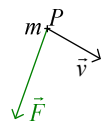


Chapitre 9 : Energie

I Energie cinétique

A) Théorème de l'énergie cinétique pour un point matériel



$$\left. \begin{array}{l} \vec{F} = m\vec{a} \\ d\vec{r} = \vec{v}dt \end{array} \right\} \vec{F} \cdot d\vec{r} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}dt = md\vec{v} \cdot \vec{v}$$

Donc $\delta W = d(\frac{1}{2}mv^2) = dE_c$, soit $W = \Delta E_c$.

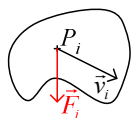
Remarque :

De même que le principe fondamental de la dynamique, ce théorème relie une caractéristique des forces à une caractéristique du mouvement.

On trouve parfois le théorème de la puissance cinétique :

$$P = \frac{dE_c}{dt} ; \frac{dE_c}{dt} : \text{puissance cinétique } (P_c)$$

B) Théorème de l'énergie cinétique pour un système de points matériels



$$dE_{c_i} = \delta W_i.$$

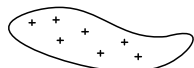
$$\vec{F}_i = \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow i} + \sum_j \vec{F}_{j \rightarrow i}.$$

Donc $\delta W_i = \delta W_{i,\text{ext}} + \delta W_{i,\text{int}}$, d'où $\sum dE_{c_i} = \sum \delta W_{i,\text{ext}} + \sum \delta W_{i,\text{int}}$,

Soit $dE_c = \delta W_{\text{ext}} + \delta W_{\text{int}}$, ou $\Delta E_c = W_{\text{ext}} + W_{\text{int}}$. ($P_c = P_{\text{ext}} + P_{\text{int}}$)

Attention : il faut prendre en compte le travail des forces intérieures *et* extérieures.

C) Théorème de l'énergie cinétique pour un système macroscopique quelconque



On a $\Delta E_c = W_{\text{ext}} + W_{\text{int}}$.

$$E_c : E_c = E_{c,\text{micro}} + E_{c,\text{macro}}$$

$W : -W_{\text{int}}$: forces de Van der Waals, cohésion... $W_{\text{int}} = -\Delta E_{p,\text{micro}}$.

$$-W_{\text{ext}} = \underbrace{W_{\text{ext,micro}}}_Q + \underbrace{W_{\text{ext,macro}}}_{-\Delta E_{p,\text{macro}} + W}$$

Donc le théorème s'écrit $\Delta E_{c,micro} + \Delta E_{c,macro} = -\Delta E_{p,micro} - \Delta E_{p,macro} + Q + W$

Ou $\underbrace{\Delta E_{c,micro} + \Delta E_{p,micro}}_{\Delta U} + \Delta E_{c,macro} + \Delta E_{p,macro} = Q + W$.

On n'a donc pas intérêt en général à appliquer le théorème d'énergie cinétique, il vaut mieux utiliser les résultats de thermodynamique.

D) Théorème de l'énergie cinétique pour un solide

1) Enoncé

$$\Delta E_{c,macro} = W_{ext,macro} \cdot (W_{ext,macro} \text{ contient les forces de champ et de contact})$$

2) Démonstration

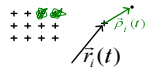
- Pour un solide géométrique :

$E_{c,micro} = 0$: les points matériels sont fixes dans le référentiel du solide.

$W_{int} = 0, W_{ext,micro} = 0$.

Ainsi, la relation précédente devient $\underbrace{\Delta E_{c,micro}}_{=0} + \Delta E_{c,macro} = \underbrace{W_{ext}}_{W_{ext,macro}} + \underbrace{W_{int}}_{=0}$

- Pour un solide réel :



(• : position de la particule ; + : position d'équilibre)

$\langle \vec{\rho}_i(t) \rangle = \vec{0}$. Fréquence de vibration $\nu \sim 6.10^{12}$ Hz

Avec $\tau = 10^{-10}$ s, on a ainsi $\langle \vec{\rho}_i(t) \rangle_{\tau} = \vec{0}$.

- Dans le référentiel R' lié au « solide d'équilibre » :

$E'_{c,macro} = 0$, donc $\Delta E'_{c,macro} = 0$

$W'_{ext,macro} = 0$. En effet :

$$W'_{ext,macro} = \sum \vec{F}_{ext \rightarrow i} \cdot d\vec{\rho}_i$$

Pour $\theta > \tau$, et $\theta \ll \tau'(\vec{F}_{ext \rightarrow i})$ (on peut trouver un tel θ en général) :

On a sur θ : $\vec{F}_{ext \rightarrow i} = \vec{cte}$, et $d\vec{\rho}_i = \vec{0}$.

Donc $\delta W'_{ext,macro} = 0$.

Ainsi, $\underbrace{\Delta E'_{c,macro}}_{=0} + \Delta E'_{c,micro} = W'_{int} + \underbrace{W'_{ext,macro}}_{=0} + \underbrace{W'_{ext,micro}}_{Q'}$

Ou $\Delta E'_{c,micro} = W'_{int} + Q'$

- Dans R :

$\Delta E_{c,micro} = \Delta E'_{c,micro}$; $Q = Q'$; $W'_{int} = W_{int}$.

