

Chapitre 7 : Transfert d'énergie par rayonnement

I Généralités sur le rayonnement

A) Aspect ondulatoire et corpusculaire

1) Aspect ondulatoire

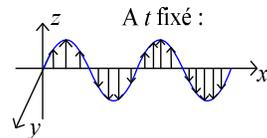
Onde électromagnétique :

C'est la donnée d'un champ $\vec{E}(\vec{r}, t)$ et $\vec{B}(\vec{r}, t)$.

Dès que \vec{E} dépend de t (c'est-à-dire qu'il se propage), il sera nécessairement couplé à un champ \vec{B} , et vice-versa : un champ électrique ou magnétique ne peut pas se propager seul.

OPPSPR :

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_z.$$



Signification de OPPSPR :

- (1) Onde Plane : dépend uniquement de x .
- (2) Progressive : décalage de la sinusoïde dans le temps.
- (3) Sinusoïdale : ...
- (4) Polarisée Rectilignement : \vec{E} est colinéaire à \vec{u}_z .

ω : Pulsation temporelle ; $T = \frac{2\pi}{\omega}$: période temporelle.

k : Pulsation spatiale ; $\lambda = \frac{2\pi}{k}$: période spatiale, ou longueur d'onde.

Toute onde peut se décomposer en OPPSPR (Théorème de Fourier).

Dans le vide :

L'onde se propage à la vitesse c .

Pour une OPPSPR, $k = \frac{\omega}{c}$, ou $\lambda = cT = \frac{c}{\nu}$.

Densité d'énergie électromagnétique :

$$u_{\text{em}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2$$

Propagation de l'énergie :

$$\vec{j}_{u_{\text{em}}} = \vec{j}_{\text{rayonnement thermique}} + \vec{j}_{\text{rayonnement non thermique}}$$

2) Aspect corpusculaire

Flux de photons :

- Vitesse c dans le vide.
- A une OPPS plane sinusoïdale de fréquence ν correspond un flux de photons tel que :
 - $\varepsilon = h\nu$ où $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ J.s
 - $u_{em} = nh\nu$ avec n : nombre de particules par unité de volume.
 - $\vec{P} = \frac{h\nu}{c} \vec{u}$ avec $\|\vec{u}\| = 1$.

B) Interaction matière–rayonnement

1) Emission

- Définition :
C'est la conversion d'énergie liée à la matière en énergie lumineuse.
 - Energie électronique (changement d'état de l'électron) : rayons X, ultraviolets ou visible
 - Energie nucléaire : rayons γ (pour la désintégration radioactive par exemple)
 - Energie de rotation/vibration : infrarouges voire micro-ondes.
- Rayonnement thermique :
 - Rayonnement d'accélération :



Lorsqu'une particule chargée est accélérée, on observe un rayonnement d'énergie (qui induit une force de freinage, la particule perdant alors de l'énergie).

- Matériau à la température T :

Le matériau contient des particules chargées (protons, électrons). De plus, ces charges ne sont pas fixes à cause de l'agitation thermique. On observe donc un rayonnement d'accélération. Ce rayonnement, émis par la matière, s'appelle le rayonnement thermique.

Exemple :

Si on augmente progressivement la température d'un bloc de métal dans le noir, on le voit progressivement devenir brunâtre, puis rouge, blanc... Si le métal ne fondait pas, il passerait par la couleur verte et bleue.

Ainsi, le spectre de rayonnement se déplace de l'infrarouge vers le bleu.

De plus, la quantité d'énergie émise augmente avec la température.

Ce type de rayonnement est un type de rayonnement désordonné.

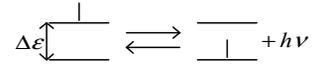
2) Absorption

- Définition :
C'est la conversion d'énergie lumineuse en énergie matérielle.

Exemple :

$\text{Na}^* \rightarrow \text{Na} + h\nu$ ($h\nu = \varepsilon_f - \varepsilon_i$) pour l'émission.

Mais on peut aussi avoir $\text{Na} + h\nu \rightarrow \text{Na}^*$

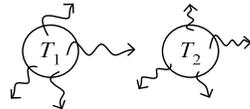


• Rayonnement thermique : (\vec{E}, \vec{B})

Une charge q sera soumise à $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$.

Ainsi, le rayonnement thermique peut être absorbé par la matière, qui se mettra alors en mouvement.

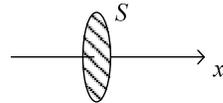
Si on a deux matériaux de températures T_1, T_2 avec $T_1 > T_2$:



T_1 va émettre plus d'énergie qu'elle en recevra, et c'est le contraire pour T_2 .

3) Propagation dans un milieu matériel

On suppose le milieu homogène isotrope, et que la propagation est unidimensionnelle :

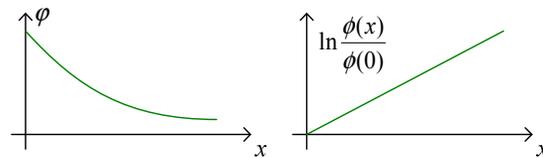


• Loi de Bouguer–Beer–Lambert :

- Expérimentalement :

$\varphi(x) = \varphi(0)e^{-K \cdot x}$, où $\varphi(x) = \frac{\phi(x)}{S}$, flux par unité de surface.

$$(\phi = \iint_S \vec{j}_Q \cdot d\vec{S})$$



K : coefficient d'extinction (ou d'absorption)

K dépend du matériau et de la longueur d'onde.

Distance caractéristique d'absorption : $\delta = \frac{1}{K}$; distance au bout de laquelle le rayonnement est quasiment absorbé.

- Interprétation :

$$\frac{d\varphi}{\varphi} = -Kdx \text{ (où } d\varphi \text{ est la variation de flux en } x, \varphi \text{ le flux en } x)$$

Or, φ est proportionnel à n (nombre de photons par unité de volume)

Donc $\frac{dn}{n} = -Kdx$, soit $\frac{-dn}{n} = Kdx$. ($-dn$: nombre de photons qui

« meurent », n : nombre de photons)

Ainsi, la probabilité pour un photon de se faire absorber est indépendante de la distance déjà parcourue par ce photon. Elle ne dépend pas non plus du nombre de photons qui traversent.

