Chapitre 5 : Cinétique

Vocabulaire :
La cinématique, c'est l'étude des mouvements.
La cinétique, c'est aussi l'étude des mouvements, mais en prenant en compte les masses.

I Géométrie des masses

A) Principe de la masse inerte

A toute particule, on associe une masse m invariante (c'est-à-dire indépendante de R), positive et additive.

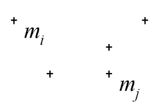
Remarque :
Einstein avait introduit une masse variable :

$E = mc^2$ avec $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma m_0$.

On a finalement gardé m_0 comme définition de la masse (c'est la masse d'une particule dans son référentiel propre), et on a alors $E = \gamma mc^2$.

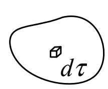
B) Schématisation d'un système matériel

1) Discrète



$$M = \sum_i m_i$$

2) Continue



$$dm = \sum_{i \in d\tau} m_i = \rho d\tau.$$

Donc $M = \iiint \rho d\tau$

C) Centre d'inertie d'un système matériel

1) Définition

On définit le point G tel que $\boxed{\overrightarrow{OG} = \dfrac{\sum m_i \overrightarrow{OP_i}}{\sum m_i}}$ ou $\overrightarrow{OG} = \dfrac{\iiint \rho \overrightarrow{OP} d\tau}{\iiint \rho d\tau}$.

2) Conséquence

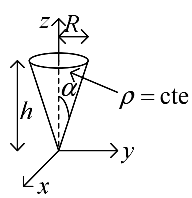
$$\sum_i m_i \overrightarrow{OG} = \sum_i m_i \overrightarrow{OP_i} = \sum_i m_i \overrightarrow{OG} + \sum_i m_i \overrightarrow{GP_i}.$$

Donc $\boxed{\sum_i m_i \overrightarrow{GP_i} = \vec{0}}$.

De même, $\iiint \rho \overrightarrow{GP} d\tau = \vec{0}$.

Ainsi, G correspond au barycentre des points affectés de leur masse.

3) Exemples



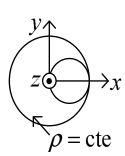
On cherche la position de G.

Déjà, par symétrie, $x_G = y_G = 0$.

$$z_G = \frac{\iiint \rho z d\tau}{\iiint \rho d\tau} = \frac{\iiint z d\tau}{\iiint d\tau} = \frac{\int_0^h z.\pi.r^2 dz}{\int_0^h \pi.r^2 dz}.$$

On a $r = z\tan\alpha$.

Donc $z_G = \dfrac{\int_0^h z^3 dz}{\int_0^h z^2 dz} = \dfrac{3}{4}h$.



Sphère de rayon R creusée par une sphère de rayon $R/2$.

Toujours pour des raisons de symétries, on a ici $y_G = z_G = 0$.

On a $x_G \times \iiint \rho d\tau = \iiint \rho x d\tau$.

De plus, $\iiint \rho d\tau = \iiint_{V_1} \rho d\tau - \iiint_{V_2} \rho d\tau$ où V_1 est le volume de la sphère de rayon R, V_2 celui de la sphère de rayon $R/2$ qui a été retirée.

Donc $\iiint \rho x d\tau = \iiint_{V_1} \rho x d\tau - \iiint_{V_2} \rho x d\tau$

Soit $(M_1 - M_2)x_G = M_1 x_{G_1} - M_2 x_{G_2}$,

x_{G_1} : position du barycentre de la sphère complète $= 0$.

x_{G_2} : position du barycentre de la sphère retirée $= R/2$.

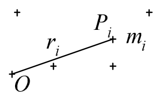
Enfin, $M_1 = 8M_2$.

Donc $7M_2 x_G = -M_2 R/2$, soit $x_G = -R/14$ (très proche de 0 quand même)

D) Moment d'inertie d'un système matériel

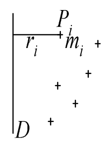
1) Définitions

- Par rapport à un point O :



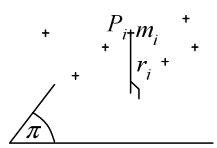
On pose $J_O = \sum_i m_i r_i^2$, ou pour une distribution continue $J_O = \iiint r^2 dm$.

- Par rapport à un axe D :



$J_D = \sum_i m_i r_i^2$, ou $J_D = \iiint r^2 dm$.