Donc $\Delta E_{c,micro} = W_{int} + Q$, d'où $\Delta E_{c,macro} = W_{ext,macro}$

E) Théorème de l'énergie cinétique pour un ensemble de solides



$$\Delta E_{c,i} = W_{\text{ext} \rightarrow i} + \sum_j W_{j \rightarrow i}$$

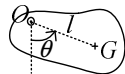
Donc $\Delta E_c = W_{\text{ext}} + W_{\text{int}}$ (W_{ext} et W_{int} sont des travaux *macroscopiques*)

F) Utilisation du théorème de l'énergie cinétique

1) Expression intégrée du principe fondamental de la dynamique

$$dE_c = \delta W$$

$$\text{Donc } \Delta E_c = W.$$



On avait obtenu $J_{\Delta} \ddot{\theta} = -mgl \sin \theta$.

Ici, on a :

$$E_c = \frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2.$$

$$W = W_p = mgl(\cos \theta - \cos \theta_0).$$

$$\text{Donc } \frac{1}{2} J_{\Delta} (\dot{\theta}^2 - \dot{\theta}_0^2) = mgl(\cos \theta - \cos \theta_0).$$

On obtient directement la forme intégrée de la relation précédente.

2) Intérêt et limites

Principe fondamental de la dynamique : 6 relations scalaires.

Théorème de l'énergie cinétique : 1 relation scalaire.

En général, le théorème de l'énergie cinétique ne permet donc pas de déterminer le mouvement.

Conditions pour pouvoir déterminer le mouvement :

- 1 seul degré de liberté
- Et les actions de contact ne travaillent pas.

II Energie potentielle

A) Cas d'une force unique

1) Définition

\vec{F} appliquée en $P(\vec{r})$ dérive d'une énergie potentielle lorsqu'il existe $E_p(\vec{r})$ tel que $\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p$. On dit alors que \vec{F} est conservative.

E_p est définie à une constante additive près.

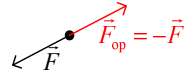
2) Travail

- De \vec{F} :

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\vec{\nabla} E_p \cdot d\vec{r}, \text{ d'où } \boxed{\delta W = -dE_p}.$$

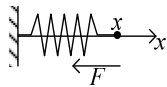
Ou $W = -\Delta E_p$.

- De la force exercée par l'opérateur au cours d'un déplacement quasi-statique :

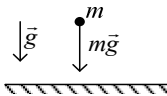


$\delta W_{op} = -\delta W = dE_p$, ou $W_{op} = \Delta E_p$. Attention, il ne doit pas y avoir de variation d'énergie cinétique (déplacement quasi-statique)

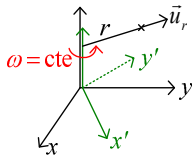
3) Exemples



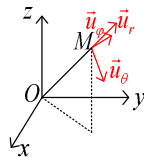
$$\vec{F} = -k(x - x_0)\vec{u}_x ; E_p = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 + \text{cte}$$



$$\vec{F} = -mg\vec{u}_z ; E_p = mgz + \text{cte}.$$



$$\vec{F}_{ie} = m\omega^2 r \vec{u}_r ; E_p = -\frac{1}{2}m\omega^2 r^2 + \text{cte}$$



$\vec{F} = f(r)\vec{u}_r$. Alors F dérive d'une énergie potentielle :

On cherche E_p tel que $\frac{\partial E_p}{\partial r} = -f(r)$, $\frac{\partial E_p}{\partial \theta} = 0$, $\frac{\partial E_p}{\partial \varphi} = 0$.

Soit $\frac{dE_p}{dr} = -f(r)$; toute primitive de $-f(r)$ convient.

4) Contre-exemples

- Actions de contact :
 - de solides
 - de liquides
 - Force de Coriolis $\vec{F}_{ic} = -2m\vec{\Omega}_e \wedge \vec{v}_r$.
- Force de Lorentz $\vec{F}_l = q(\vec{v} \wedge \vec{B})$.

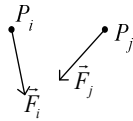
5) Formulation équivalente

Si F dérive d'une énergie potentielle, $\delta W = -dE_p$; y a-t-il réciproque ?

En toute rigueur, non : par exemple, la force de Lorentz et de Coriolis ne travaillent pas, mais ne sont pas nulles.

C'est vrai en fait si F ne dépend pas de la vitesse.

B) Système de forces



1) Définition

On dit que le système $\{(P_i, \vec{F}_i)\}$ dérive d'une énergie potentielle s'il existe $E_p(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n)$ tel que $\forall i, \vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i E_p$.

Remarque :

Pour $E_p(x, y, z)$, on a $\vec{\nabla} E_p = \frac{\partial E_p}{\partial x} \vec{u}_x + \dots$

Pour $E_p(x_1, y_1, z_1, \dots)$, on a $\vec{\nabla}_i E_p = \frac{\partial E_p}{\partial x_i} \vec{u}_x + \frac{\partial E_p}{\partial y_i} \vec{u}_y + \frac{\partial E_p}{\partial z_i} \vec{u}_z$.