- Cas des solutions :

(1) Loi de Beer :

Pour des solutions suffisamment diluées, $K = \sum \alpha_i c_i$ (i : différents constituants de la solution ; on réserve généralement 1 pour le solvant)

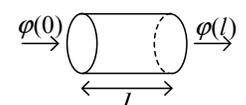
Donc $\varphi(x) = \varphi(0)e^{-\sum \alpha_i c_i x}$.

(2) Coefficient d'extinction molaire :

$\varphi(x) = \varphi(0)10^{-\sum \varepsilon_i c_i x}$, où $\varepsilon_i = \alpha_i \log e$

Les ε_i sont les coefficients d'extinction molaire ($\text{cm}^{-1}\text{L}\cdot\text{mol}^{-1}$)

(3) Absorbance d'un échantillon :



On pose $A = \log \frac{\varphi(0)}{\varphi(l)} = (\sum \varepsilon_i c_i) l$

(4) Application à la spectrophotométrie :

En cinétique chimique, la concentration dépend de l'avancement, et donc du temps, donc A aussi. On peut ainsi chercher une loi cinétique.

Par exemple, avec deux constituants :

$A = (\varepsilon_1 c_1 + \varepsilon_2 c_2) l$

Pour une longueur d'onde λ_α , $A_\alpha = (\varepsilon_1(\lambda_\alpha) c_1 + \varepsilon_2(\lambda_\alpha) c_2) l$

Pour une longueur d'onde λ_β , $A_\beta = (\varepsilon_1(\lambda_\beta) c_1 + \varepsilon_2(\lambda_\beta) c_2) l$.

Après étalonnage, on peut connaître $\varepsilon(\lambda)$

Pour calculer c_1 et c_2 plus facilement, on peut par exemple prendre λ_α de façon que $\varepsilon_1(\lambda_\alpha) = 0$ et λ_β de façon que $\varepsilon_2(\lambda_\beta) = 0$.

- Milieux opaques et transparents.

- Définition :

Un milieu est opaque lorsque $K = +\infty$. Ainsi, $\forall x, \varphi(x) = 0$ (et $\delta = 0$)

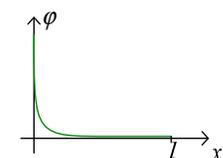
Un milieu est transparent lorsque $K = 0$. Ainsi, $\forall x, \varphi(x) = \varphi(0)$ (et $\delta = +\infty$)

- Ces deux types de milieu sont des cas limites, qui n'existent pas en réalité.

- Allure des courbes :

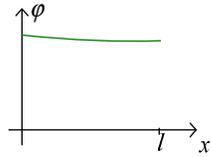


Si $\delta \ll l$:



Le milieu peut être considéré comme opaque.

Si $\delta \gg l$:



Le milieu peut être considéré comme transparent.

- K et δ dépendent de λ .

Certains milieux peuvent être opaques pour certaines longueurs d'onde, mais transparents pour d'autres.

- Pour un milieu opaque :



On peut donc ici utiliser une schématisation surfacique.

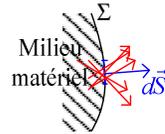
A l'intérieur, le rayonnement produit est absorbé quasiment immédiatement.

Le rayonnement qui vient de l'extérieur sera rapidement absorbé.

II Transferts radiatifs

A) Flux "émis" par une surface

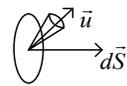
1) Modélisation



Flux "émis" par $d\vec{S}$: flux qui sort de l'intérieur par $d\vec{S}$.

2) Flux directionnel

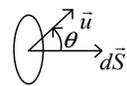
• Monochromatique :



$\delta^3 \phi^e$: flux sortant par $d\vec{S}$ de longueur d'onde comprise entre λ et $\lambda + d\lambda$, de direction comprise dans l'angle solide $d\Omega$ entourant \vec{u} .

- Luminance monochromatique L_λ :

C'est le réel tel que $\delta^3 \phi^e = L_\lambda \cos \theta . dS . d\lambda . d\Omega$ où, pour θ :



(1) $L_\lambda = L_\lambda(\lambda, \vec{u}, \vec{r})$

(2) $[L_\lambda] = \text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \mu\text{m}^{-1} \cdot \text{stéradian}^{-1}$

- Loi de Lambert :

(1) généralement, L_λ est indépendant de \vec{u} .

Un corps vérifiant cette propriété est dit vérifiant la loi de Lambert.

Remarque : On voit ici l'intérêt de ne pas avoir « laissé » le $\cos \theta$ dans L_λ pour sa définition.

On supposera dans la suite que les corps vérifient la loi de Lambert, et de plus qu'ils sont homogènes, c'est-à-dire que L_λ dépend uniquement de λ .

$$\text{Ainsi, } \delta^3 \phi^e = L_\lambda(\lambda) \cos \theta . dS . d\lambda . d\Omega$$

(2) $\cos \theta . dS$ correspond à la surface apparente à un observateur se trouvant dans la direction \vec{u} .

Ainsi, le flux émis dans la direction \vec{u} est proportionnel à la surface apparente.

- Flux directionnel total :

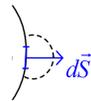
$$\delta^2 \phi^e = \left(\int_0^{+\infty} L_\lambda(\lambda) d\lambda \right) \cos \theta . dS . d\Omega$$

Luminance totale :

$$L = \int_0^{+\infty} L_\lambda(\lambda) d\lambda \quad ([L] = \text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{stéradian}^{-1})$$

$$\text{Ainsi, } \delta^2 \phi^e = L \cos \theta . dS . d\Omega .$$

3) Flux hémisphérique



- Monochromatique :

$$\delta^2 \phi^e = \underbrace{\left(\int_{1/2 \text{ espace}} \cos \theta d\Omega \right)}_{M_\lambda} L_\lambda(\lambda) . dS . d\lambda$$

$$\int_{1/2 \text{ espace}} \cos \theta d\Omega = \int_0^{\pi/2} \cos \theta . 2\pi \sin \theta . d\theta = \pi$$

Ainsi, $M_\lambda = \pi L_\lambda(\lambda)$ (uniquement si le corps vérifie la loi de Lambert)

$$\text{Et } \delta^2 \phi^e = M_\lambda . dS . d\lambda .$$

M_λ : exittance monochromatique.