- Par rapport à un plan π :



$J_\pi = \sum_i m_i r_i^2$, ou $J_\pi = \iiint r^2 dm$.

2) Signification physique

- Pour un solide en translation :

On a $\underbrace{\vec{F}}_{\text{action}} = M.\underbrace{\vec{a}(G)}_{\text{effet}}$.

M représente donc le facteur de proportionnalité entre l'action de la force et son effet.

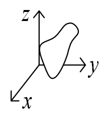
- Pour un solide en rotation par rapport à un axe Δ :

On verra que $M_\Delta = J_\Delta \ddot{\theta}$.

Ainsi, J_Δ représente pour une rotation ce que la masse représente pour une translation.

3) Relations entre J_O, J_Δ et J_π.

- Expression en coordonnées cartésiennes :



On a $J_O = \iiint r^2 dm = \iiint (x^2 + y^2 + z^2) dm$,

$J_{Ox} = \iiint (y^2 + z^2) dm$, et de même pour les autres axes

$J_{xOy} = \iiint z^2 dm$, et de même pour les autres plans.

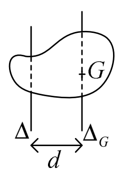
Ainsi par exemple, $J_O = J_{xOy} + J_{yOz} + J_{xOz}$, et $J_{Ox} = J_{xOy} + J_{xOz}$.

- D'où le théorème :

Le moment d'inertie en un point O est le somme des moments d'inertie par rapport à trois plans *orthogonaux* qui se coupent en O.

Le moment d'inertie par rapport à un axe Δ est la somme des moments d'inertie par rapport à deux plans *orthogonaux* qui se coupent en Δ.

4) Théorème de Huygens

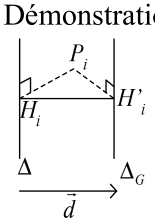


On suppose que Δ_G passe par G et est parallèle à Δ.

Alors $\boxed{J_\Delta = J_{\Delta_G} + Md^2}$.

Ainsi, $J_{\Delta_G} = \inf\limits_{\Delta // \Delta_G} J_\Delta$.

Démonstration :



On a :

$$J_\Delta = \sum_i m_i r_i^2 = \sum_i m_i \overrightarrow{H_iP_i}^2 = \sum_i m_i (\underbrace{\overrightarrow{H_iH'_i}}_{\vec d} + \overrightarrow{H'_iP_i})^2$$

$$= \underbrace{\sum_i m_i \vec d^2}_{Md^2} + \underbrace{\sum_i m_i \overrightarrow{H'_iP_i}^2}_{J_{\Delta_G}} + 2\vec d \cdot \underbrace{\sum_i m_i \overrightarrow{H'_iP_i}}_{= \sum_i m_i \underbrace{\overrightarrow{H'_iG}}_{\perp \vec d} + \sum_i m_i \underbrace{\overrightarrow{GP_i}}_{=\vec 0}}$$

$$= Md^2 + J_{\Delta_G}$$

E) Exemples

1) Sphère homogène

Pour une sphère de rayon R, masse M et masse volumique ρ :

- $J_O = \iiint r^2 dm = \int_0^R 4\pi . r^4 \rho dr = \frac{1}{5}\rho \times 4\pi R^5 = \frac{3}{5} MR^2$.
- Calcul de J_Δ :

Par symétrie, le moment d'inertie par rapport à un plan passant par O est le même quel que soit ce plan.

Donc $J_O = 3J_\pi$.

Ainsi, $J_\pi = \frac{1}{5} MR^2$.

Donc $\boxed{J_\Delta = 2J_\pi = \frac{2}{5} MR^2}$.

- Application : moment d'inertie de la Terre :
- Modèle sphérique homogène :

$M = 5{,}977.10^{24}\,\text{kg}$, $R = 6367{,}5\,\text{km}$.

Donc $\frac{2}{5} MR^2 = 9{,}7.10^{37}\,\text{kg.m}^2$.

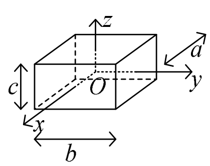
- Moment d'inertie réel :

$J_{\Delta,\text{axe polaire}} = 8{,}04.10^{37}\,\text{kg.m}^2$ et $J_{\Delta,\text{équateur}} = 8{,}01.10^{37}\,\text{kg.m}^2$.

