Chapitre 1 : Eléments de théorie générale

I Séries de Fourier

A) Développement d’une fonction périodique en série de Fourier

1) Série d’exponentielles imaginaires

- Théorème de Fourier :

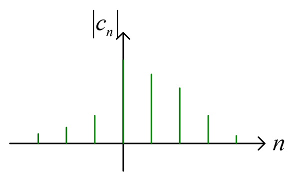
Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ périodique de période L, de pulsation $k=\dfrac{2\pi}{L}$. Si f est de carré sommable sur $[0,L]$, alors $f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{ik_n x}$ où, pour $n\in\mathbb{Z}$:

$$k_n = n\times\frac{2\pi}{L}$$

Et $c_n=\dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{x_0}^{x_0+L} f(x)e^{-ik_n x}dx$

- Spectre de Fourier :

C’est $\{|c_n|, n\in\mathbb{Z}\}$:



(En général, $|c_n|$ décroît quand $|n|$ augmente)

2) Série de sinus et de cosinus

- Cas général :

$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos k_n x+\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin k_n x$ avec $a_0=\dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{x_0}^{x_0+L} f(x)dx$,

$a_n=\dfrac{2}{L}\displaystyle\int_{x_0}^{x_0+L} f(x)\cos(k_n x)dx$ et $b_n=\dfrac{2}{L}\displaystyle\int_{x_0}^{x_0+L} f(x)\sin(k_n x)dx$

- Parité :

Si $f(x)$ est paire, on aura $\forall n\in\mathbb{N}, b_n=0$

Si $f(x)$ est impaire, on aura $\forall n\in\mathbb{N}, a_n=0$

- Cas d’une fonction réelle :

Si $a_n, b_n\in\mathbb{R}$, $a_n\cos(k_n x)+b_n\sin(k_n x)=a'_n\cos(k_n x+\varphi_n)$

Et donc $f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{+\infty} a'_n\cos(k_n x+\varphi_n)$

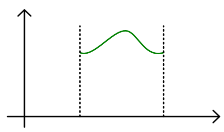
Le terme pour $n=1$ s’appelle le fondamental ou la première harmonique.
Celui pour $n=2$ s’appelle deuxième harmonique, etc.

3) Egalité de Bessel–Parseval

$$\frac{1}{L}\int_{x_0}^{x_0+L}|f(x)|^2\,dx=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n|^2=|a_0|^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|^2+|b_n|^2$$

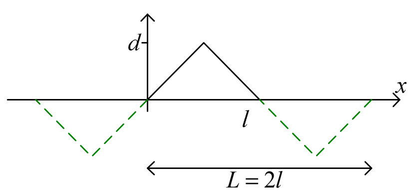
B) Développement d'une fonction de support fermé

1) Principe



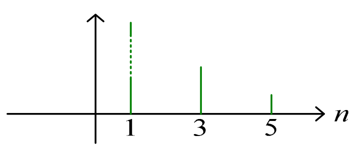
On peut ensuite reproduire le motif en une fonction périodique (éventuellement en ajoutant autre chose pour un raccordement continu…)

2) Exemple



On a $k_n=2n\dfrac{\pi}{L}=n\dfrac{\pi}{l}$, et la fonction est impaire :

On trouve alors $f(x)=\dfrac{8d}{\pi^2}\left(\sin\dfrac{\pi.x}{l}-\dfrac{1}{9}\sin\dfrac{3\pi.x}{l}+\dfrac{1}{25}\sin\dfrac{5\pi.x}{l}+\ldots\right)$



C) Fonction spatiale et temporelle

1) Fonctions spatiales

x : abscisse, L : longueur (ou longueur d'onde), $k=\dfrac{2\pi}{L}$: pulsation spatiale.

On a $f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n e^{ik_n x}$.

2) Fonctions temporelles

$x\to t$, $L\to T$, $\omega=\dfrac{2\pi}{T}$: pulsation temporelle ; $f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n e^{i\omega_n t}$.

