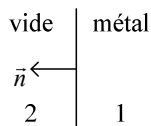




Chapitre 16 : Réflexion des ondes électromagnétiques sur un conducteur

I Relation de passage du vide à un métal non magnétique



A) Cas d'un métal réel non magnétique

1) Polarisation et aimantation

- Aimantation :

On a $\vec{j}_{\text{lié}} = \vec{0}$ (le métal n'est pas magnétique)

Donc $\mu_r = 1$

(Ne s'applique pas à Fe, Co, Ni)

- Polarisation :

Electrons de valence : $\rho_{\text{lié}}$

Electrons de conduction : \vec{j}_{libre}

On peut considérer que le métal est constitué d'ions rigides et d'électrons se déplaçant librement. Ainsi, $\epsilon_r = 1$.

2) Equations de Maxwell

On se place dans le cas d'une pulsation différente de la pulsation plasma (donc $\rho_{\text{libre}} = 0$) :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho_{\text{libre}}}{\epsilon_0} = 0 & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \vec{\nabla} \wedge \vec{B} &= \mu_0 (\vec{j}_{\text{libre}} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \end{aligned}$$

3) Discontinuité des champs

- On a $\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$

- Et $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}$

Dans un métal *réel*, $\vec{j}_s = \vec{0}$

Donc \vec{B} est continu à la traversée de la surface.

B) Cas d'un métal parfait

1) Définition

C'est lorsque le métal a une conductivité infinie
(C'est presque un supraconducteur, mais on n'a pas forcément l'effet Meissner)

2) Champs \vec{E} .

- Dans le métal,

$$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}$$

Et \vec{j} est fini (car si \vec{j} était infini, $p = \vec{j} \cdot \vec{E}$ le serait aussi)

$$\text{Donc } \vec{E} = \vec{0}$$

Donc d'après l'équation de Maxwell–Gauss, $\rho = 0$

Remarque :

A la surface du conducteur, on peut avoir \vec{j} infini (on a alors une puissance Joule infinie sur un volume nul)

- Au voisinage du métal :

$$\text{On a } \vec{E}_2 - \underbrace{\vec{E}_1}_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$$

$$\text{Donc } \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$$

3) Champ \vec{B} .

- Dans le conducteur, d'après l'équation de Maxwell–Faraday :

$$\vec{0} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \text{ Donc } \vec{B} = \vec{B}(\vec{r}). \text{ On prend alors } \vec{B} = \vec{0} \text{ (on s'intéresse uniquement$$

à la *propagation* du champ)

(Remarque : on voit ici que l'effet Meissner ne découle pas de la supposition qu'un métal a une conductivité infinie puisqu'en général $\vec{B} \neq \vec{0}$ dans le conducteur)

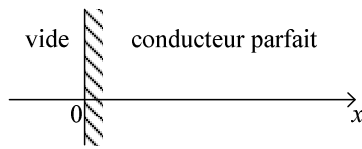
- Au voisinage :

$$\text{On a } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}$$

Remarque :

L'équation de Maxwell–Ampère montre qu'à l'intérieur $\vec{j} = \vec{0}$

II Réflexion d'une onde plane sur un plan conducteur parfait



A) Onde incidente

On suppose que c'est une OPPSPR (ça ne limite pas la généralité du résultat puisqu'on peut décomposer toute onde avec la décomposition de Fourier en OPPS, puis décomposer cette OPPS en deux OPPSPR), sous incidence normale ($\vec{k}_i = \frac{\omega}{c} \vec{u}_x = k \vec{u}_x$)

$$\text{Ainsi, } \vec{E}_i = \begin{cases} 0 \\ E_0 \exp(i(k.x - \omega.t)) \\ 0 \end{cases} \text{ et } \vec{B}_i = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ B_0 \exp(i(k.x - \omega.t)) \end{cases} \text{ où } B_0 = \frac{E_0}{c}$$

B) Onde réfléchie

1) Existence

- Energie :

Le conducteur parfait ne peut pas dissiper d'énergie, donc l'onde incidente doit repartir, et on a une onde réfléchie.