- Le modèle de la sphère homogène n'est donc pas convenable, on a en fait $\rho_{\text{centre}} > \rho_{\text{ext}}$ (ce qui explique le moment d'inertie plus faible)

$J_{\Delta,\text{axe polaire}} > J_{\Delta,\text{équateur}}$, la Terre n'est donc pas tout à fait sphérique. (elle est un peu aplatie aux pôles, puisque la masse est répartie plus proche de l'axe équatorial que de l'axe polaire)

2) Parallélépipède rectangle homogène



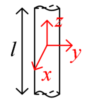
$J_{xOy} = \iiint z^2 dm = \int_{-c/2}^{c/2} ab\rho z^2 dz = \frac{abc^3}{12}\rho = M\frac{c^2}{12}$.

De même on calcule J_{xOz}, J_{yOz} …

$J_{Ox} = J_{xOz} + J_{xOy} = \frac{M}{12}(c^2 + b^2)$.

De même pour les autres…

3) Tige homogène



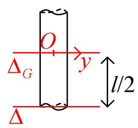
On suppose la dimension caractéristique de la section de la tige très inférieure à l. Ainsi :

$$\boxed{J_{xOy} = \iiint z^2 dm = \int \rho.s.z^2 dz = \frac{1}{12}\rho s l^3 = \frac{1}{12}Ml^2}$$

Et $J_{xOz}, J_{yOz} << J_{xOy}$.

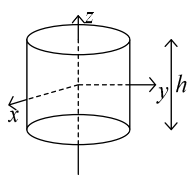
Ainsi, $J_{Ox} = J_{xOy} + J_{xOz} = J_{xOy} = \frac{1}{12}Ml^2$,

$J_{Oy} = \frac{1}{12}Ml^2$ et $J_{Oz} << J_{Ox}, J_{Oy}$.



$J_{\Delta} = \frac{1}{12}Ml^2 + \frac{1}{4}Ml^2 = \frac{1}{3}Ml^2$.

4) Cylindre de révolution homogène



- $J_{Oz} = \iiint dm.r^2 = \int_0^R (\rho.2\pi.rdr.h).r^2 = \rho\frac{\pi R^4}{2}h$.

Donc $\boxed{J_{Oz} = \frac{1}{2}MR^2}$.

- $J_{Ox} = J_{xOy} + J_{xOz}$.

On a par symétrie $J_{xOz} = J_{yOz}$, et $J_{xOz} + J_{yOz} = J_{Oz}$. Donc $J_{xOz} = \frac{1}{4}MR^2$.

De plus, $J_{xOy} = M\frac{h^2}{12}$ (vu pour la tige homogène)

Donc $\boxed{J_{Ox} = \frac{1}{12}Mh^2 + \frac{1}{4}MR^2}$.

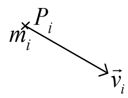
- Cas du disque :

On a alors $h << R$. Donc $J_{Oz} = \frac{MR^2}{2}$ et $J_{Ox} = \frac{MR^2}{4}$.

II Grandeurs cinétiques

A) Torseur cinétique

1) Définition



C'est le torseur du système de pointeurs $\{(P_i, m_i\vec{v}_i)\}$.

2) Résultante cinétique

- Définition :

$\vec{P} = \sum_i m_i\vec{v}_i$ ou $\iiint dm.\vec{v}$.

$\vec{P}$ s'appelle la quantité de mouvement ou impulsion.

- Expression :

$\vec{v}_i = \dfrac{d\overrightarrow{OP_i}}{dt}$, donc $\vec{P} = \sum_i m_i \dfrac{d\overrightarrow{OP_i}}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\sum_i m_i \overrightarrow{OP_i}\right) = M\dfrac{d\overrightarrow{OG}}{dt}$

Soit $\boxed{\vec{P} = M\vec{v}(G)}$.

3) Moment cinétique

- Expression :

$\vec{\sigma}(A) = \sum_i \overrightarrow{AP_i} \wedge m_i\vec{v}_i$ ou $\iiint \overrightarrow{AP} \wedge \rho\vec{v}\, d\tau$.

Remarque : on note parfois le vecteur $\vec{L}(A)$.

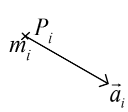
Dans le cas général, on ne peut pas simplifier l'expression du moment cinétique comme pour $\vec{P}$.

- Composition :

$\vec{\sigma}(A) = \vec{\sigma}(G) + \overrightarrow{AG} \wedge \vec{P}$.