On dit dans ce cas que le système de forces est conservatif.

2) Travail

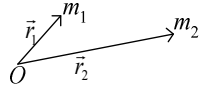
$$\delta W = \sum \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = \left(\frac{\partial E_p}{\partial x_1} dx_1 + \dots \right), \text{ soit } \delta W = -dE_p, \text{ ou } W = -\Delta E_p.$$

Remarque :

Pour un travail quasi-statique, $W_{op} = -W = +\Delta E_p$.

3) Exemple

- L'énergie potentielle gravitationnelle



$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1.$$

$$\vec{F}_1 = Gm_1m_2 \frac{\vec{r}}{r^3} = Gm_1m_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{r^3}$$

$$\vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 = Gm_1m_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{r^3} \cdot d\vec{r}_1, \text{ ce n'est pas une différentielle totale, donc } \vec{F}_1 \text{ ne}$$

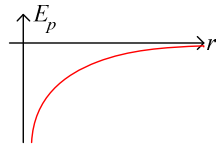
dérive pas d'une énergie potentielle.

C'est la même chose pour $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$.

Pour $\{(P_1, \vec{F}_1), (P_2, \vec{F}_2)\}$:

$$\begin{aligned} \delta W &= \delta W_1 + \delta W_2 = \vec{F}_1 \cdot (d\vec{r}_1 - d\vec{r}_2) = -Gm_1m_2 \frac{\vec{r}}{r^2} \cdot d\vec{r} \\ &= -Gm_1m_2 \frac{d\frac{1}{2}r^2}{r^3} = -Gm_1m_2 \frac{dr}{r^2} = -d\left(-Gm_1m_2 \frac{1}{r}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, $E_p = -\frac{Gm_1m_2}{r} + \text{cte}$



Dans R_1 lié à 1, \vec{r}_1 est fixe.

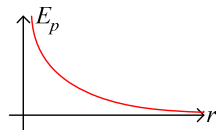
Donc $\underbrace{\delta W_1}_{=0} + \delta W_2 = -dE_p$, et \vec{F}_2 dérive d'une énergie potentielle.

- Energie potentielle électrostatique :

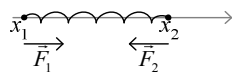
$$G \rightarrow \frac{-1}{4\pi\epsilon_0}, m_1, m_2 \rightarrow q_1, q_2.$$

Ainsi, $E_p = \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} + \text{cte}$

Pour $q_1q_2 > 0$:



- Energie potentielle élastique



$$\text{On a : } \vec{F}_2 = -k(x_2 - x_1 - l_0)\vec{u}_x, \vec{F}_1 = k(x_2 - x_1 - l_0)\vec{u}_x$$

$$\text{Donc } \delta W_1 = k(x_2 - x_1 - l_0)dx_1, \delta W_2 = -k(x_2 - x_1 - l_0)dx_2$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\delta W &= \delta W_1 + \delta W_2 = -k(x_2 - x_1 - l_0)d(x_2 - x_1 - l_0) \\ &= -d\left(\frac{1}{2}k(x_2 - x_1 - l_0)^2\right)\end{aligned}$$

Et $E_p = \frac{1}{2}k(x_2 - x_1 - l_0)^2 + \text{cte}$ ($= \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 + \text{cte}$).

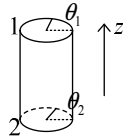
C) Généralisation : énergie potentielle associée à un système d'actions.

1) Définition

On dit qu'un système d'actions dérive d'une énergie potentielle si $\delta W = -dE_p$ quel que soit le déplacement (et $\delta W \neq 0$)

2) Exemple

Couple de torsion exercé par un fil :



pour le fil non tordu : $\theta_1 - \theta_2 = 0$.

$$M_{\Delta_1} = -C(\theta_1 - \theta_2) ; M_{\Delta_2} = -C(\theta_2 - \theta_1).$$

On a $\delta W_1 = -C(\theta_1 - \theta_2)d\theta_1$, $\delta W_2 = -C(\theta_2 - \theta_1)d\theta_2$.

$$\text{Et } \delta W = -C(\theta_2 - \theta_1)d(\theta_2 - \theta_1) = -d\left(\frac{1}{2}C(\theta_2 - \theta_1)^2\right)$$

Donc $E_p = \frac{1}{2}C(\theta_2 - \theta_1)^2 + \text{cte}$.

Remarque :

$$\text{On avait } F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} ; \text{ ici, } M_{\Delta} = -\frac{\partial E_p}{\partial \theta}.$$

III Energie mécanique

A) Définition

$E_m = E_p + E_c$, où E_c est l'énergie cinétique macroscopique, et E_p l'énergie potentielle macroscopique (des actions intérieures et extérieures).

B) Système conservatif

1) Définition

C'est un système pour lequel $E_m = \text{cte}$.