II Transformation de Fourier

A) Intégrale de Fourier

1) L'intégrale de Fourier comme limite d'une série de Fourier

On considère f définie sur $\mathbb{R}$, non périodique à priori.
On considère f_L périodique de période L telle que $f_L(x) = f(x)$ pour $x \in \left]\frac{-L}{2}, \frac{L}{2}\right[$

Ainsi, $f_L(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(e^{ik_n x} \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{-ik_n x'} f(x') dx' \right)$

On a $k_{n+1} = \frac{2\pi}{L}(n+1), k_n = \frac{2\pi}{L} n$. Donc $\frac{1}{L} = \frac{k_{n+1} - k_n}{2\pi}$

Et $f_L(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(e^{ik_n x} \frac{k_{n+1} - k_n}{2\pi} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{-ik_n x'} f(x') dx' \right)$

Quand $L \to +\infty$:

$f_L(x) \to f(x)$, $k_{n+1} - k_n \to dk$, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \to \int_{-\infty}^{+\infty}$

Et ainsi $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ikx} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' e^{-ikx'} f(x')$

2) Transformée de Fourier

- Définition :

La transformée de Fourier de $f(x)$ est $\boxed{\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} f(x) dx}$

- Ainsi, on a le théorème (théorème de Fourier) :

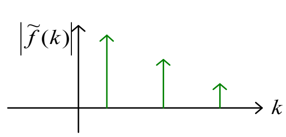
$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} \tilde{f}(k) dk}$$

3) Interprétation

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} \tilde{f}(k) dk$$

f est donc la somme continue de fonctions sinusoïdales : $\tilde{f}(k)dk \leftrightarrow c_n$
Si f est périodique :

$\tilde{f}(k) = \sqrt{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \delta(k - k_n)$ où $k_n = n\frac{2\pi}{L}$:



B) Propriétés

On note $\mathfrak{F} : f \mapsto \tilde{f}$

Transposée :

$$f^*(x) \underset{\mathfrak{F}}{\rightarrow} \tilde{f}^*(-k)$$

Translation :

$$f(x-x_0) \underset{\mathfrak{F}}{\rightarrow} e^{-ikx_0}\tilde{f}(k)$$

$$f(x)e^{ik_0x} \underset{\mathfrak{F}}{\rightarrow} \tilde{f}(k-k_0)$$

Dilatation :

$$\boxed{f(ax) \underset{\mathfrak{F}}{\rightarrow} \frac{1}{|a|}\tilde{f}\left(\frac{k}{a}\right)}$$

Avec $a = 1$: $\mathfrak{F}$ conserve la parité.

Dérivation :

$$f^{(n)}(x) \underset{\mathfrak{F}}{\rightarrow} (ik)^n \tilde{f}(k)$$

$$\tilde{f}^{(n)}(k) \underset{\mathfrak{F}}{\rightarrow} (-ix)^n f(x)$$

Egalité de Parseval–Plancherel :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{f}(k)|^2 dk$$

C) Exemples

1) Fonction porte

- Définition :

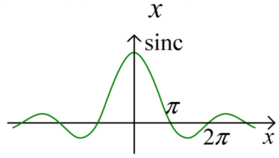
$$\pi(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } |x| \le \frac{1}{2} \\ 0 \text{ si } |x| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

- Transformation de Fourier de $\pi\left(\frac{x}{l}\right)$:

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ikx} \pi\left(\frac{x}{l}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-l/2}^{l/2} dx e^{-ikx}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{-1}{ik}\left(-2i\sin\frac{kl}{2}\right)\right) = \frac{l}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin\frac{kl}{2}}{\frac{kl}{2}} = \frac{l}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{sinc}\left(\frac{kl}{2}\right)$$

($\operatorname{sinc}(x) = \dfrac{\sin x}{x}$)



- Analyse :

On a $\Delta x = l$, $\Delta k \approx 4\pi / l$, donc $\Delta x \Delta k \approx 4\pi$

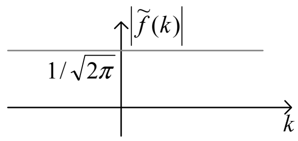
2) Distribution delta de Dirac

- Transformée :

$f(x) = \delta(x - x_0)$

$\tilde{f}(k) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} \delta(x - x_0) dx = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx_0}$

- Analyse :



- Cas particulier :

Si $x_0 = 0$, on a $\tilde{f}(k) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$

3) Fonction sinusoïdale

$f(x) = e^{ik_0x}$

$\tilde{f}(k) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ikx} e^{ik_0x} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-i(k-k_0)x}$

On avait $\delta(x - x_0) \underset{\mathfrak{F}}{\rightarrow} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx_0} \underset{\mathfrak{F}^{-1}}{\rightarrow} \delta(x - x_0)$

Donc $\delta(x - x_0) = \dfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ikx} e^{-ikx_0} = \dfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{-ik(x_0 - x)}$

Et par identification : $\delta(k_0 - k) = \dfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ix(k-k_0)}$

(On a changé $k \rightarrow x$, $x_0 \rightarrow k$, $x \rightarrow k_0$)

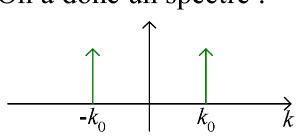
C'est-à-dire $\delta(k - k_0) = \dfrac{\tilde{f}(k)}{\sqrt{2\pi}}$