- Flux hémisphérique total :

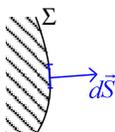
$$\delta \phi^e = \left(\int_0^{+\infty} M_\lambda . d\lambda \right) . dS$$

Exittance totale :

$$M = \int_0^{+\infty} M_\lambda . d\lambda = \pi . L$$

B) Flux reçu par une surface

1) Flux incident



$\delta^3 \phi^i$: c'est le flux qui arrive sur $d\vec{S}$ pour une longueur d'onde comprise entre λ et $\lambda + d\lambda$ dans un angle solide $d\Omega$ autour d'une direction \vec{u} .

$\delta\phi^i$: c'est tout le flux qui arrive sur $d\vec{S}$.

2) Absorption, réflexion

Pour le flux incident :

- Soit il sera réfléchi
- Soit il pénètre et sera absorbé.

$$\delta^3 \phi^i = \delta^3 \phi^a + \delta^3 \phi^r.$$

- Coefficient d'absorption :

$$\alpha_\lambda = \frac{\delta^3 \phi^a}{\delta^3 \phi^i}.$$

α_λ dépend de λ , \vec{r} (sauf si le milieu est homogène) et de \vec{u} (faiblement)

Il y a certains corps, appelés corps gris, pour lequel α_λ est le même sur tout un intervalle de longueurs d'ondes. (d'où le nom de corps gris : pour de la lumière blanche par exemple, si α_λ est constant sur le domaine visible, la lumière réfléchie aura perdu en intensité)

Les corps gris sont gris sur une partie du spectre lumineux seulement (il n'en existe pas qui le soient sur tout le spectre)

- On a $0 \leq \alpha_\lambda \leq 1$

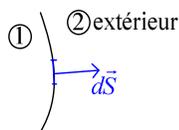
- Coefficient d'absorption global : $\alpha = \frac{\delta\phi^a}{\delta\phi^i}$

- Réflexion spéculaire :

C'est une réflexion qui se fait selon la loi de Descartes. (Exemple : miroir)

Réflexion diffuse : la lumière réfléchie repart dans toutes les directions, pas forcément de façon isotrope. (Exemple : mur)

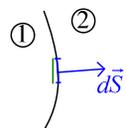
C) Flux thermique à l'interface entre deux milieux



1) Flux de rayonnement

$\delta\phi^R$: flux de rayonnement algébrique à travers $d\vec{S}$.

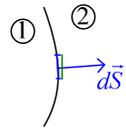
- Dans 1 :



(La surface est très légèrement décalée, ainsi on n'a pas les particules qui sont réfléchies)

On a $\delta_1 \phi^R = \delta \phi^e - \delta \phi^a$

- Dans 2 :



$\delta_2 \phi^R = \delta \phi^p - \delta \phi^i$ ($\delta \phi^p$: flux partant, c'est-à-dire émis et réfléchi)

2) Conditions aux limites à l'interface

- Composantes du flux de chaleur

$$\vec{j}_Q = \vec{j}_{\text{Ray}} + \vec{j}_{\text{Cond}}$$

$$\vec{j}_{\text{Ray}} \cdot \vec{n} = \varphi^R = \frac{\delta \phi^R}{dS}$$

$$\vec{j}_{\text{Cond}} \cdot \vec{n} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \quad \text{ou} \quad \vec{j}_{\text{Cond}} \cdot \vec{n} = h(T - T_f)$$

- Interface entre deux milieux semi-transparents :

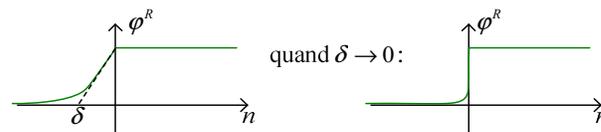
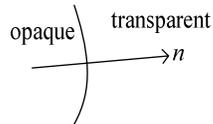
Continuité du flux : $\delta_1 \phi^R = \delta_2 \phi^R$ ($\varphi_1^R = \varphi_2^R$)

Donc $\delta \phi^e - \delta \phi^a = \delta \phi^p - \delta \phi^i$, soit $\delta \phi^i - \delta \phi^a = \delta \phi^p - \delta \phi^e$.

$$-\lambda_1 \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_{0^-} = -\lambda_2 \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_{0^+} \quad \text{ou} \quad -\lambda_1 \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_{0^-} = h(T - T_f)$$

On a donc simultanément continuité du rayonnement et du flux conductif.

- Interface entre un milieu opaque et un milieu transparent :



Le rayonnement n'est donc pas continu.

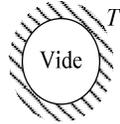
Mais $\vec{j}_{\text{Ray}} + \vec{j}_{\text{Cond}}$ est continu

$$\underbrace{-\lambda_1 \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_{0^-}}_{\text{intérieur, uniquement conductif}} = \underbrace{\varphi^R - \lambda_2 \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_{0^+}}_{\text{rayonnement + conductif}}$$

III Rayonnement d'équilibre, corps noir

A) Rayonnement d'équilibre

1) Définition



- Point de vue corpusculaire :

La paroi émet des photons qui seront soit absorbés soit réfléchis ; ainsi, dans l'enceinte, il y a en permanence un gaz de photons.

Ce gaz est à l'équilibre avec la paroi (en moyenne, il y en a autant d'émis qu'absorbés)

On a ainsi deux systèmes à l'équilibre : la paroi et le gaz.

- Point de vue ondulatoire :

On peut ici aussi considérer deux systèmes à l'équilibre : la paroi et le champ électromagnétique.

- Conclusion :

- Le rayonnement correspond à un système thermodynamique.

- Ce système peut être ou ne pas être :

(1) En équilibre thermodynamique interne, T définie ou non.

