Chapitre 5 : Corps (commutatifs)

I Définition

Définition :
Soit $\mathbb{K}$ un ensemble muni de deux lois $+$ et $\times$. On dit que $(\mathbb{K}, +, \times)$ est un corps (au sens corps commutatif) lorsque :

- $(\mathbb{K}, +)$ est un groupe commutatif (de neutre noté $0_{\mathbb{K}}$),
- $(\mathbb{K}\backslash\{0_{\mathbb{K}}\}, \times)$ est un groupe commutatif (de neutre noté $1_{\mathbb{K}}$),
- $\times$ est distributive sur $+$.

Ainsi, cela revient à dire que $(\mathbb{K}, +, \times)$ est un corps lorsque $(\mathbb{K}, +, \times)$ est un anneau commutatif non réduit à $\{0_{\mathbb{K}}\}$ et tout élément de $\mathbb{K}\backslash\{0_{\mathbb{K}}\}$ admet un inverse pour la loi $\times$.

Exemple :
$(\mathbb{R}, +, \times)$ et $(\mathbb{C}, +, \times)$ sont des corps.

II Sous corps

Définition :
Soit $(\mathbb{K}, +, \times)$ un corps et soit $\mathbb{L}$ une partie de $\mathbb{K}$. On dit que $\mathbb{L}$ est un sous corps de $\mathbb{K}$ lorsque :

- $\mathbb{L}$ est stable par $+$ et $\times$,
- $\forall x \in \mathbb{L}, (-x) \in \mathbb{L}$ et $\forall x \in \mathbb{L}\backslash\{0_{\mathbb{K}}\}, x^{-1} \in \mathbb{L}$,
- $1_{\mathbb{K}} \in \mathbb{L}$.

Proposition :
Si $\mathbb{L}$ est un sous corps d'un corps $(\mathbb{K}, +, \times)$, alors $+$ et $\times$ constituent des lois de composition internes sur $\mathbb{L}$, et $(\mathbb{L}, +, \times)$ est un corps.

Exemple :
$\mathbb{R}$ est un sous corps de $(\mathbb{C}, +, \times)$.

III Un calcul dans un corps : somme de termes en progression géométrique

Soit $(\mathbb{K}, +, \times)$ un corps. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. Soit $q \in \mathbb{K}$. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison q, c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = qu_n. \tag{5.1}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, et soit $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. Alors :

- Si $q = 1_{\mathbb{K}}$, $S_n = (n+1)u_0$.
- Si $q \neq 1_{\mathbb{K}}$, $S_n = (u_0 - u_{n+1})(1-q)^{-1}$.

IV Morphisme de corps

C'est la même chose qu'un morphisme d'anneaux.

Remarque :

La clause de la définition d'un morphisme d'anneau de A vers B qui demande que l'image de 1_A soit 1_B peut être oubliée lorsque A et B sont des corps, car elle est alors conséquence des deux autres.

(Il faut toutefois s'assurer que la fonction n'est pas nulle)

V Corps des fractions d'un anneau intègre

Théorème, définition (admis) :

Soit $(A, +, \times)$ un anneau intègre. Alors il existe un corps $(\mathbb{K}, +, \times)$, unique à isomorphisme près, tel que :

- $(A, +, \times)$ est un sous anneau de $(\mathbb{K}, +, \times)$ (autrement dit, A est inclus dans $\mathbb{K}$ et les lois $+$ et $\times$ sur $\mathbb{K}$ prolongent les lois $+$ et $\times$ sur A).
- Tout élément x de $\mathbb{K}$ s'écrit $x = ab^{-1}$ avec $a \in A$, $b \in A \setminus \{0\}$.

On dit alors que $\mathbb{K}$ est le corps des fractions de A.

Exemple :

$\mathbb{Q}$ est le corps des fractions de $\mathbb{Z}$.