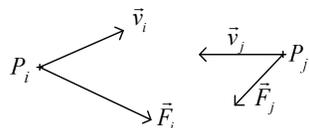


Chapitre 8 : Travail et puissance

I Puissance des actions exercées sur un système matériel

A) Puissance

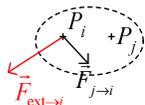
1) Système de points matériels



- Définition :

$$P = \sum_{i \in S} \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i \quad (\text{Dépend du référentiel considéré})$$

- Puissance intérieure et extérieure :



$$\vec{F}_i = \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow i} + \sum_j \vec{F}_{j \rightarrow i}$$

$$P = \sum_{i \in S} \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = \underbrace{\sum_{i \in S} \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow i} \cdot \vec{v}_i}_{P_{\text{ext}}} + \underbrace{\sum_{i \in S} \sum_j \vec{F}_{j \rightarrow i} \cdot \vec{v}_i}_{P_{\text{int}}}$$

2) Système continu

- Répartition à densité volumique de force :

$$\begin{array}{c} \boxed{d\tau} \\ \downarrow \\ d\vec{F} = \vec{f}_v d\tau \end{array}$$

$$P = \iiint \vec{f}_v \cdot \vec{v} d\tau$$

- Répartition de couple :

$$d\vec{M} = \vec{M}_v d\tau.$$

$$\text{On peut montrer que } P = \iiint \frac{1}{2} \vec{m}_v \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) d\tau$$

B) Travail

1) Définition

$$\delta W = P dt = \delta W_{\text{ext}} + \delta W_{\text{int}}$$

Si $\delta W > 0$, on dit que le travail est moteur, si $\delta W < 0$ il est dit résistant.
 W dépend toujours du référentiel choisi.

2) Cas d'un système de forces

$$P = \sum \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i$$

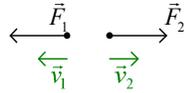
$$\text{Donc } \delta W = \sum \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i dt$$

$$\text{Soit } \delta W = \sum \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i$$

C) Puissance d'un système d'actions appartenant au torseur nul

$$[\vec{0}] : \begin{cases} \vec{F} = \vec{0} \\ \vec{M} = \vec{0} \end{cases}$$

- P est en général non nul. Exemple :



Mais : P est indépendant du référentiel.

On se limite dans la démonstration à un système de points matériels :

On considère R absolu, R' relatif.

$$\begin{aligned} P_a &= \sum \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = \sum \vec{F}_i \cdot \vec{v}_{i,r} + \sum \vec{F}_i \cdot \vec{v}_{i,e} \\ &= P_r + \sum \vec{F}_i \cdot (\vec{v}_a(O') + \vec{\Omega}_e \wedge \overrightarrow{O'P_i}) \\ &= P_r + \vec{v}_a(O') \cdot \underbrace{\sum \vec{F}_i}_{=\vec{F}=\vec{0}} + \vec{\Omega}_e \cdot \underbrace{\sum \overrightarrow{O'P_i} \wedge \vec{F}_i}_{=\vec{M}(O')=0} \end{aligned}$$

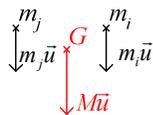
Donc $P_a = P_r$.

- Cas des actions intérieures à un système :

On a $[\vec{F}_{\text{int}}] = [\vec{0}]$ (théorème d'action et de réaction)

On a toujours en général $P_{\text{int}} \neq 0$, mais P_{int} est indépendant de R .

D) Puissance d'un système de forces proportionnelles aux masses



$$(\vec{u} = \vec{c}te)$$

Le système réel est équivalent à $(G, M\vec{u})$ (vu avant), et ces deux systèmes sont aussi équivalents pour P :

$$P = \sum m_i \vec{u} \cdot \vec{v}_i = \underbrace{\left(\sum m_i \vec{v}_i \right)}_{M \vec{v}(G)} \cdot \vec{u} = M\vec{u} \cdot \vec{v}(G)$$

II Puissance des actions s'exerçant sur un solide

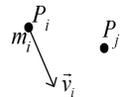
A) Les actions intérieures

Dans R lié au solide, on a : $P_{\text{int}} = 0$ (la vitesse de chaque point est nulle)

Ainsi, dans tout référentiel, $P_{\text{int}} = 0$ (pour un *solide*)