(2) En équilibre thermodynamique avec la paroi, $T = T_{\text{paroi}}$

2) Densité volumique d'énergie de rayonnement

- Densité globale

$\int_{\text{cube}} d\tau$
Énergie dU

$$u = \frac{dU}{d\tau}, \text{ et } U = \iiint u d\tau.$$

(1) ondulatoire : $u = \frac{1}{2} \epsilon_0 \bar{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \bar{B}^2$

(2) corpusculaire : $u = \frac{1}{d\tau} \sum_{i \in d\tau} h\nu_i$

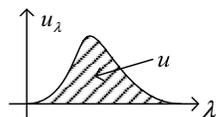
- Monochromatique :

On peut choisir de travailler avec λ ou ν : $\nu = \frac{c}{\lambda}$

- u_λ :

$$\delta^2 U = u_\lambda d\lambda d\tau \text{ (et } dU = \int_\lambda \delta^2 U)$$

Ainsi, $u = \int_0^{+\infty} u_\lambda d\lambda$



- u_ν :

$$\delta^2 U = u_\nu d\nu d\tau, \text{ donc } u = \int_0^{+\infty} u_\nu d\nu$$

- Relation entre u_λ et u_ν :

$$\nu = \frac{\lambda}{c}. \text{ Donc } d\nu = \frac{-c}{\lambda^2} d\lambda.$$

$$\text{Ainsi, } u = \int_{+\infty}^0 \frac{-c}{\lambda^2} u_\nu d\lambda = \int_0^{+\infty} \frac{c}{\lambda^2} u_\nu d\lambda.$$

$$\text{Donc } u_\lambda = \frac{c}{\lambda^2} u_\nu$$

3) Loi de Planck

• Expression :

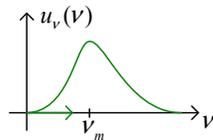
Pour un rayonnement à l'équilibre à la température T :

$$u_\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}$$

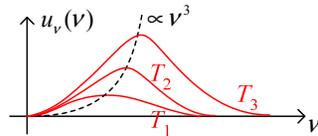
• Analyse :

- C'est une loi fondamentale de la physique.
- La densité de rayonnement ne dépend pas de la paroi.
- $u_\nu = u_\nu(\nu, T)$

(1) A T donné :



(2) Pour différentes valeurs de T :



$$T_1 < T_2 < T_3$$

Quand T augmente, ν_m augmente, et $u = \int_0^{+\infty} u_\nu d\nu$ aussi.

On peut montrer que $\frac{\nu_m}{T} = \text{cte}$

• Origine :

C'est une formule :

- Quantique (h)
- Relativiste (c)
- Statistique (k_B)

(1) En 1900, on savait déjà que $u_\nu = u_\nu(\nu, T)$. Planck a considéré que la paroi était constituée d'oscillateurs harmoniques, émettant de

l'énergie ; mais la nouveauté était qu'il supposait de plus que les passages d'un niveau d'énergie à l'autre se faisaient de façon discrète.

(2) On peut rapprocher cette formule de la statistique de Bose–Einstein.

- Formules approchées :

- Approximation de Rayleigh–Jeans (1900) :

$$u_\nu = \frac{8\pi k_B T}{c^3} \nu^2 \quad (\text{ils ont travaillé sans l'hypothèse du quantum d'énergie})$$

(1) La formule est fautive : $\int_0^{+\infty} u_\nu d\nu = +\infty$

(2) Elle reste valable quand $h\nu \ll k_B T$ (correspond alors à un développement limité de la formule de Planck)

- Approximation de Wien (1893) :

$$u_\nu = a \nu^3 e^{-b\nu}$$

Cette formule est valable pour $h\nu \gg k_B T$, et on a $a = \frac{8\pi h}{c^3}$, $b = \frac{h}{k_B T}$.

- Ordres de grandeur :

On pose $\lambda_c(T) = \frac{hc}{k_B T}$. Ainsi, $\frac{h\nu}{k_B T} = \frac{hc}{\lambda k_B T} = \frac{\lambda}{\lambda_c(T)}$.

Pour $T = 300\text{K}$, $\lambda_c = 48\mu\text{m}$

Pour $T = 3000\text{K}$, $\lambda_c = 4,8\mu\text{m}$

4) Loi de Stefan–Boltzmann

- Expression de la densité totale d'énergie

$u = \int_0^{+\infty} u_\nu d\nu$. En faisant le changement de variable $x = \frac{h\nu}{k_B T}$, on obtient :

$$u = \frac{8\pi h}{c^3} \left(\frac{k_B T}{h} \right)^4 \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx}_{\frac{\pi^4}{15}}$$

C'est-à-dire $u = \frac{8\pi^5}{15c^3 h^3} k_B^4 \times T^4 = \sigma_B T^4$

$\sigma_B = \frac{8\pi^5}{15c^3 h^3} k_B^4$: constante de Stefan–Boltzmann.

- Ordre de grandeur :

$\sigma_B = 0,756464 \cdot 10^{-15} \text{J} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{K}^{-4}$.

A $T = 300\text{K}$, $u = 6 \cdot 10^{-6} \text{J} \cdot \text{m}^{-3}$

(pour un gaz parfait, $U = \frac{3}{2} nRT = \frac{3}{2} PV$, soit $u = \frac{3}{2} P$, donc beaucoup plus

important qu'un gaz de photons)

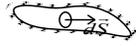
A $T = 2000\text{K}$, $u = 1,2 \cdot 10^{-2} \text{J} \cdot \text{m}^{-3}$.

A $T = 6000\text{K}$ (soleil en surface), $u = 1 \text{J} \cdot \text{m}^{-3}$

A $T = 10^7 \text{K}$ (au centre), $u = 10^{13} \text{J} \cdot \text{m}^{-3}$.

5) Luminance du rayonnement d'équilibre

- Définition :



On a $\delta^3 \phi^R = 0$ (car le système est à l'équilibre)

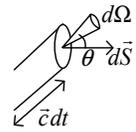
On s'intéresse ici à :

$\delta^3 \phi^0 = L_\lambda^0 \cos \theta dS \cdot d\Omega \cdot d\lambda$: photons qui traversent dS dans le bon sens (à savoir dans le sens de $d\vec{S}$)

- Expression :

Hypothèse :

On se place du point de vue corpusculaire, et tous les photons ont une vitesse c isotrope.