B) Torseur dynamique

1) Définition



C'est le torseur du système de pointeurs $\{(P_i, m_i\vec{a}_i)\}$.

2) Résultante

- Définition :

$$\vec{D} = \sum_i m_i \vec{a}_i$$

- Expression :

On a $\vec{a}_i = \dfrac{d^2\overrightarrow{OP_i}}{dt^2}$.

Donc $\vec{D} = \sum_i m_i \vec{a}_i = \dfrac{d^2}{dt^2}\left(\sum_i m_i \overrightarrow{OP_i}\right) = M\dfrac{d^2\overrightarrow{OG}}{dt^2}$

Soit $\boxed{\vec{D} = M.\vec{a}(G)}$.

3) Moment

- $\vec{K}(A) = \sum_i \overrightarrow{AP_i} \wedge m_i \vec{a}_i$
- Composition : $\vec{K}(A) = \vec{K}(G) + \overrightarrow{AG} \wedge \vec{D}$.

C) Dérivation par rapport au temps du torseur cinétique

1) Résultante

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}(M\vec{v}(G)) = M\frac{d\vec{v}(G)}{dt} = M\vec{a}(G).$$

Donc $\boxed{\dfrac{d\vec{P}}{dt} = \vec{D}}$. (attention, le système doit avoir une masse constante)

2) Moment

- Par rapport à un point :
- Cas général :

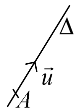
$$\frac{d\vec{\sigma}(A)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i \overrightarrow{AP_i} \wedge m_i \vec{v}_i\right)$$
$$= \sum_i \overrightarrow{AP_i} \wedge m_i \vec{a}_i + \sum_i (\vec{v}_i - \vec{v}(A)) \wedge m_i \vec{v}_i$$
$$= \vec{K}(A) + \sum_i m_i \vec{v}_i \wedge \vec{v}(A)$$

Soit $\boxed{\dfrac{d\vec{\sigma}(A)}{dt} = \vec{K}(A) + M\vec{v}(G) \wedge \vec{v}(A)}$.

- Cas particulier :

Si A est fixe (c'est-à-dire qu'on calcule toujours le moment par rapport au même point), ou si $A = G$, on a alors $\dfrac{d\vec{\sigma}(A)}{dt} = \vec{K}(A)$

- Par rapport à un axe :
- Cas général :



$$\frac{d\sigma_\Delta}{dt} = \frac{d\vec{\sigma}(A)\cdot\vec{u}}{dt} = \frac{d\vec{\sigma}(A)}{dt}\cdot\vec{u} + \vec{\sigma}(A)\cdot\frac{d\vec{u}}{dt}$$

$$= \underbrace{\vec{K}(A)\cdot\vec{u}}_{K_\Delta} + M\vec{v}(G)\wedge\vec{v}(A)\cdot\vec{u} + \vec{\sigma}(A)\cdot\frac{d\vec{u}}{dt}$$

- Cas particuliers :

(1) Si Δ est fixe, $\vec{u} = \overrightarrow{\text{cte}}$, et $\vec{v}(A) = \vec{0}$. Donc $\boxed{\frac{d\sigma_\Delta}{dt} = K_\Delta}$.

(2) Si Δ est de direction fixe passant par G, on a aussi $\boxed{\frac{d\sigma_\Delta}{dt} = K_\Delta}$.

D) Energie cinétique

$$E_C = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \iiint \frac{1}{2}\rho v^2 d\tau.$$

III Théorèmes de Koenig

A) Référentiel barycentrique

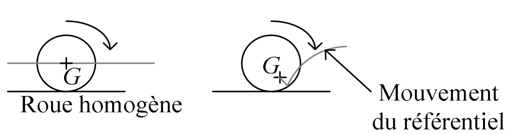
1) Définition

On considère un référentiel R absolu, $(O,\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$, S un système quelconque (pas forcément solide).

On définit le référentiel barycentrique R_b en translation par rapport à R et tel que G soit fixe dans R_b.

On peut prendre par exemple $(G,\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$.

2) Exemple



3) Intérêt

Il est plus facile de déterminer le mouvement des particules dans R_b, puis il reste simplement à déterminer celui de G dans R.

B) Premier théorème de Koenig

1) Enoncé, démonstration

$\boxed{\vec{\sigma}_a(G)=\vec{\sigma}_{R_b}(G)}$.