2) Théorème de conservation de l'énergie mécanique (TCEM)

- **Enoncé :**

On considère un système constitué de solides ou de quelques points matériels (pas un système thermodynamique). On suppose que toutes les actions (intérieures et extérieures) soit ne travaillent pas, soit dérivent d'une énergie potentielle.

Alors ce système est conservatif.

- **Démonstration :**

$$\Delta E_{c, \text{macro}} = W_{\text{ext}} + W_{\text{int}} = \underbrace{W_{E_p}}_{-\Delta E_p} + \underbrace{W_{\text{non } E_p}}_{=0}.$$

Donc $\Delta(E_c + E_p) = \Delta E_m = 0$.

- **Discussion :**

- Sémantique :

Quand un système est conservatif, cela signifie que soit les forces sont conservatives, soit elles ne travaillent pas.

- $W_{\text{non } E_p} = 0$:

(1) Forces de contact non dissipatives.

(2) $\vec{F}_{i,c}, \vec{F}_l : W \equiv 0$.

- W_{E_p} :

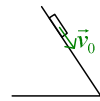
(1) Gravitation

(2) Force coulombienne

(3) Élastique

(4) Éventuellement inertie.

- Si $W_{\text{non } E_p} \neq 0$:



$$\Delta E_m = W_{\text{non } E_p} ;$$

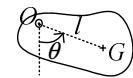
ici, $-\frac{1}{2}mv_0^2 - mgh = W_{\text{non } E_p}$ (h : hauteur descendue par la brique)

- *Principe* de conservation de l'énergie (*sous n'importe quelle forme*) : correspond au premier principe de la thermodynamique.

Ici, on a le *théorème* de conservation de l'énergie *mécanique*.

- **Intérêt, limites :**

- Intégrale première du mouvement :

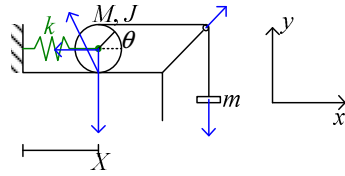


On a ici directement $\frac{1}{2}J_{\Delta}\dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta = \text{cte}$

- On obtient une intégrale scalaire sans intervention des forces de contact.

- Le système ne doit pas avoir plus d'un degré de liberté, sinon le théorème n'est pas suffisant.

3) Exemples



On suppose que la roue roule sans glisser sur la table et que le fil est inextensible...

- Système : disque + fil + masse.
- Dans le référentiel du laboratoire :

Les forces extérieures ne travaillent pas ou dérivent d'une énergie potentielle

Les forces intérieures ne travaillent pas.

- On n'a qu'un seul degré de liberté.

On a la relation $\dot{y} = -2\dot{X} = 2r\dot{\theta}$.

- TCEM :

$$\left(\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}M\dot{X}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2\right) + mgy + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 = \text{cte}$$

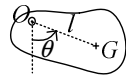
$$\text{Soit } \frac{1}{2}\dot{\theta}^2(J + Mr^2 + 4mr^2) + 2mgR\theta + \frac{1}{2}kr^2(\theta - \theta_0)^2 = \text{cte}'$$

$$\text{Et en dérivant : } \dot{\theta}(J + Mr^2 + 4mr^2) + 2mgR + kr^2(\theta - \theta_0) = 0$$

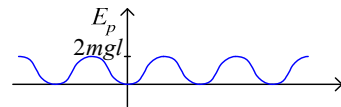
On peut fixer θ_0 de façon à ce que l'équation différentielle soit :

$$\ddot{\theta}(J + Mr^2 + 4mr^2) + kr^2\theta = 0$$

Pendule pesant :



$$E_p = mgl(1 - \cos \theta) \text{ (on choisit } E_p(\theta = 0) = 0)$$



$$E_m = E_p + E_c = \text{cte}$$

- Si $E_m < 2mgl$, on a un mouvement pendulaire
- Si $E_m > 2mgl$, on a un mouvement révolitif.

C) Equilibre d'un système conservatif

1) Cas d'un point matériel



On suppose que soit $\vec{F}_i = -\vec{\nabla}E_{p_i}$, soit \vec{F}_i ne travaille pas.

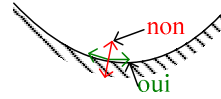
Ainsi, $\delta W = -dE_p$, avec $E_p = \sum E_{p_i}$.

- Condition (nécessaire) d'équilibre :

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i = \vec{0}.$$

- Déplacement $d\vec{l}$ infinitésimal respectant les liaisons.

Exemple :



Sur ce petit déplacement, $\delta W = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot d\vec{l} = 0$ au premier ordre.