- Volume : $dSc \cdot dt \cdot \cos \theta$
- Ceux qui vont traverser $d\vec{S}$ dans la direction \vec{u} à $d\Omega$ près sont en proportion de $\frac{d\Omega}{4\pi}$ (car la répartition est isotrope) par rapport à ceux qui sont dans le cylindre.
- $u_\lambda d\lambda$: énergie par unité de volume.

$$\text{Ainsi, } \delta^3 \phi^0 = \frac{u_\lambda d\lambda \frac{d\Omega}{4\pi} c \cdot dt \cdot \cos \theta}{dt} = \frac{c}{4\pi} u_\lambda \cos \theta \cdot dS \cdot d\Omega \cdot d\lambda$$

$$\text{Soit } L_\lambda^0 = \frac{c}{4\pi} u_\lambda = L_\lambda^0(\lambda, T).$$

Remarque : L_λ^0 est indépendant de θ .

- (Pseudo-)exitance :

- Définition :



$\delta^2 \phi^0 = M_\lambda^0 d\lambda dS$: flux hémisphérique monochromatique traversant $d\vec{S}$ (toujours dans le bon sens)

- Expression :

$$M_\lambda^0 = \int L_\lambda^0 \cos \theta \cdot d\Omega = L_\lambda^0 \int_0^{\pi/2} \cos \theta \cdot 2\pi \cdot \sin \theta \cdot d\theta = \pi \cdot L_\lambda^0 = \frac{c}{4} u_\lambda$$

$$\delta \phi^0 = M^0 dS, \text{ donc } M^0 = \int M_\lambda^0 d\lambda = \frac{c}{4} u$$

- Loi de Stefan :

$$u = \sigma_B T^4. \text{ Donc } M^0 = \frac{c}{4} u = \frac{c}{4} \sigma_B T^4 = \sigma T^4.$$

σ : constante de Stefan, $\sigma = 5,671 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$.

- Comparaison à l'exitance de la paroi :



$$\delta\phi^e = M dS.$$

$$\delta\phi^0 = M^0 dS = \delta\phi^e + \delta\phi^r$$

Donc $M dS = M_0 dS + \underbrace{\delta\phi^r}_{\geq 0}$, soit $M \leq M_0$ (avec égalité lorsque la paroi est

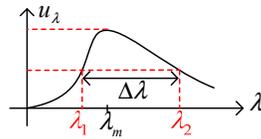
parfaitement absorbante)

Lorsqu'on modifie la paroi, M peut changer mais pas M_0 (qui ne dépend que de T)

6) Loi de Wien (loi du déplacement)

- Etude de la fonction $u_\lambda(\lambda)$:

$$u_\lambda = \frac{c}{\lambda^2} u_\nu = \frac{c}{\lambda^2} \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\frac{c^3}{\lambda^3}}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1} = \frac{8\pi h c}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1}$$



Changement de variable $x = \frac{hc}{\lambda k_B T}$.

$$\frac{du_\lambda}{d\lambda} = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = \frac{1}{5} x e^x$$

Soit $x_m = 4,9651$

D'où la loi de Wien : $\lambda_m T = 2898 \mu\text{m.K}$.

Ainsi, quand T augmente, λ_m diminue (IR, puis visible, et UV)

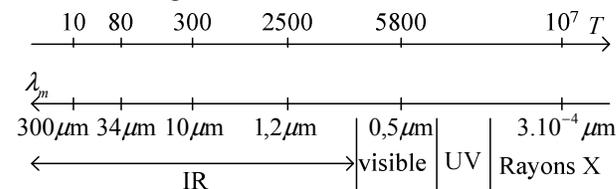
$x_1 = 2,73$, $x_2 = 8,10$, donc $\Delta\lambda.T = 3288 \mu\text{m.K}$.

Ainsi, $\frac{\lambda_m}{\Delta\lambda} = 0,83$.

Densité totale d'énergie :

$$\int_{\frac{\lambda_m}{2}}^{8.\lambda_m} u_\lambda d\lambda = 0,98 \cdot \int_0^{+\infty} u_\lambda d\lambda.$$

- Ordre de grandeur :



- Rayonnement fossile :

1964 : Wilson et Penzias ont découvert un rayonnement venant de l'espace, ayant les caractéristiques suivantes :

Le rayonnement était isotrope,

u_λ avait la répartition spectrale d'un rayonnement d'équilibre $\lambda_m = 1\text{mm}$ ($T = 2,72\text{K}$)

Ce rayonnement avait été prédit par Gamow (1948) si on faisait l'hypothèse qu'il y avait vraiment eu un big-bang (et ce rayonnement se refroidit avec l'expansion de l'univers).

B) Le corps noir

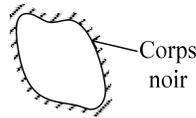
1) Définition

C'est un corps pour lequel $\alpha_\lambda = 1$ quels que soient λ et \vec{u} .

Ainsi, un corps noir absorbe toutes les radiations.

$$(\alpha_\lambda = \frac{\delta^3 \phi^a}{\delta^3 \phi^i})$$

2) Emission du corps noir à l'équilibre thermique



- Luminance :

$$\delta^3 \phi^e = L_\lambda^{CN} \cos \theta . dS . d\Omega . d\lambda$$

$$\text{Et } \delta^3 \phi^0 = L_\lambda^0 \cos \theta . dS . d\Omega . d\lambda = \delta^3 \phi^e + \underbrace{\delta^3 \phi^r}_{=0}$$

$$\text{Donc } L_\lambda^{CN} = L_\lambda^0 .$$

- Ainsi, le corps noir émet selon la loi de Lambert.
- Le corps noir absorbe toutes les longueurs d'onde, mais émet aussi toutes les longueurs d'onde.

- Exitance :

$$\text{On a } M_\lambda^{CN} = M_\lambda^0 \text{ et } M^{CN} = M^0 = \sigma T^4, \text{ donc la loi de Stefan est vérifiée.}$$

- Loi de Wien :

$$M_\lambda^0 = \frac{c}{4} u_\lambda, \text{ donc } M_\lambda^{CN} = \frac{c}{4} u_\lambda, \text{ et } \lambda_m T = 2898 \mu\text{m.K} .$$

3) Emission du corps noir hors d'équilibre

- Hypothèse :

On suppose que T est défini au moins localement.

Le flux *émis* garde les caractéristiques du rayonnement d'équilibre (au moins localement)

Ainsi, on a toujours $L^{CN} = L^0$, $M^{CN} = M^0 = \sigma T^4$, et $\lambda_m T = 2898 \mu\text{m.K}$.

