbb{R}[X]$. Donc $P = (X^2 - sX + p)Q$ où $Q \in \mathbb{R}[X]$, $s \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{R}$. Donc $\deg Q = n-2$. Donc soit $n = 2$ et P est irréductible, soit $n \geqslant 3$ et P n'est pas irréductible.

Il n'y a donc pas d'autres polynômes irréductibles.

Plus précisément :

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré $n \geqslant 1$ et de coefficient dominant a. Alors P admet n racines dans $\mathbb{C}$, regroupées ainsi :

- $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_p$ racines réelles de multiplicités $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p$,
- $\mu_1, \bar{\mu}_1, \mu_2, \bar{\mu}_2, \dots \mu_p, \bar{\mu}_p$ racines complexes de multiplicités $\beta_1, \beta_1, \beta_2, \beta_2 \dots \beta_q, \beta_q$,

avec $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i + \sum_{i=1}^{q} \beta_i = n$. Alors :

$$\begin{aligned} P &= a \prod_{i=1}^{p} (X-\lambda_i)^{\alpha_i} \prod_{i=1}^{q} (X-\mu_i)^{\beta_i} (X-\bar{\mu}_i)^{\beta_i} \\ &= a \prod_{i=1}^{p} (X-\lambda_i)^{\alpha_i} \prod_{i=1}^{q} (X^2 - s_i X + p_i)^{\beta_i} \end{aligned} \tag{7.44}$$

Où

$$\begin{aligned} \forall i \in [\![1, q]\!], s_i &= \mu_i + \bar{\mu}_i = 2\,\mathrm{Re}(\mu_i) \\ p_i &= \mu_i \bar{\mu}_i = |\mu_i|^2 \end{aligned} \tag{7.45}$$

Définition (Algorithme de Horner) :
Soit $P \colon x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. L'algorithme permet de calculer la valeur d'une fonction polynomiale en un point de $\mathbb{K}$ avec un minimum d'opérations élémentaires :

$$((\dots((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \dots)x + a_1)x + a_0. \tag{7.46}$$

On a ainsi au pire n multiplications et n additions.