Ainsi, $dE_p = 0$ au premier ordre, donc E_p est extrémal.

$$\frac{\partial E_p}{\partial x} = \frac{\partial E_p}{\partial y} = \frac{\partial E_p}{\partial z} = 0$$

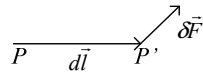
(Il faut choisir les variables de façon à respecter les liaisons)

$$\text{ou avec } E_p(r, \theta, \varphi) : \frac{\partial E_p}{\partial r} = 0 \text{ et } \frac{\partial E_p}{\partial \theta} = \frac{\partial E_p}{\partial \varphi} = 0$$

$$\text{ou avec } E_p(r, \theta, z) : \frac{\partial E_p}{\partial r} = \frac{\partial E_p}{\partial z} = 0 \text{ et } \frac{\partial E_p}{\partial \theta} = 0.$$

Réciproquement, si E_p est extrémal, on a bien $\vec{F} = \vec{0}$

- Condition (nécessaire seulement) de stabilité de l'équilibre :



On doit avoir $\delta\vec{F} \cdot d\vec{l} < 0$.

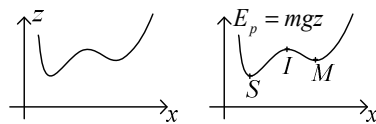
C'est-à-dire : $\delta W = 0$ au premier ordre, et $\delta W < 0$ à l'ordre supérieur.

C'est-à-dire que E_p est extrémal et minimal.

Si $E_p(q_\alpha, q_\beta, q_\gamma) :$

$$dE_p = \underbrace{\frac{\partial E_p}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \dots}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial^2 E_p}{\partial q_\alpha^2} dq_\alpha^2 + \dots + \frac{\partial^2 E_p}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} dq_\alpha dq_\beta + \dots}_{>0, \forall dq_\alpha, dq_\beta, dq_\gamma}$$

- Exemple :



I : état d'équilibre instable, S : équilibre stable, M : équilibre métastable.

Remarque :

En thermodynamique, on ne peut pas *observer* une position d'équilibre instable.

2) Cas d'un système de points matériels ou d'un solide

- Généralisation :

Pour $E_p(q_1, q_2, \dots)$: on admet que le théorème se généralise :

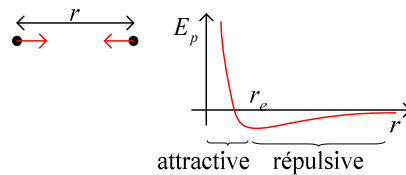
$$\text{Equilibre : } \forall i, \frac{\partial E_p}{\partial q_i} = 0$$

Stabilité : E_p est minimal.

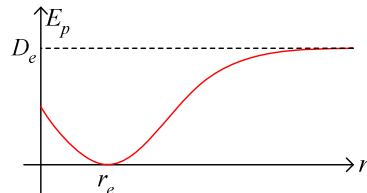
(Théorème de Lejeune–Dirichlet)

- Exemple :

Molécule diatomique :



Formule de Morse (empirique) : $E_p = D_e(1 - e^{-a(r-r_e)^2})$



D_e : différence d'énergie entre les molécules séparées et les molécules à l'équilibre ; correspond à l'énergie de dissociation.

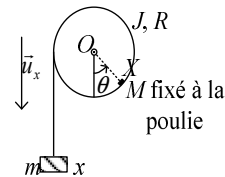
Pour le calcul de a :

Pour r proche de r_e , on a $E_p = D_e(1 - 1 + a(r - r_e)^2)$.

$$\mu \ddot{r} = -\frac{dE_p}{dr} = -2aD_e(r - r_e) \quad (\mu \text{ masse de la particule réduite équivalente au système})$$

Si on pose $u = r - r_e$, on obtient $\mu \ddot{u} + 2aD_e u = 0$, équation d'un oscillateur harmonique.

- Application :



On cherche les positions d'équilibre, leur stabilité.

- Le système a un seul degré de liberté.

$$\dot{x} = R\dot{\theta}, \quad X = R \cos \theta.$$

- Le système est globalement conservatif :

Le poids de chacune des masses dérive d'une énergie potentielle

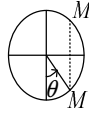
Les actions intérieures ne travaillent pas.

- Méthode 1 : Energie potentielle :

$$E_p = -mgx - MgX + \text{cte} = -mgR\theta - MgR \cos \theta + \text{cte}$$

Equilibre : $\frac{dE_p}{d\theta} = 0$, soit $-mgR + MgR \sin \theta = 0$, ou $\sin \theta = \frac{m}{M}$.

Il n'y a donc des positions d'équilibre (deux) que si $m < M$.



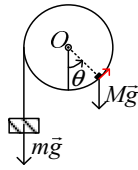
Stabilité : $\frac{d^2 E_p}{d\theta^2} = mgR \cos \theta > 0$

La position du bas est donc stable.

- Méthode 2 : statique :

A l'équilibre, $M_\Delta = 0$, soit $mgR - MgR \sin \theta = 0$. ($\Delta = Oz$)

Stabilité : $mgR = MgR \sin \theta$ à l'équilibre.



On fait faire une petite rotation (flèche rouge) au disque.

Ainsi, le bras de levier de $m\vec{g}$ ne change pas, mais celui de $M\vec{g}$ diminue.

Donc M_Δ devient négatif, et le système retourne à sa position.

C'est ensuite la même chose pour une petite rotation dans l'autre sens, et similaire pour la position d'équilibre instable.