- Exemple :

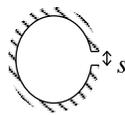
Les étoiles peuvent être considérées comme des corps noirs.

Ainsi, $\lambda_m T \approx 2989 \mu\text{m.K}$ (T : température de surface)
 Pour le soleil : $\lambda_m = 0,5 \mu\text{m}$ (jaune), donc $T_s \approx 6000\text{K}$.
 Etoile bleue : $T > T_s$
 Etoile rouge : $T < T_s$.

4) Réalisation d'un corps noir

On ne peut pas réaliser de corps noir parfait pour toute la gamme de longueurs d'onde, mais au moins localement.

- Surface noircie : $\alpha_\lambda = 1$ pour le visible.
- Le plâtre est un bon corps noir pour les rayons infrarouges.
- Astuce :



Le rayonnement d'équilibre de l'enceinte est peu perturbé si la section du trou est suffisamment petite.

Dans ce cas, la petite pastille peut être considérée comme du corps noir :

- Un rayon qui entre dans l'enceinte par le trou a de fortes chances d'être totalement absorbé avant de ressortir.
- Le rayonnement qui sort par cette pastille sera du rayonnement d'équilibre.

C) Les corps non noirs

On a alors $\alpha_\lambda \neq 1$.

1) Emissivité

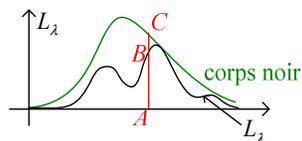
- Définition :

On a $\delta^3 \phi^e = L_\lambda \cos \theta . dS . d\Omega . d\lambda$

Et $\delta^3 \phi^0 = L_\lambda^0 \cos \theta . dS . d\Omega . d\lambda = \delta^3 \phi^e + \delta^3 \phi^r$

Donc $L_\lambda \leq L_\lambda^0$.

On définit alors l'émissivité par $L_\lambda = \epsilon_\lambda L_\lambda^0$.



On a $\epsilon_\lambda = \frac{AB}{AC}$.

- Propriétés :

$$0 \leq \epsilon_\lambda \leq 1$$

ϵ_λ dépend de la longueur d'onde et de la température.

Pour un corps noir, $\varepsilon_\lambda = 1$ quelles que soient la température et la longueur d'onde.

- Exitance monochromatique :

$$M_\lambda = \pi.L_\lambda \text{ (loi de Lambert)}$$

$$\text{Et } M_\lambda^0 = \pi.L_\lambda^0.$$

$$\text{Donc } M_\lambda = \varepsilon_\lambda.M_\lambda^0.$$

Exitance totale :

$$M = \int M_\lambda d\lambda = \int \varepsilon_\lambda M_\lambda^0 d\lambda.$$

On définit alors l'émissivité moyenne : $M = \varepsilon.M_0$.

$$\text{Ainsi, } M = \varepsilon.\sigma.T^4.$$

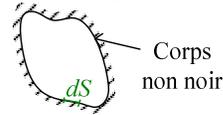
On admet que si le corps non noir n'est pas à l'équilibre, mais à l'équilibre thermique interne (température définie localement), la formule reste valable.

2) Loi de Kirchhoff

$$\alpha_\lambda = \varepsilon_\lambda$$

Démonstration :

On considère un corps non noir à l'équilibre thermodynamique (pour un corps noir, l'égalité est déjà vraie) :



- Bilan global :

$$\delta\phi^a = \delta\phi^e \text{ (on est à l'équilibre)}$$

$$\delta\phi^e = \int M_\lambda d\lambda.dS = \left(\int \varepsilon_\lambda M_\lambda^0 d\lambda \right) dS.$$

$$\delta\phi^a = \left(\int \alpha_\lambda M_\lambda^0 d\lambda \right) dS.$$

$$\text{Donc déjà } \int \varepsilon_\lambda M_\lambda^0 d\lambda = \int \alpha_\lambda M_\lambda^0 d\lambda$$

- Bilan détaillé :

$\varepsilon_\lambda M_\lambda^0 = \alpha_\lambda M_\lambda^0$: l'enceinte est à l'équilibre, donc les longueurs d'onde absorbées seront réémises avec la même énergie.

$$\text{Ainsi, } \varepsilon_\lambda = \alpha_\lambda.$$

- On admet que même si le corps n'est pas à l'équilibre, l'égalité reste vraie.

3) Conséquences

On a alors $M_\lambda = \alpha_\lambda M_\lambda^0$. Ainsi, un corps ne peut pas émettre une radiation qu'il ne peut pas absorber.

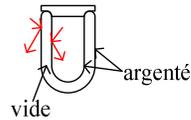
Attention, le fait que $M_\lambda = 0$ peut signifier deux choses :

- Soit $\alpha_\lambda = 0$, et le corps ne peut pas émettre dans cette longueur d'onde.

- Soit $M_\lambda^0 = 0$ et le corps n'émet pas cette longueur d'onde car il ne la reçoit pas (exemple : un objet dans le noir n'émet aucune onde visible, mais à la lumière du jour il émet des ondes visibles)

4) Application

- Vase Dewar :



Paroi réfléchissante : $\alpha_\lambda = 0$ pour le visible et les rayons infrarouges.

Donc $\varepsilon_\lambda = 0$, donc la bouteille n'émet pas de photons.

Ainsi, on peut conserver des boissons aussi bien chaudes ($\alpha_\lambda = 0$) que froides ($\varepsilon_\lambda = 0$).

- Si on veut refroidir un moteur :

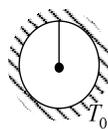


On aura donc $\varepsilon_\lambda \approx 1$, il émet beaucoup de rayonnement.

Mais on aura aussi $\alpha_\lambda \approx 1$, il faut donc le mettre à l'abri de rayonnements extérieurs.

IV Compléments

A) Loi de Newton du rayonnement



Boule d'aluminium, rayon $R \ll R_{\text{enceinte}}$. A $t = 0$, $T = T_1$.