En effet : $\vec{\sigma}_a(G)=\sum_i \overrightarrow{GP_i}\wedge m_i\vec{v}_{i,a}$

On a $\vec{v}_{i,a}=\vec{v}_{i,R_b}+\vec{v}_{e,i}=\vec{v}_{i,R_b}+\vec{v}_e$.

Donc $\vec{\sigma}_a(G)=\sum_i \overrightarrow{GP_i}\wedge m_i\vec{v}_{i,R_b}+\underbrace{\sum_i m_i\overrightarrow{GP_i}}_{=\vec{0}}\wedge\vec{v}_e=\vec{\sigma}_{R_b}(G)$.

Remarque :

On n'a pas utilisé le fait que G est fixe dans R_b, mais uniquement que G est le barycentre et que le référentiel est en translation.

2) Corollaire

On a $\vec{\sigma}_a(A)=\vec{\sigma}_a(G)+\overrightarrow{AG}\wedge M\vec{v}_a(G)$, donc $\vec{\sigma}_a(A)=\vec{\sigma}_{R_b}(G)+\overrightarrow{AG}\wedge M\vec{v}_a(G)$.

C) Troisième théorème de Koenig

(Le deuxième est : $\vec{K}_a(G)=\vec{K}_{R_b}(G)$)

On a : $E_{C,a}=\sum_i \frac{1}{2}m_i v_{i,a}^2=\underbrace{\sum_i \frac{1}{2}m_i v_{i,r}^2}_{=E_{C,R_b}}+\underbrace{\sum_i \frac{1}{2}m_i v_e^2}_{=\frac{1}{2}Mv_e^2}+\underbrace{\sum_i m_i\vec{v}_{i,r}}_{=\vec{P}_r=M\vec{v}_r(G)=\vec{0}}\cdot\vec{v}_e$

Et, comme $\vec{v}_e=\vec{v}_a(G)$:

$\boxed{E_{C,a}=E_{C,R_b}+\frac{1}{2}M\vec{v}_a(G)^2}$

IV Cinétique du solide

A) Solide en translation

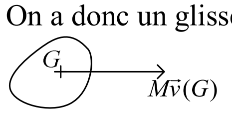
S est alors fixe dans le référentiel barycentrique

1) Torseur cinétique

Résultante : $\vec{P}=M\vec{v}(G)$.

Moment : $\vec{\sigma}_a(G)=\vec{\sigma}_{R_b}(G)=\vec{0}$.

On a donc un glisseur :



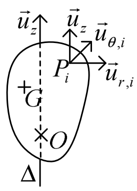
Ainsi, par rapport à un autre point :

$\vec{\sigma}_a(A)=\overrightarrow{AG}\wedge M\vec{v}(G)$.

2) Energie cinétique

On a $E_{C,a} = \frac{1}{2} M\vec{v}(G)^2$ (car $E_{C,R_b} = 0$).

B) Solide en rotation autour d'un axe fixe



$\vec{\Omega} = \dot{\theta}.\vec{u}_z$

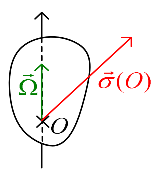
1) Moment cinétique

- Par rapport à O :

$\vec{\sigma}_i(O) = \sum_i \overrightarrow{OP_i} \wedge m_i \vec{v}_i$

$\overrightarrow{OP_i} = r_i \vec{u}_{r_i} + z_i \vec{u}_z$, $\vec{v}_i = r_i \dot{\theta}.\vec{u}_{\theta,i}$

$\vec{\sigma}_i(O) = \underbrace{\sum_i m_i r_i^2}_{J_\Delta} \dot{\theta}.\vec{u}_z - \sum_i m_i r_i z_i .\vec{u}_{r,i} \dot{\theta}$



- Par rapport à Δ :

$\boxed{\sigma_\Delta = \vec{\sigma}_a(O) \cdot \vec{u}_z = J_\Delta \dot{\theta}}$

2) Moment dynamique par rapport à Δ.

Comme Δ est fixe, on a $\boxed{\frac{d\sigma_\Delta}{dt} = K_\Delta = J_\Delta \ddot{\theta}}$

3) Energie cinétique

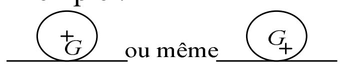
On a $E_C = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (r_i \dot{\theta})^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i r_i^2 \dot{\theta}^2$, soit $\boxed{E_C = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2}$.

(Equivalent pour la translation à $E_C = \frac{1}{2} M\vec{v}(G)^2$)

C) Solide en rotation autour d'un axe de direction fixe passant par G.