- Méthode 3 : dynamique :

Théorème du moment cinétique : $\frac{d\sigma_\Delta}{dt} = M_\Delta$

Soit $J_\Delta \ddot{\theta} + MR^2 \ddot{\theta} + \underbrace{mR\ddot{x}}_{mR^2 \ddot{\theta}} = mgR - MgR \sin \theta$

Donc $\underbrace{(J_\Delta + MR^2 + mR^2)}_I \ddot{\theta} = gR(m - M \sin \theta)$.

Condition nécessaire d'équilibre : $\ddot{\theta} = 0$, donc $\sin \theta = \frac{m}{M}$.

Stabilité : pour $\theta - \theta_e = \alpha \ll 1$, on a l'équation :

$I\ddot{\alpha} = gR(m - M \sin(\theta_e + \alpha)) = gR(\underbrace{m - M \sin \theta_e}_{=0} - M\alpha \cos \theta_e)$

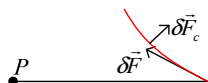
D'où $I\ddot{\alpha} + gRM\alpha \cos \theta_e = 0$

Si $gRM \cos \theta_e > 0$ on a une solution périodique, sinon une solution hyperbolique.

Attention : pour la stabilité d'un équilibre :

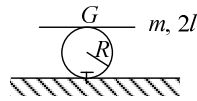


Si on a une force de Coriolis (ou de Lorenz), perpendiculaire, cet équilibre n'est pas nécessairement stable, puisqu'on peut très bien avoir un mouvement de la forme :



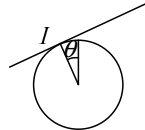
IV Compléments

A) Tige sur un cylindre



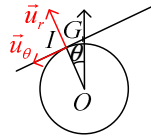
On suppose que la tige roule sans glisser sur le cylindre.
On donne un petit coup sur la tige.

Paramétrage :



- Analyse :
 - Un seul degré de liberté : $IG = R\theta$
 - La tige, homogène, est soumise dans R_{lab} aux actions $[\vec{P}]$, $[\vec{R}]$.
- Le système est ainsi conservatif.

- Théorème de conservation de l'énergie mécanique :



$$E_c + E_p = \text{cte}$$

- Calcul de E_c :

$$\text{Théorème de Koenig : } E_c = \frac{1}{2} m \bar{v}(G)^2 + \frac{1}{2} J_{\Delta_G} \dot{\theta}^2$$

$$\bar{v}(G) = \bar{v}(I) + \overrightarrow{GI} \wedge \vec{\Omega}$$

$$\text{Donc } \bar{v}(G) = R\theta \cdot \vec{u}_\theta \wedge \dot{\theta} \cdot \vec{u}_z = R\dot{\theta} \vec{u}_r$$

$$\text{D'où } E_c = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \frac{l^2}{3} \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m \dot{\theta}^2 \left(R^2 + \frac{l^2}{3} \right)$$

Méthode 2 :

I est le centre instantané de rotation ; le champ des vitesses est donc le même que celui d'une rotation, et l'énergie cinétique est donc la même.

$$\text{Donc } E_c = \frac{1}{2} J_{\Delta_I} \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} (J_{\Delta_G} + m(R\theta)^2) \dot{\theta}^2$$

- Calcul de E_p :

$$E_p = mgx + \text{cte}$$

$$\text{On a } x = \overrightarrow{OG} \cdot \vec{u}_x = (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IG}) \cdot \vec{u}_x = R \cos \theta + R \theta \sin \theta$$

$$\text{Donc } E_p = mgR(\cos \theta + \theta \sin \theta) + \text{cte}$$

- Equation du mouvement :

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \left(R^2 + \frac{l^2}{3} \right) + gR(\cos \theta + \theta \sin \theta) = \text{cte}$$

$$\text{A } t = 0, \dot{\theta} = \dot{\theta}_0, \theta = 0.$$

Donc la constante vaut $\frac{1}{2} \dot{\theta}_0^2 \frac{l^2}{3} + gR$.

En dérivant (et simplifiant par $\dot{\theta}$) :

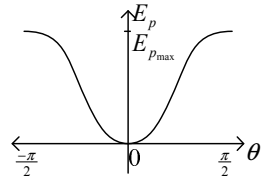
$$\ddot{\theta} \left(R^2 \theta^2 + \frac{l^2}{3} \right) + R^2 \theta \dot{\theta}^2 + gR \theta \cos \theta = 0$$

- Etude du mouvement :

Condition de non basculement :

$$E_p = mgR(\cos \theta - 1 + \theta \sin \theta) \quad (\text{constante} = -mgR)$$

$$\frac{dE_p}{d\theta} = mgR(\theta \cos \theta), \quad \frac{d^2 E_p}{d\theta^2} = mgR(\cos \theta - \theta \sin \theta)$$



$$E_{p_{\max}} = mgR\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

Ainsi, si $E_m < mgR\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$, on a un mouvement périodique.

Condition de non basculement : $\frac{1}{2} m \frac{l^2}{3} \dot{\theta}_0^2 < mgR\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$.

