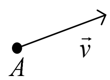
Chapitre 1 : Torseurs

I Moment d’un pointeur

Pointeur : c’est un couple $(A,\vec{v})$ composé d’un point A et d’un vecteur $\vec{v}$ associé.



A) Moment par rapport à un point *O*.

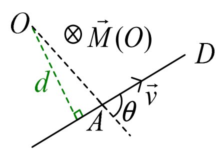
1) Définition

C’est le vecteur $\vec{M}(O)=\overrightarrow{OA}\wedge\vec{v}$

On obtient ainsi un champs de vecteurs $O\mapsto\vec{M}(O)$.

2) Propriétés

On prend un plan π contenant $\overrightarrow{OA}$ et $\vec{v}$:



Ainsi, $\vec{M}(O)\perp\pi$, et $\left\|\vec{M}(O)\right\|=\underbrace{OA\times|\sin\theta|}_{d}\times\left\|\vec{v}\right\|=v\times d$

d s’appelle le bras de levier

3) Cas de nullité

$\vec{M}(O)=\vec{0}\Leftrightarrow O\in D$

4) Champs de moments

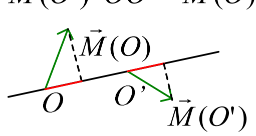
- Composition :

$\vec{M}(O')=\overrightarrow{O'A}\wedge\vec{v}=\overrightarrow{OA}\wedge\vec{v}+\overrightarrow{O'O}\wedge\vec{v}$

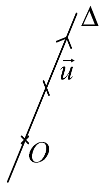
Soit $\boxed{\vec{M}(O')=\vec{M}(O)+\overrightarrow{O'O}\wedge\vec{v}}$

- Equiprojectivité :

$\vec{M}(O')\cdot\overrightarrow{OO'}=\vec{M}(O)\cdot\overrightarrow{OO'}$



B) Moment par rapport à un axe orienté



O est un point de Δ, $\vec{u}$ est un vecteur unitaire.

1) Définition

$$M_\Delta = \vec{M}(O)\cdot\vec{u}$$

C'est donc la projection de $\vec{M}(O)$ sur Δ.

2) Propriétés

C'est un scalaire, algébrique (dépend du sens de $\vec{u}$)
Il est indépendant du point O choisi sur Δ.

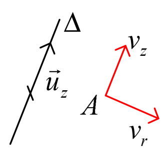
3) Cas de nullité

- Soit $\vec{M}(O)=\vec{0}$. Alors $O\in D$, donc D et Δ sont sécantes
- Soit $\vec{M}(O)\perp\vec{u}$.

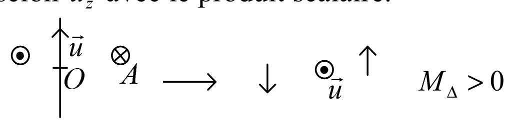
Comme $\vec{M}(O)\perp\pi$ (où π est un plan contenant D et $\overrightarrow{OA}$), on a donc $\vec{u}\in\pi$, donc $\Delta\subset\pi$. Ainsi, soit D coupe Δ, soit les deux droites sont parallèles.

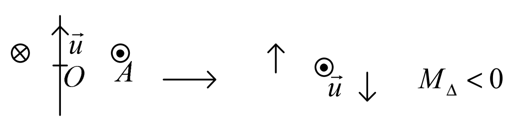
Ainsi, M_Δ est nul lorsque D et Δ sont coplanaires.

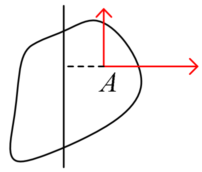
4) Signe



On a $\vec{v}=v_r\vec{u}_r+v_\theta\vec{u}_\theta+v_z\vec{u}_z$. Donc seule la composante orthoradiale intervient, puisque la composante radiale disparaît avec le produit vectoriel puis celle selon $\vec{u}_z$ avec le produit scalaire.







Si on exerce une force sans composante orthoradiale, le solide ne tournera pas. Plus la force orthoradiale sera importante, plus elle sera efficace, et de même pour la taille du bras de levier (c'est-à-dire la distance de A à l'axe)

II Système de pointeurs

$(A_1,\vec{v}_1),(A_2,\vec{v}_2),...(A_i,\vec{v}_i)$

A) Résultante des pointeurs

Définition : $\vec{R}=\sum\vec{v}_i$

B) Moment

En O : $\vec{M}(O)=\sum\vec{M}_i(O)$

Remarque : on a $\vec{v}_i\perp\vec{M}_i(O)$, mais en général $\vec{R}\not\perp\vec{M}(O)$.

En un point O' :

$$\vec{M}(O')=\sum\vec{M}_i(O')=\sum\vec{M}_i(O)+\overrightarrow{O'O}\wedge\vec{v}_i$$
$$=\vec{M}(O)+\overrightarrow{O'O}\wedge\sum\vec{v}_i$$

Soit $\boxed{\vec{M}(O')=\vec{M}(O)+\overrightarrow{O'O}\wedge\vec{R}}$

III Torseurs

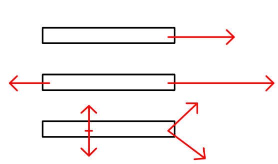
A) Systèmes de pointeurs équivalents

1) Définition

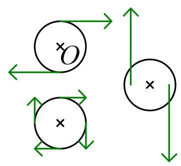
Deux systèmes de pointeurs sont équivalents lorsqu'ils ont la même résultante et le même moment en un point O

Pour un autre point O' quelconque, on aura donc aussi le même moment dans chaque système

2) Exemples



Ces trois systèmes sont équivalents. (même résultante, moment nul)



Pour les trois systèmes, la résultante est nulle, mais le moment en O de ces trois systèmes de vecteurs est le même.