(C'est-à-dire en rotation dans R_b autour d'un axe passant par G)

Exemple :



1) Moment cinétique par rapport à l'axe $\Delta=(G,\vec{u})$.

$$\boxed{\sigma_{a,\Delta}=\vec{\sigma}_a(G)\cdot\vec{u}=\vec{\sigma}_{R_b}(G)\cdot\vec{u}=\sigma_{R_b,\Delta}=J_\Delta\dot{\theta}}$$

2) Energie cinétique

$$\boxed{E_C=E_{C,R_b}+\tfrac{1}{2}M\vec{v}(G)^2=\tfrac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2+\tfrac{1}{2}M\vec{v}(G)^2}.$$

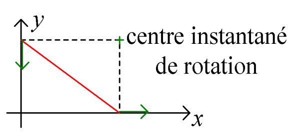
Récapitulatif :

	σ	E_C	K
Translation	$\vec{\sigma}_a(G)=\vec{0}$	$\frac{1}{2}M\vec{v}(G)^2$	$\vec{K}_a(G)=\vec{0}$
Rotation autour de Δ fixe	$\sigma_\Delta=J_\Delta\dot{\theta}$	$\frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2$	$K_\Delta=J_\Delta\ddot{\theta}$
Rotation autour d'un axe Δ de direction fixe passant par G.	$\sigma_\Delta=J_\Delta\dot{\theta}$	$\frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}M\vec{v}(G)^2$	$K_\Delta=J_\Delta\ddot{\theta}$

V Compléments

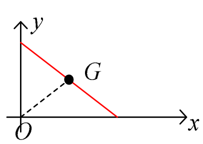
A) 1er complément

On pose une échelle sur un mur, on suppose le mur et le sol très glissants :



- Etude cinématique :

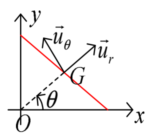
On note G le milieu de l'échelle (c'en est aussi le barycentre) :



On a $OG=\dfrac{L}{2}$ (C'est la longueur de la médiane relative à l'hypoténuse)

Ainsi, G décrit un arc de cercle dont le centre est O.

- σ_{Oz} :



Si on suppose que l'échelle reste toujours contre le mur, on a un seul paramètre θ.
On a :

$$\sigma_{Oz} = \vec{\sigma}(O)\cdot\vec{u}_z$$
$$= (\vec{\sigma}(G) + \overrightarrow{OG}\wedge M\vec{v}(G))\cdot\vec{u}_z$$
$$= \underbrace{\vec{\sigma}(G)\cdot\vec{u}_z}_{\sigma_{Gz}} + \overrightarrow{OG}\wedge M\vec{v}(G)\cdot\vec{u}_z$$

$\sigma_{Gz} = -J_\Delta\dot{\theta}$ (pour le signe $-$: on doit donner l'angle de la direction *fixe* à la direction *mobile* et pas le contraire)

Soit $\sigma_{Gz} = -M\dfrac{L^2}{12}\dot{\theta}$.

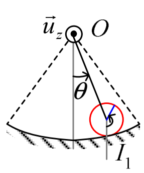
De plus, $\overrightarrow{OG} = \dfrac{L}{2}\vec{u}_r$, et $\vec{v}(G) = \dfrac{L}{2}\dot{\theta}.\vec{u}_\theta$ donc $\overrightarrow{OG}\wedge M\vec{v}(G)\cdot\vec{u}_z = \dfrac{ML^2}{4}\dot{\theta}$.

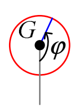
Ainsi, $\sigma_{Oz} = M\dfrac{L^2}{6}\dot{\theta}$

- E_C :

$$E_C = \tfrac{1}{2}M\vec{v}(G)^2 + \tfrac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2$$
$$= \tfrac{1}{2}M\frac{L^2}{4}\dot{\theta}^2 + \tfrac{1}{2}\frac{ML^2}{12}\dot{\theta}^2$$
$$= \tfrac{1}{6}ML^2\dot{\theta}^2$$

B) 2ème complément





G : centre d'inertie du disque homogène.