Donc $e^{ik_0x} \underset{\mathfrak{F}}{\rightarrow} \sqrt{2\pi} \times \delta(k - k_0)$

Remarque :

$\cos(k_0x) = \dfrac{1}{2}(e^{ik_0x} + e^{-ik_0x})$

On a donc un spectre :

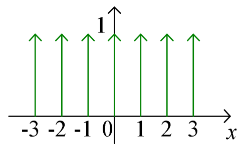


Et la transformée : $\tilde{f}(k) = \dfrac{\sqrt{2\pi}}{2}(\delta(k - k_0) + \delta(k + k_0))$

4) Peigne de Dirac

- Définition :

$\cup(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(x-n)$. ($\cup$: « cha », lettre cyrillique)

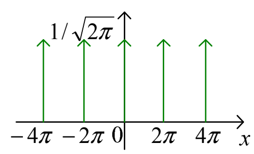


- Transformée :

$$\tilde{\cup}(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}dx e^{-ikx}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(x-n)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{-ikn}$$

On peut montrer que $\cup(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{2i\pi.n.x}$

Ainsi, $\tilde{\cup}(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cup(\frac{k}{2\pi})$



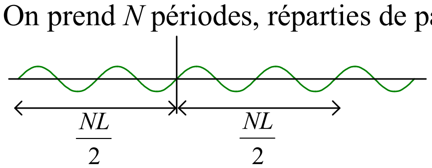
5) Train sinusoïdal

- Définition :

$f(x)=a\sin(k_0x)$

Période : $L=\frac{2\pi}{k_0}$

On prend N périodes, réparties de part et d'autre de 0 :



Ainsi, $f(x)=a\sin(k_0x)$ si $x\in\left[\frac{-NL}{2},\frac{NL}{2}\right]$, et 0 sinon.

Largeur du train : NL

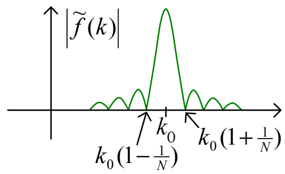
Remarque :

$$f(x)=ae^{ik_0x}\pi\left(\frac{x}{NL}\right)$$

- Transformée :

$$\tilde{f}(k)=\frac{2ak_0}{i\sqrt{2\pi}}\frac{\sin\left(N\pi\frac{k-k_0}{k_0}\right)}{k^2-k_0^2}$$

(Vu après)



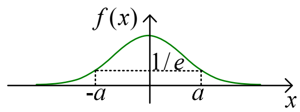
- Analyse :

Largeur : $\Delta x = NL$ pour f, $\Delta k = \dfrac{2k_0}{N} = \dfrac{4\pi}{NL}$ pour $\tilde{f}$.

Ainsi, $\Delta x \Delta k = 4\pi$

6) Gaussienne

$f(x) = e^{-x^2/a^2}$, où $a = \text{cte}$



Largeur : $\Delta x \sim a$

$\tilde{f}(k) = \dfrac{a}{\sqrt{2}} e^{-\frac{k^2 a^2}{4}}$; c'est aussi une Gaussienne, de largeur $\Delta k \sim \dfrac{2}{a}$,

donc $\Delta x \Delta k \sim 2$

D) Transformée de Fourier dans l'espace à trois dimensions

$$f(x,y,z) \underset{\mathfrak{F}_x}{\longrightarrow} \tilde{f}(k_x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx.e^{-ik_x x} f(x,y,z)$$

$$\underset{\mathfrak{F}_y}{\longrightarrow} \tilde{f}(k_x,k_y,z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy.e^{-ik_y y} \int_{-\infty}^{+\infty} dx.e^{-ik_x x} f(x,y,z)$$

Puis :

$$\tilde{f}(k_x,k_y,k_z) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz.e^{-ik_z z} \int_{-\infty}^{+\infty} dy.e^{-ik_y y} \int_{-\infty}^{+\infty} dx.e^{-ik_x x} f(x,y,z)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint dxdydz e^{-i(k_x x + k_y y + k_z z)} f(x,y,z)$$

On introduit $\vec{r} = (x,y,z)$, $\vec{k} = (k_x,k_y,k_z)$

Ainsi, $\tilde{f}(\vec{k}) = \dfrac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint d^3 r e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} f(\vec{r})$

Et $f(\vec{r}) = \dfrac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint d^3 k e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \tilde{f}(\vec{k})$

E) Transformée de Fourier spatiotemporelle

$f(x,y,z,t) \to \tilde{f}(k_x,k_y,k_z,\omega)$, ou $f(\vec{r},t) \to \tilde{f}(\vec{k},\omega)$.