Petites oscillations :

$$\ddot{\theta} \left(\underbrace{R^2 \theta^2}_{=0} + \frac{l^2}{3} \right) + \underbrace{R^2 \theta^2 \dot{\theta}^2}_{=0} + gR \theta \underbrace{\cos \theta}_{=1} = 0 \quad (\text{on néglige les termes d'ordre 2})$$

$$\text{Soit } \frac{l^2}{3} \ddot{\theta} + gR \theta = 0.$$

$$\text{Ainsi, } \ddot{\theta} + \omega \theta = 0, \text{ où } \omega = \sqrt{\frac{3gR}{l^2}}.$$

• Théorème du moment cinétique par rapport à $\Delta_G : (G, \vec{u}_z)$

$$\frac{d\sigma_{\Delta}}{dt} = M_{\Delta}.$$

$$\text{- On a } \sigma_{\Delta} = J_{\Delta} \dot{\theta}, \text{ donc } \frac{d\sigma_{\Delta}}{dt} = m \frac{l^2}{3} \ddot{\theta}$$

$$\text{- } M_{\Delta} = -NR\theta \quad (\text{la composante tangentielle n'a pas de moment})$$

- Calcul de N :

$$m\vec{a}(G) = \vec{R} + \vec{P}$$

$$\text{Donc } m\vec{a}(G) \cdot \vec{u}_r = N + m\vec{g} \cdot \vec{u}_r.$$

$$\text{On a } \vec{v}(G) = R\theta\dot{\theta}\vec{u}_r \quad (\text{calcul précédent})$$

$$\text{Donc } \vec{a}(G) \cdot \vec{u}_r = R(\dot{\theta}^2 + \theta\ddot{\theta})$$

$$\text{Et } m\vec{g} \cdot \vec{u}_r = -mg \cos \theta.$$

$$\text{D'où } N = mR(\dot{\theta}^2 + \theta\ddot{\theta}) + mg \cos \theta.$$

$$\text{- Ainsi, } \frac{ml^2}{3} \ddot{\theta} = m(-R^2(\dot{\theta}^2 + \theta\ddot{\theta}) - gR \cos \theta)\theta$$

- Théorème du moment cinétique par rapport à $\Delta_I : (I, \vec{u}_z)$

$$\frac{d\sigma_{\Delta}}{dt} = M_{\Delta} + m\vec{v}(G) \wedge \vec{v}(I) \cdot \vec{u}_z$$

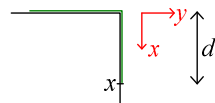
- On a $\sigma_{\Delta} = J_{\Delta} \dot{\theta} = (m \frac{l^2}{3} + mR^2 \theta^2) \dot{\theta}$, donc $\frac{d\sigma_{\Delta}}{dt} = (m \frac{l^2}{3} + mR^2 \theta^2) \ddot{\theta} + 2mR^2 \theta \dot{\theta}^2$

- Et $M_{\Delta} = -mgR\theta \cos \theta$

- Et $m\vec{v}(G) \wedge \vec{v}(I) = m(\theta \dot{\theta} \vec{u}_r) \wedge (R \dot{\theta} \vec{u}_{\theta}) = mR^2 \dot{\theta}^2 \theta \vec{u}_z$

D'où l'équation voulue.

B) Chaînette sur un coin de table



A $t = 0$, la chaînette (longueur l) est immobile.

On suppose qu'il n'y a pas de frottements.

- Analyse :
 - On n'a qu'un seul degré de liberté.
 - Actions : $[\vec{P}]$, $[\vec{R}]$. $[\vec{R}]$ ne travaille pas ; les forces intérieures ne travaillent pas non plus.
 - Théorème de conservation de l'énergie mécanique :

$$E_c + E_p = \text{cte}$$

- $E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$

- $E_p = E_{p_1} + E_{p_2} = 0 - m_2 g \frac{x}{2}$

(E_{p_1} : énergie potentielle de la chaînette sur la table ; E_{p_2} : énergie potentielle de la chaînette qui pend ; on fixe le 0 d'énergie potentielle au niveau de la table)

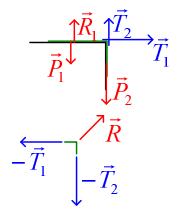
La chaînette est homogène, donc $m_2 = \frac{mx}{l}$

Donc $E_p = \frac{-mg}{l} \frac{x^2}{2}$. Ainsi, $\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - mg \frac{x^2}{2l} = \text{cte} = \frac{-mg}{l} \frac{d^2}{2}$

Donc en dérivant : $\ddot{x} - \frac{g}{l} x = 0$, et en réintégrant :

$$x = A \times \text{ch} \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t + \varphi \right) = d \times \text{ch} \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t \right)$$

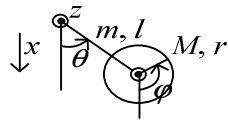
- Théorème de la résultante dynamique :



- Partie horizontale : $m_1 \ddot{y} = T_1$

- Partie verticale : $m_2 \ddot{x} = m_2 g - T_2$
 - On a $\ddot{x} = \ddot{y}$, $T_1 = T_2$
- Donc $m_1 \ddot{y} + m_2 \ddot{x} = m \frac{x}{l} g$ ou $m \ddot{x} = m \frac{x}{l} g$.