B) Les actions extérieures

1) Schématisation discrète



$$P = \sum \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i.$$

$$\text{On a } \vec{v}_i = \vec{v}(P_i) = \vec{v}(A) + \overrightarrow{AP_i} \wedge \vec{\Omega}$$

$$\text{Donc } P = \underbrace{\left(\sum \vec{F}_i \right)}_{\vec{F}} \cdot \vec{v}(A) + \underbrace{\left(\sum \overrightarrow{AP_i} \wedge \vec{F}_i \right)}_{\vec{M}(A)} \cdot \vec{\Omega},$$

$$\text{C'est-à-dire } P = \vec{F} \cdot \vec{v}(A) + \vec{M}(A) \cdot \vec{\Omega} \quad (\text{pour } A \in S)$$

$$\text{Remarque : } P = \begin{bmatrix} \vec{F} \\ \vec{M}(A) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{v}(A) \\ \vec{\Omega} \end{bmatrix}$$

2) Schématisation continue

$$\vec{F} = \iiint \vec{f}_v d\tau, \quad \vec{M}(A) = \iiint (\vec{m}_v + \overrightarrow{AP} \wedge \vec{f}_v) d\tau$$

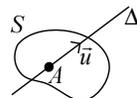
$$\text{Et } P = \vec{F} \cdot \vec{v}(A) + \vec{M}(A) \cdot \vec{\Omega}.$$

C) Cas particulier

1) S en translation

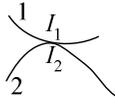
$$\text{On a } \vec{\Omega} = \vec{0}, \text{ donc } P = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (\vec{v} = \vec{v}(A), \forall A \in S)$$

2) S en rotation autour d'un axe fixe



$$P = \vec{\Omega} \cdot \vec{M}(A) = \dot{\theta} \vec{u} \cdot \vec{M}(A) = \dot{\theta} M_{\Delta}$$

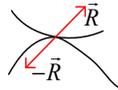
III Puissance des actions de contact entre deux solides



On suppose le contact ponctuel : pas de résistance au roulement ou au pivotement.

A) Expression de la puissance

$$\{(I_1, \vec{R}_{2 \rightarrow 1}), (I_2, \vec{R}_{1 \rightarrow 2})\} = [\vec{0}] \quad (\text{on a } \vec{R}_{2 \rightarrow 1} = -\vec{R}_{1 \rightarrow 2} = \vec{R})$$



$$P = \vec{R} \cdot \vec{v}(I_1) - \vec{R} \cdot \vec{v}(I_2) = \vec{R} \cdot (\vec{v}(I_1) - \vec{v}(I_2)) = \vec{R} \cdot \vec{v}_g$$

$$\text{Comme } \vec{v}_g \in \pi, \vec{R} = \vec{T} + \vec{N} : \boxed{P = \vec{T} \cdot \vec{v}_g}.$$

Remarque :

Le résultat est valable dans tout référentiel, mais si $P = P_1 + P_2$, P_1 et P_2 dépendent indépendamment du référentiel.

B) Signe de P .

Si $\vec{v}_g = \vec{0}$; statique, roulement sans glissement, pivotement : $P = 0$.

Si $\vec{v}_g \neq \vec{0}$, et $\vec{T} = \vec{0}$: $P = 0$

Si $\vec{v}_g \neq \vec{0}$, et $\vec{T} \neq \vec{0}$: Comme \vec{T} et \vec{v}_g sont en sens opposé, on a $P < 0$.

Dans tous les cas, on a ainsi $P \leq 0$: travail résistant uniquement.

(Remarque : on a $P \leq 0$, mais on peut avoir $P_1, P_2 \geq 0$)

C) Liaison non dissipative

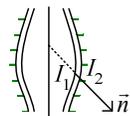
Définition :

C'est une liaison pour laquelle $\boxed{P \equiv 0}$.

Cas du contact ponctuel :

$P = 0 \Leftrightarrow \vec{T} \cdot \vec{v}_g = 0$, donc on a soit un roulement sans glissement $\vec{v}_g = \vec{0}$, soit un glissement sans frottement $\vec{T} = \vec{0}$.

Cas de l'articulation rotoïde :



La seule possibilité de liaison non dissipative est d'avoir glissement sans frottement ; on parle alors d'articulation parfaite.