On a $\widetilde{f}(\vec{k},\omega)=\dfrac{1}{4\pi^2}\iiiint d^3r.dt\exp(-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega.t))f(\vec{r},t)$

(On prend la convention inverse pour *t* dans le signe de l'exponentielle)

Et $f(\vec{r},t)=\dfrac{1}{4\pi^2}\iiiint d^3r.dt\exp(i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega.t))\widetilde{f}(\vec{k},\omega)$

III Produit de convolution

A) Définition

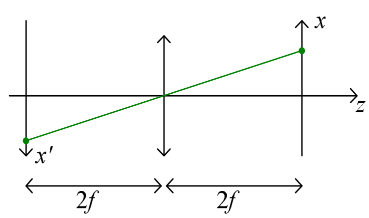
$f_1,f_2\rightarrow f=f_1\otimes f_2$ défini par :

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(y)f_2(y')\delta(x-y-y')dydy'$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(y)f_2(x-y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x-y)f_2(y)dy$$

B) Utilisation du produit de convolution

Montage 4*f* :

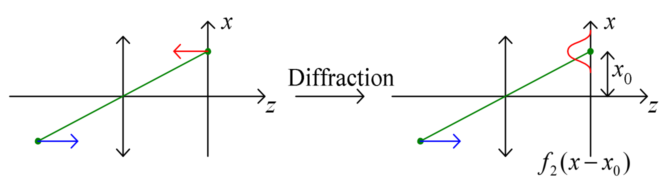


On considère l'objet constitué de l'axe *x'*.

On a une luminosité ponctuelle $f_1(x')$.

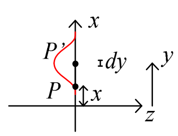
Selon l'optique géométrique, l'image est caractérisée par $f(x)=f_1(x)$

A cause de la diffraction, il n'en est pas ainsi :



L'image d'un point lumineux (un « Dirac » de lumière) n'est pas un point lumineux, mais une tache, avec un étalement $f_2(x-x_0)$

On décompose alors l'axe *x* en petites quantités :



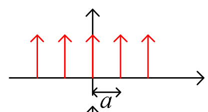
Contribution de dy en *P'* à la luminosité en *P* : $f_2(x-y)f_1(y)dy$

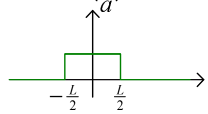
Donc en sommant : $f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(x-y)f_1(y)dy$

Ainsi, le produit de convolution permet « d'étaler » une fonction sur une autre.

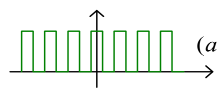
C) Exemple : convolution d'une porte et d'un peigne :

$$\cup\left(\frac{x}{a}\right)\otimes\pi\left(\frac{x}{L}\right)$$





$$\cup\left(\frac{x}{a}\right)\otimes\pi\left(\frac{x}{L}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(y-an)\times\pi\left(\frac{x-y}{L}\right)dy=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\pi\left(\frac{x-an}{L}\right)$$



D) Propriétés

- $\otimes$ est commutatif
- δ est l'élément neutre du produit de convolution :

$$(f\otimes\delta)(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(y)\delta(x-y)dy=f(x)$$

- $\mathfrak{F}(f_1\otimes f_2)=\sqrt{2\pi}.\mathfrak{F}(f_1)\times\mathfrak{F}(f_2)$:

On note $f=f_1\otimes f_2$:

$$\tilde{f}(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}dxe^{-ikx}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(y)f_2(y')\delta(x-y-y')dydy'$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\iint dydy'\,f_1(y)f_2(y')\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}dxe^{-ikx}\delta(x-y-y')}_{e^{-ik(y+y')}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}dy.e^{-iky}f_1(y)\int_{-\infty}^{+\infty}dy'.e^{-iky'}f_1(y')$$

- De la même façon, $\mathfrak{F}(f_1\times f_2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathfrak{F}(f_1)\otimes\mathfrak{F}(f_2)$

E) Application au train sinusoïdal

On pose $f=f_1\times f_2$, avec :

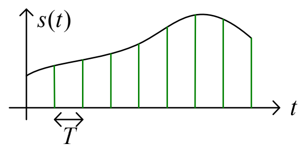
$f_1(x)=a\sin(k_0x)$, donc $\tilde{f}_1(k)=\frac{a\sqrt{2\pi}}{2i}(\delta(k-k_0)-\delta(k+k_0))$