- Etude cinématique :

Si la pièce peut glisser, θ et φ peuvent varier indépendamment l'un de l'autre.
On suppose que la pièce roule sans glisser :
I_1 : point de contact, appartenant au disque.
Condition de roulement sans glissement : $\vec{v}(I_1) = \vec{0}$.
Donc $\vec{v}(G) = \vec{v}(I_1) + \overrightarrow{GI_1}\wedge\vec{\Omega}$, soit $(R_2 - R_1)\dot{\theta}.\vec{u}_\theta = \vec{0} + R_1\vec{u}_r\wedge\dot{\varphi}.\vec{u}_z$
Donc $(R_2 - R_1)\dot{\theta} = -R_1\dot{\varphi}$.

- σ_{Oz} :

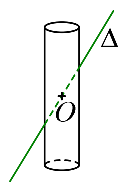
$$\sigma_{Oz} = \vec{\sigma}(O)\cdot\vec{u}_z$$
$$= (\vec{\sigma}(G) + \overrightarrow{OG}\wedge M\vec{v}(G))\cdot\vec{u}_z$$
$$= \tfrac{1}{2}MR_1^2\dot{\varphi} + ((R_2 - R_1)\vec{u}_r \wedge M(R_2 - R_1)\dot{\theta}.\vec{u}_\theta)\cdot\vec{u}_z$$
$$= \tfrac{1}{2}MR_1^2\dot{\varphi} + M(R_2 - R_1)^2\dot{\theta}$$

- E_C :

$$E_C = \tfrac{1}{2}M\vec{v}(G)^2 + \tfrac{1}{2}J_\Delta\dot{\varphi}^2$$
$$= \tfrac{1}{2}M(R_2 - R_1)^2\dot{\theta}^2 + \tfrac{1}{2}\times\tfrac{1}{2}MR_1^2\dot{\varphi}^2$$

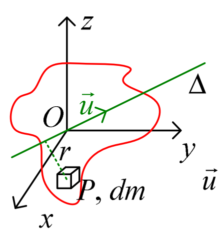
C) Opérateur d'inertie

1) Moment d'inertie par rapport à un axe passant par O.



(O : centre du cylindre)

- On voudrait calculer J_Δ…
- Astuce :



$$\vec{u} = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$$

($\vec{u}$ est unitaire)

On a $J_\Delta = \iiint dm.r^2$

Et $r^2 = (\overrightarrow{OP}\wedge\vec{u})^2 = (\overrightarrow{OP}\wedge\vec{u})\cdot(\overrightarrow{OP}\wedge\vec{u}) = -\vec{u}\cdot(\overrightarrow{OP}\wedge(\overrightarrow{OP}\wedge\vec{u}))$

Donc $J_\Delta = -\vec{u}\cdot\iiint dm.(\overrightarrow{OP}\wedge(\overrightarrow{OP}\wedge\vec{u}))$

- On a :

$$-\vec{u}\cdot(\overrightarrow{OP}\wedge(\overrightarrow{OP}\wedge\vec{u})) = -(\alpha\quad\beta\quad\gamma)\begin{pmatrix}0 & -z & y\\ z & 0 & -x\\ -y & x & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -z & y\\ z & 0 & -x\\ -y & x & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$$

$$= -(\alpha\quad\beta\quad\gamma)\begin{pmatrix}y^2+z^2 & -xy & -xz\\ -xy & x^2+z^2 & -yz\\ -xz & -yz & x^2+y^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$$

Donc par intégration $J_\Delta = \begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix} J_{Ox} & -P_{xy} & -P_{xz} \\ -P_{xy} & J_{Oy} & -P_{yz} \\ -P_{xz} & -P_{yz} & J_{Oz}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta \\ \gamma\end{pmatrix}$

($P_{xy} = \iiint dm.xy$: produit d'inertie)

2) Opérateur d'inertie

$J_\Delta = \vec{u} \cdot J_O(\vec{u})$ où J_O est l'endomorphisme de matrice la matrice précédente.

On appelle J_O l'opérateur d'inertie ;

$J_O(= -\iiint dm.\overrightarrow{OP} \wedge (\overrightarrow{OP} \wedge$

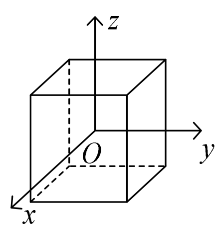
3) Axes principaux d'inertie

- Définition :

Ce sont trois axes *Ox*, *Oy*, *Oz* tels que la matrice soit $\begin{pmatrix} J_{Ox} & 0 & 0 \\ 0 & J_{Oy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{Oz}\end{pmatrix}$.