Si les flèches représentent des forces, ces forces auront toutes le même effet sur la règle/la poulie. On a donc juste besoin de la résultante et du moment cinétique pour déterminer le mouvement d'un solide, mais on perd des détails ; par exemple, une règle en caoutchouc se déformera avec le deuxième cas mais pas avec le premier, même si elle a globalement le même mouvement.

B) Torseurs

1) Définition

Un torseur correspond à une classe d'équivalence entre les systèmes de pointeurs : c'est la donnée de la résultante $\vec{R}$ et de $\vec{M}(O)$, appelés éléments de réduction en O. On note ce torseur $[\vec{R}]$.

2) Axe central

C'est l'ensemble des points O tels que $\vec{M}(O) // \vec{R}$.

C) Opérations sur les torseurs

1) Addition

$$[\vec{R}]=[\vec{R}_1]+[\vec{R}_2]\begin{cases}\vec{R}=\vec{R}_1+\vec{R}_2\\ \vec{M}(O)=\vec{M}_1(O)+\vec{M}_2(O)\end{cases}$$

2) Multiplication par un scalaire

$$\lambda[\vec{R}]\begin{cases}\lambda\vec{R}\\ \lambda\vec{M}(O)\end{cases}$$

3) Produit scalaire de deux torseurs

$[\vec{R}_1]\cdot[\vec{R}_2]=\vec{R}_1\cdot\vec{M}_2(O)+\vec{R}_2\cdot\vec{M}_1(O)$ (indépendant de O)

Attention, ce n'est pas un produit scalaire au sens mathématique du terme – l'application n'est pas définie–positive (C'est juste un produit donnant un scalaire comme résultat…)

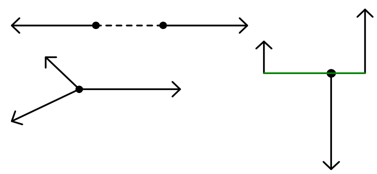
D) Torseurs particuliers

1) Torseur nul

Définition :

C'est un torseur pour lequel $\vec{R} = \vec{0}$ et pour un point *O*, $\vec{M}(O) = \vec{0}$; (ainsi, on a même, pour tout point *O'*, $\vec{M}(O') = \vec{0}$ et on peut noter $\vec{M} = \vec{0}$)

Exemple :



2) Glisseur

- Définition :

C'est un torseur tel que $\vec{R} \neq \vec{0}$ mais pour lequel il existe un point *O* tel que $\vec{M}(O) = \vec{0}$.

- Exemple :

- 1ère condition nécessaire et suffisante :

Il existe un système formé d'un pointeur unique.
En effet :

Un pointeur unique $(A, \vec{v})$ est un glisseur puisqu'on a $\vec{R} = \vec{v} \neq \vec{0}$ et $\vec{M}(A) = \vec{0}$.

D'autre part, si un torseur vérifie $\vec{R} \neq \vec{0}$ et $\vec{M}(O) = \vec{0}$ pour un certain *O*, alors $(O, \vec{R})$ est un pointeur unique, et ce pointeur est bien dans le torseur.

- 2ème CNS :

$\forall O', \vec{M}(O') \perp \vec{R}$

Condition nécessaire : ok

(s'il existe *O* tel que $\vec{M}(O) = \vec{0}$, alors pour tout *O'*, $\vec{M}(O') = \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{R} \perp \vec{R}$)

Condition suffisante :

Si $\forall O', \vec{M}(O') \perp \vec{R}$

On a $\vec{M}(O') = \vec{M}(O) + \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{R}$.

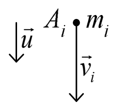
On doit donc chercher *O* tel que $\vec{M}(O') = \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{R}$

Il existe une solution :

(on peut faire une division vectorielle puisque $\vec{M}(O') \perp \vec{R}$).

On a $\overrightarrow{O'O} = \dfrac{\vec{R} \wedge \vec{M}(O')}{\|\vec{R}\|^2} + \lambda \vec{R}$.

- Cas particulier important :



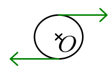
Avec $\vec{v}_i = m_i \vec{u}$, où $\vec{u}$ est un vecteur fixe.
Montrons que c'est un glisseur :
On doit chercher O tel que $\sum \vec{M}_i(O) = \vec{0}$,
C'est-à-dire tel que $\sum \overrightarrow{OA_i} \wedge m_i \vec{u} = \vec{0}$
Soit tel que $\left(\sum m_i \overrightarrow{OA_i}\right) \wedge \vec{u} = \vec{0}$
On peut prendre en effet G, barycentre des masses.
On a ainsi $\vec{R} = \sum m_i \vec{u} = M\vec{u}$.

3) Couple

- Définition :

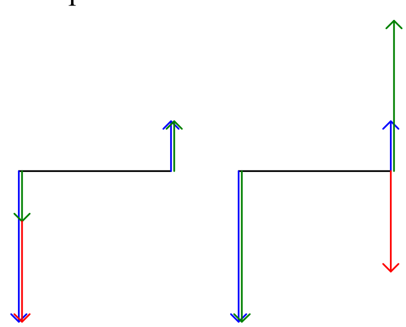
C'est un torseur pour lequel $\vec{R} = 0$ et $\vec{M} \neq \vec{0}$ (on a ainsi $\vec{M}(O') = \vec{M}(O)$ pour tous O et O')

- Exemple :



4) Décomposition d'un torseur quelconque

Tout torseur peut être décomposé en la somme d'un glisseur et d'un couple (Attention, la décomposition n'est pas unique !)
Exemple :



- Torseur
- Glisseur
- Couple