Et $f_2(x)=\pi\left(\frac{x}{NL}\right)$, donc $\tilde{f}_2(k)=\frac{NL}{\sqrt{2\pi}}\text{sinc}\left(\frac{kNL}{2}\right)$

Ainsi, $\mathfrak{F}(f)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\tilde{f}_1\otimes\tilde{f}_2=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{a\sqrt{2\pi}}{2i}\frac{NL}{\sqrt{2\pi}}\text{sinc}\left(\frac{(k-k_0)NL}{2}\right)-...$

IV Echantillonnage

A) Définition

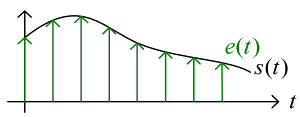


T : pas d'échantillonnage.
A la fonction $s(t)$ on associe $\{s_n, n \in \mathbb{Z}\}$ où $s_n = s(nT)$

B) Echantillonnage par un peigne de Dirac

1) Principe

$$e(t) = s(t) \times \sqcup\left(\frac{t}{T}\right)$$



2) Echantillonnage d'un signal sinusoïdal de pulsation ω_0.

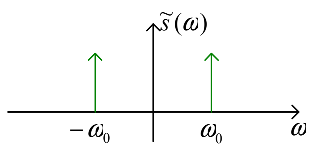
- Spectre de Fourier du signal échantillonné :

$$\tilde{e}(\omega) = \sqrt{2\pi}\,\tilde{s}(\omega) \otimes \tilde{\sqcup}\left(\frac{\omega 2\pi}{\Omega}\right) \quad (\Omega = \frac{2\pi}{T})$$

- $\tilde{s}(\omega)$:

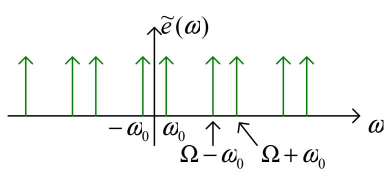
On a $s = S\cos\omega_0 t = \dfrac{S}{2}(e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t})$

Donc $\tilde{s}(\omega) = \dfrac{S}{2}\sqrt{2\pi}(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0))$

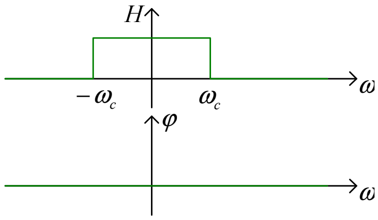


- $\tilde{\sqcup}\left(\dfrac{\omega 2\pi}{\Omega}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqcup\left(\dfrac{\omega}{\Omega}\right)$

- $\tilde{e}(\omega) = \sqrt{2\pi}\,\dfrac{S}{2}(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)) \otimes \sqcup\left(\dfrac{\omega}{\Omega}\right)$

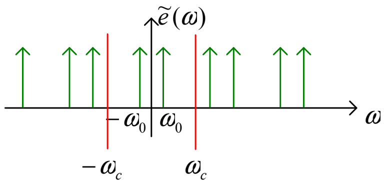


- Reconstitution du signal de départ :
- Filtre passe-bas idéal : c'est une fonction de transfert $\underline{H}(\omega) = He^{i\varphi}$ telle que :



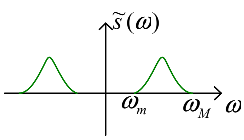
- Condition de Shannon pour pouvoir reconstituer le signal :

Il faut trouver ω_c tel que $\omega_0 < \omega_c < \Omega - \omega_0$:

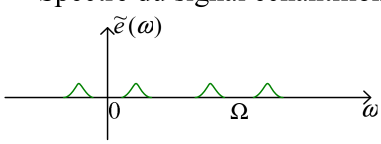


Il faut donc que $\omega_0 < \Omega - \omega_0$, c'est-à-dire que les fourches ne se croisent pas.

3) Echantillonnage d'un signal de spectre borné



- Spectre du signal échantillonné :



- Condition de Shannon :

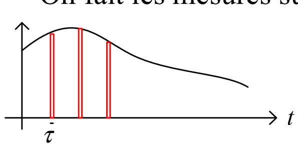
Il faut ici que $\omega_M < \omega_c < \Omega - \omega_M$, soit $\Omega > 2\omega_M$.

- Théorème de Shannon :

Toute l'information d'un signal est contenue dans l'échantillonnage si l'échantillonnage a une pulsation $\Omega > 2\omega_M$ où ω_M est un majorant des pulsations du spectre de s.

C) Echantillonnage réel

- On fait les mesures sur un temps fini :



- On n'échantillonne pas indéfiniment : $e(t) = \ldots \times \pi$
- Le passe bas idéal n'existe pas.

(Le deuxième point nuit au théorème de Shannon, mais pas le premier)