1) Analyse

- $T_1 \neq T_0$; ce n'est pas un rayonnement d'équilibre.
- Quand $t \rightarrow +\infty$, $T \rightarrow T_0$
- On assimile la sphère à un corps noir (pour simplifier)
- On peut considérer que l'enceinte est un corps noir (la boule est suffisamment petite pour ne pas perturber le rayonnement d'équilibre)

2) Transferts d'énergie

Sur la boule :

$$\phi^R = \phi^p - \phi^i$$

- $\phi^p = \phi^e = M^0 s = \sigma T^4 \times 4\pi R^2$

- Calcul de ϕ^i :

- Méthode 1 :

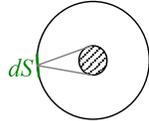
$$\phi^i = f(T_0).$$

A l'équilibre de rayonnement, $\phi^i = \phi^p$ et $T = T_0$.

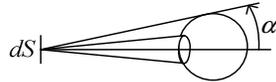
Donc $\phi^i = \sigma T_0^4 \times 4\pi R^2$.

Ainsi $f(T_0) = \sigma T_0^4 \times 4\pi R^2$.

- Méthode 2 :



$$\delta^2 \phi^i = L^0 \cos \theta \times d\Omega \cdot dS$$



Donc $\delta^2 \phi^i = L^0 \cos \theta \times 2\pi \cdot \sin \theta \cdot d\theta \cdot dS$

Soit $\delta \phi^i = L^0 \pi \cdot \sin^2 \alpha \cdot dS$

Et $\delta \phi^i = \underbrace{\pi \cdot L^0}_{M^0} \times \underbrace{S \sin^2 \alpha}_{= S \frac{R^2}{R_{enceinte}^2} = 4\pi \cdot R^2}$

- Conductance surfacique de rayonnement :

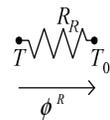
$$\phi^R = \sigma S (T^4 - T_0^4).$$

Si $T \neq T_0$ (peu différent), on a $T^4 = T_0^4 + 4T_0^3 (T - T_0)$,

Et $\phi^R = \underbrace{4\sigma \cdot s T_0^3}_{\Gamma_R} (T - T_0)$

$$R_R = \frac{1}{4\sigma \cdot s T_0^3}.$$

Modélisation :



Conductance surfacique de rayonnement : $4\sigma \cdot T_0^3$

3) Bilan énergétique

- Hypothèse :

On suppose que les échanges thermiques dans la petite boule se font rapidement par rapport au temps caractéristique de réchauffement (c'est-à-dire que T est uniforme dans la boule)

- Pendant dt :

$$dH = m \cdot c \cdot dT$$

et $dH = -\phi^R \cdot dt$.

$$\text{Donc } mc.dT = -4T_0^3 \sigma.s.(T - T_0)dt$$

$$\text{Soit } \frac{dT}{T - T_0} = \frac{-4T_0^3 \sigma.s}{m.c} dt,$$

$$\text{donc } T - T_0 = (T_1 - T_0)e^{-t/\tau} \text{ où } \tau = \frac{m.c}{4T_0^3 \sigma.s} = \frac{\frac{4}{3}\pi.R^3 \rho.c}{4T_0^3 \sigma.4\pi.R^2} = \frac{\rho.c.R}{12T_0^3 \sigma}.$$

- Discussion :

Le temps de thermalisation est proportionnel à R_1 .

- Application numérique :

$$\rho_{Al} = 2700 \text{kg.m}^{-3}, c_{Al} = 900 \text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}, R = 1 \text{cm}, T_0 = 0^\circ\text{C}$$

On trouve $\tau = 1760 \text{s} \sim 30'$.

- Retour sur l'hypothèse $T(\vec{r})$:

Temps caractéristique de diffusion : τ_D .

Si $\tau_D \ll \tau$, l'hypothèse est valable. On a :

$$[D] = \left[\frac{\lambda}{\rho c} \right] = L^2 t^{-1}.$$

On peut donc considérer que $D \sim \frac{R^2}{\tau_D}$, soit $\tau_D \sim \frac{R^2}{D}$.

L'hypothèse est donc valide si $\frac{R^2}{D} \ll \frac{\rho.c.R}{12T_0^3 \sigma}$

$$\text{Soit } R \ll \frac{\rho.c.D}{12T_0^3 \sigma} \text{ ou } R \ll \frac{\lambda}{12T_0^3 \sigma}.$$

On a $\lambda_{Al} = 200 \text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$.

On doit donc avoir $R \ll 14 \text{m}$.

B) Evaluation de la température terrestre

Hypothèses :

- On suppose que la Terre et le Soleil émettent comme des corps noirs.
- Entre les deux, il y a le vide
- Terre : température de surface T uniforme.

On cherche la température terrestre T_T .

On donne $T_S = 5800 \text{K}$, $R_T = 6400 \text{km}$, $R_S = 7.10^5 \text{km}$ et $d = 150.10^6 \text{km}$.

On a : $\phi^R = \phi^p - \phi^i = 0$

$$- \phi^p = \sigma.T_T^4 \times 4\pi.R_T^2$$

- Calcul de ϕ^i :

$$\text{Flux émis par le soleil : } \sigma.T_S^4 \times 4\pi.R_S^2.$$

$$\text{En direction de la Terre : } \phi^i = \sigma.T_S^4 \times 4\pi.R_S^2 \times \frac{\Omega}{4\pi}$$

Avec $\Omega \approx \frac{\pi.R_T^2}{d^2}$ (rappel : pour une surface élémentaire, $d\Omega = \frac{d\vec{S} \cdot \vec{r}}{r^3}$)

Ainsi, $\phi^i = \sigma.T_S^4 \times 4\pi.R_S^2 \times \frac{R_T^2}{4d^2}$

Comme $\phi^p = \phi^i$, on en tire $T_T = T_S \sqrt{\frac{R_S}{2d}}$.

Application numérique :

$T_T = 280\text{K} = 7^\circ\text{C}$, ce qui est une température plutôt faible par rapport à celle observée.

Si on prend en compte le gradient thermique de la Terre :

On a toujours $\phi^R = \phi^p - \phi^i = \sigma.T_T^4 S_T - \sigma.T_S^4 \times S_S \times \frac{\Omega}{4\pi}$

Mais aussi $\phi^{\text{cond}} = -\lambda \frac{dT}{dr} S_T$.