C) Pendule à deux degrés de liberté



On cherche le mouvement général du pendule

- On considère le système constitué du disque et de la tige : ce système a deux degrés de liberté.
- On se place dans le référentiel terrestre, galiléen.
- Pour ce système, les actions extérieures soit ne travaillent pas, soit dérivent d'une énergie potentielle. Pour les actions intérieures, elles ne travaillent pas globalement.

On peut donc appliquer le théorème de conservation de l'énergie mécanique :

$$E_C = \frac{1}{2} (\frac{1}{3} m l^2) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M (l \dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} (\frac{1}{2} M R^2) \dot{\varphi}^2$$

$$E_P = -m g \frac{l}{2} \cos \theta + (-M g R \cos \theta)$$

Et $E_P + E_C = \text{cte}$.

On applique le théorème du moment cinétique par rapport à Oz :

$$M_{\Delta} = -m g \frac{l}{2} \sin \theta - M g l \sin \theta$$

$$\sigma_{\Delta} = \frac{1}{3} m l^2 \dot{\theta} + \sigma_{\Delta, \text{disque}}$$

Avec :

$$\begin{aligned} \sigma_{\Delta, \text{disque}} &= \vec{\sigma}(G_2) \cdot \vec{u}_z + (\overrightarrow{OG_2} \wedge M \vec{v}(G_2)) \cdot \vec{u}_z \\ &= \frac{1}{2} M R^2 \dot{\varphi} + M l^2 \dot{\theta} \end{aligned}$$

$$\text{D'où l'équation : } \frac{1}{2} M R^2 \ddot{\varphi} + (M l^2 + \frac{1}{3} M l^2) \ddot{\theta} = -m g \frac{l}{2} \sin \theta - m g l \sin \theta$$

(L'équation ressemble beaucoup à la dérivée de celle obtenue avec l'énergie mécanique, mais n'est pas tout à fait la même...)

- On va utiliser une autre méthode : on considère uniquement le système constitué du disque :

Le système n'est pas conservatif (la réaction de la barre travaille)

On applique le théorème du moment cinétique par rapport à $G_2 z$:

On obtient que $\frac{1}{2} M R^2 \ddot{\varphi} = 0$, soit $\dot{\varphi} = \text{cte} = \dot{\varphi}_0$ (par rapport à la verticale).

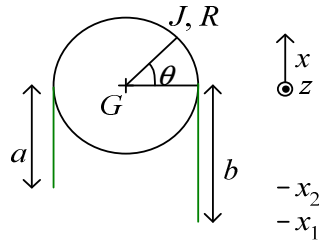
En remplaçant dans la première équation trouvée :

$$(\frac{1}{3} m l^2 + M l^2) \ddot{\theta} + (\frac{m}{2} + M) g l \sin \theta = 0$$

$$\text{Soit } \ddot{\theta} + \frac{\frac{m}{2} + M}{\frac{m}{3} + M} \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

D) Corde sur une poulie

On considère une corde de masse linéique λ , inextensible, qui ne glisse pas :



La longueur qui pend est constante, et vaut $-x_1 - x_2 = \text{cte} = a + b$, donc :

$$x_2 = -x_1 - a - b = -x - a - b$$

- Il n'y a qu'un seul degré de liberté : on a la relation cinématique $\dot{x} = R\dot{\theta}$.

- On se place dans le référentiel terrestre, galiléen.

- On admet que le système constitué du fil et de la poulie est conservatif (c'est-à-dire que le fil est un peu comme une chaînette)

On a ainsi d'après le théorème de conservation de l'énergie mécanique :

$$E_C + E_P = \text{cte}$$

$$\text{Avec } E_C = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2, E_P = \lambda \times (-x) \times g \cdot \frac{x}{2} + \lambda \cdot (x + a + b)g \frac{-x - a - b}{2} + \text{cte}$$

$$\text{Donc } E_C + E_P = \frac{1}{2} \left(\frac{J}{R^2} + m \right) \dot{x}^2 - \frac{\lambda}{2} g (x^2 + (x + a + b)^2) = \text{cte}$$

$$\text{En dérivant, } \left(\frac{J}{R^2} + m \right) \ddot{x} - \lambda g (x + x + a + b) = 0$$

$$\text{Soit } \left(\frac{J}{R^2} + m \right) \ddot{x} - 2\lambda g x = \lambda g (a + b)$$

$$\text{Et donc } x = A \times \text{ch} \left(\frac{t}{\tau} + \varphi \right) - \frac{a+b}{2}, \text{ avec } \tau = \sqrt{\frac{\frac{J}{R^2} + m}{2\lambda g}}$$

A $t = 0$, on a $\dot{x} = 0$ donc $\varphi = 0$;

$$\text{et } x = -b, \text{ donc } A = \frac{a-b}{2}$$

Soit :

$$x = \frac{a-b}{2} \times \text{ch} \left(\frac{t}{\tau} \right) - \frac{a+b}{2}$$