- Exemples :

- Parallélépipède rectangle :



Ox, *Oy* et *Oz* sont les axes principaux d'inertie :

$P_{xy} = \iiint dm.xy = \iiint_{y>0} dm.xy + \iiint_{y<0} dm.xy = 0$

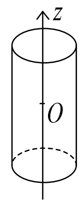
On a donc la matrice $\frac{M}{12}\begin{pmatrix} b^2+c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2\end{pmatrix}$

- Pour un cube :

La matrice devient $\frac{Ma^2}{6}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

Ainsi, le moment d'inertie par rapport à un axe passant par *O* ne dépend pas de l'orientation de l'axe.

- Cylindre de révolution :



Par symétrie, Oz est un axe principal d'inertie.
On peut ensuite choisir Ox, Oy orthogonaux à Oz.

On a ainsi la matrice $\begin{pmatrix} M\left(\frac{R^2}{4}+\frac{h^2}{12}\right) & 0 & 0 \\ 0 & M\left(\frac{R^2}{4}+\frac{h^2}{12}\right) & 0 \\ 0 & 0 & M\frac{R^2}{2} \end{pmatrix}$

4) Mouvement d'un solide S autour d'un point fixe O.

(O appartenant à S *cinétiquement*)

- Moment cinétique :

$\vec{\sigma}(O) = \iiint \overrightarrow{OP} \wedge dm.\vec{v}(P)$

Et $\vec{v}(P) = \underbrace{\vec{v}(O)}_{=\vec{0}} + \overrightarrow{PO} \wedge \vec{\Omega}$

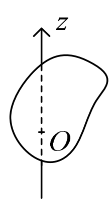
Donc $\vec{\sigma}(O) = -\iiint dm.\overrightarrow{OP} \wedge (\overrightarrow{OP} \wedge \vec{\Omega}) = J_O(\vec{\Omega})$

- Energie cinétique :

$$E_C = \iiint \frac{1}{2} dm.\vec{v}(P)^2 = \iiint \frac{1}{2} dm.(\overrightarrow{OP} \wedge \vec{\Omega})^2 = \frac{1}{2}\vec{\Omega} \cdot \iiint - dm.\overrightarrow{OP} \wedge (\overrightarrow{OP} \wedge \vec{\Omega})$$

$$= \frac{1}{2}\vec{\Omega} \cdot J_O(\vec{\Omega}) = \frac{1}{2}\vec{\Omega} \cdot \vec{\sigma}(O)$$

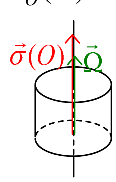
5) Mouvement d'un solide autour d'un axe fixe



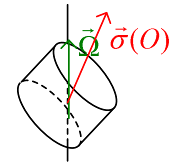
On a $\vec{\Omega} = \Omega.\vec{u}_z = \dot{\theta}.\vec{u}_z$, et $\vec{\sigma}(O) = J_O(\vec{\Omega})$ (O est toujours fixe)

- Si Oz est axe principal d'inertie :

$J_O(\vec{\Omega}) = J_{Oz}\vec{\Omega} = J_{Oz}\dot{\theta}.\vec{u}_z$



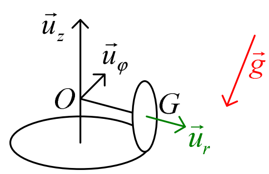
- Si Oz n'est pas axe principal d'inertie :



On a donc un mouvement de précession :

$$\frac{d\vec{\sigma}(O)}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{\sigma}(O)$$

6) Exemple d'application



(On suppose qu'on a roulement sans glissement)

$(O,\vec{u}_r)$ est un axe principal d'inertie.

On peut prendre $(G,\vec{u}_z)$ et $(G,\vec{u}_\varphi)$ pour les autres.

On a ainsi la matrice (avec le théorème de Huygens) :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}MR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}MR^2 + Ml^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}MR^2 + Ml^2 \end{pmatrix}$$

On a $\vec{\Omega} = \dot{\theta}.\vec{u}_r + \dot{\varphi}.\vec{u}_z$.

Donc $E_C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \dot{\theta} & 0 & \dot{\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}MR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}MR^2 + Ml^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}MR^2 + Ml^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}$

Soit $E_C = \frac{1}{4}mR^2\dot{\theta}^2 + \left(\frac{1}{8}mR^2 + \frac{1}{2}ml^2\right)\dot{\varphi}^2$.