Donc ici $\phi^R = \phi^{\text{cond}}$ (continuité à la limite)

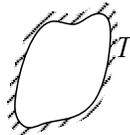
Ainsi, $T_T^4 = T_S^4 \frac{R_S^2}{4d^2} - \frac{\lambda}{\sigma} \frac{dT}{dr}$, et $\frac{dT}{dr} = 30\text{K.km}^{-1}$.

On trouve alors $T_T' = 280\text{K}$, et $T_T' - T_T = 9.10^{-3}\text{K}$.

Ainsi, le nouveau modèle n'apporte rien de nouveau.

En fait, l'effet de serre joue un rôle important dans la température terrestre (on ne peut pas supposer qu'il y a le vide entre la Terre et le Soleil)

C) Etude thermodynamique du rayonnement d'équilibre



1) Pression de radiation

Quantité de mouvement : $\vec{P} = \frac{h\nu}{c} \vec{u}$

Pression $P = \vec{j}_{P_n} \cdot \vec{n} = \frac{\delta^2 P_n}{dS dt}$ (P_n : quantité de mouvement normale)



On a $P_n = \frac{h\nu}{c} \cos \theta$.

Donc $\delta^2 P_n = \sum_{\substack{i \text{ traversant} \\ dS \text{ pendant} \\ dt \text{ sens } +}} \frac{h\nu_i}{c} \cos \theta_i - \sum_{\substack{i \text{ traversant} \\ dS \text{ pendant} \\ dt \text{ sens } -}} \frac{h\nu_i}{c} \cos \theta_i = 2 \sum_{\substack{i \text{ traversant} \\ dS \text{ pendant} \\ dt \text{ sens } +}} \frac{h\nu_i}{c} \cos \theta_i$

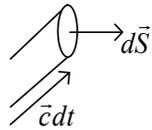
(Car le système est à l'équilibre)

Pour un angle θ_i compris entre θ et $\theta + d\theta$ et une fréquence ν_i comprise entre ν et $\nu + d\nu$:

$\delta^4 N$: nombre de photons qui frappent dS pendant dt avec un angle θ à $d\theta$ près et une fréquence ν à $d\nu$ près.

$$\text{On a alors } \delta^2 P_n = 2 \int_{\nu} \int_{\theta} \frac{h\nu}{c} \cos \theta \cdot \delta^4 N.$$

Nombre de photons ayant une fréquence comprise entre ν et $\nu + d\nu$:
 $dN = Nf(\nu)d\nu$ (on peut obtenir $f(\nu)$ avec la loi de Planck)



Proportion des photons de l'enceinte se trouvant dans le cylindre :

$$\frac{c \cdot dt \cos \theta \cdot dS}{V}$$

Quantité qui va dans le bon sens : $\frac{d\Omega}{4\pi}$

$$\text{Ainsi, } \delta^4 N = Nf(\nu)d\nu \times \frac{c \cdot dt \cos \theta \cdot dS}{V} \times \frac{d\Omega}{4\pi}$$

$$\text{Donc } \delta^2 P_n = 2 \int_{\nu} \int_{\theta} \frac{h\nu}{c} \cos \theta \cdot Nf(\nu)d\nu \times \frac{c \cdot dt \cos \theta \cdot dS}{V} \times \frac{d\Omega}{4\pi}$$

On a $d\Omega = 2\pi \sin \theta \cdot d\theta$

Ainsi :

$$\delta^2 P_n = \frac{1}{V} N \underbrace{\int_{\nu=0}^{+\infty} h\nu f(\nu) d\nu}_{\substack{\text{énergie moyenne d'un} \\ \text{photon} \\ U}} \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta \cdot d\theta}_{1/3} dS dt$$

$$= \frac{U}{V} \times \frac{1}{3} dS dt = \frac{u}{3} dS dt$$

$$\text{Donc } P = \frac{u}{3}.$$

2) Equation d'état

$$P = \frac{\sigma_B T^4}{3}.$$

3) Energie interne

$$U = uV = 3PV = V\sigma_B T^4 \quad (\text{pour un gaz parfait monoatomique, } U = \frac{3}{2}PV)$$

$$\text{Ainsi, } C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = 4V\sigma_B T^3.$$

4) Enthalpie

$$H = U + PV = 4PV = \frac{4}{3} \sigma_B T^4 V$$

$$C_P = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_P : \text{pas de sens, puisque } T \text{ et } P \text{ sont liés.}$$

5) Entropie

Expression :

$$\begin{aligned} dS &= \frac{dU}{T} + \frac{P}{T} dV = 4\sigma_B T^2 V dT + \sigma_B T^3 dV + \frac{1}{3} \sigma_B T^3 dV \\ &= 4\sigma_B T^2 V dT + \frac{4}{3} \sigma_B T^3 dV \end{aligned}$$

On remarque que $S = \frac{4}{3} \sigma_B T^3 V + \text{cte.}$

On choisit $\lim_{T \rightarrow 0} S = 0$

(3^{ème} principe de la thermodynamique : principe de Nernst)

Ainsi, $S = \frac{4}{3} \sigma_B T^3 V$.

Application :

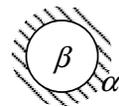
- Détente isentropique : $T^3 V = \text{cte}$, donc $PV^{4/3} = \text{cte}$.
- Si le volume est une boule de rayon R : $T \times R = \text{cte}$

6) Enthalpie libre, potentiel chimique

- $G = H - TS = \frac{4}{3} \sigma_B T^4 V - \frac{4}{3} \sigma_B T^3 V \times T = 0$

- Potentiel chimique :

$$dG = -SdT + VdP + \mu dn. \text{ Donc } \mu = \left(\frac{\partial G}{\partial n} \right)_T = 0.$$



On a $dU_\alpha = T_\alpha dS_\alpha - P_\alpha dV_\alpha + \sum \mu_{i,\alpha} dn_{i,\alpha}$ et $dU_\beta = T_\beta dS_\beta - P_\beta dV_\beta + \mu_\beta dn_\beta$

De plus, $dU_\alpha + dU_\beta = 0$, et $dS_\alpha + dS_\beta = 0$.

Donc $0 = (T_\alpha - T_\beta) dS_\alpha + \mu_\beta dn_\beta$, soit $T_\alpha = T_\beta$ et $\mu_\beta = 0$