- Conditions aux limites :

$$\text{On a au voisinage du métal } \vec{E} = \frac{-\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_x$$

$$\text{C'est-à-dire } \vec{E}_i(x=0, t) + \vec{E}_r(x=0, t) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_x$$

$$\text{Et } \vec{B}_i(x=0, t) + \vec{B}_r(x=0, t) = -\mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{u}_x.$$

2) Structure

- L'onde réfléchie est une OPPS :

- Plane :

L'onde incidente, le milieu conducteur et la surface de séparation sont invariants par toute translation orthogonale à Ox , et sont à l'origine de l'onde réfléchie.

(Principe de Curie : l'effet a au moins les mêmes symétries/invariances que la cause)

$$\text{Ainsi, l'onde réfléchie est plane et } \vec{E}_r = \vec{E}_r(x, t)$$

- Progressive :

Pour $x < 0$, on a une onde plane solution de l'équation d'onde classique.

Or, toute onde plane $s(x, t)$ solution de l'équation d'onde classique s'écrit sous la forme $s(x, t) = s_+(t - x/c) + s_-(t + x/c)$ (Euler)

$$\text{Donc ici } \vec{E}(x,t) = \underbrace{\vec{E}_+(t-x/c)}_{\vec{E}_i} + \vec{E}_-(t+x/c)$$

Et donc $\vec{E}_r = \vec{E}_-$, onde régressive.

Comme \vec{E} est transverse (dans le vide), et \vec{E}_+ aussi, \vec{E}_r l'est donc aussi.

- Sinusoïdale :

(1) Conditions aux limites en $x=0$:

$$\vec{E}_i(t) + \vec{E}_r(t) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_x$$

Or, \vec{E}_i et \vec{E}_r sont transverses, donc $\vec{E}_i(t) + \vec{E}_r(t) = \vec{0}, \forall t$

Ainsi, $\forall t, \vec{E}_r(t) = -E_0 \exp(-i\omega t) \vec{u}_y$ (en 0)

(2) Donc en remplaçant t par $t+x/c$:

$$\vec{E}_r(t+x/c) = -E_0 \exp(-i\omega(t+x/c)) \vec{u}_y$$

Soit $\vec{E}_r(t,x) = -E_0 \exp(i(-kx - \omega t)) \vec{u}_y$

Avec $\vec{k}_r = k_r \vec{u}_x, k_r = -\frac{\omega}{c}$.

• Champ \vec{E}_r :

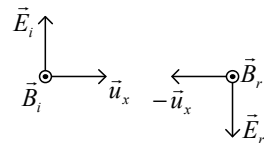
$$\text{On a } \vec{E}_i = \begin{cases} 0 \\ E_0 \exp(i(k.x - \omega t)) \\ 0 \end{cases}, \vec{E}_r = \begin{cases} 0 \\ -E_0 \exp(i(-k_r.x - \omega t)) \\ 0 \end{cases}$$

Les deux ondes ont donc la même amplitude, la même polarisation, avec un déphasage de π (signe -)

• Champ \vec{B}_r :

$(\vec{E}_r, c\vec{B}_r, -\vec{u}_x)$ forme un trièdre direct.

$$\text{Donc } \vec{B}_i = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ B_0 \exp(i(k.x - \omega t)) \end{cases}, \vec{B}_r = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ B_0 \exp(i(-k.x - \omega t)) \end{cases}$$



3) Charges, courants superficiels

• Charges :

$$\vec{E}_i(x=0) + \vec{E}_r(x=0) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_x$$

Mais \vec{E}_i et \vec{E}_r sont portés par \vec{u}_y .

Ainsi, $\sigma = 0$.

- Courants :

$$\text{On a } \vec{B}_i(x=0) + \vec{B}_r(x=0) = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n} = -\mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{u}_x$$

$$\text{Donc } 2B_0 e^{-i\omega t} \vec{u}_z = -\mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{u}_x$$

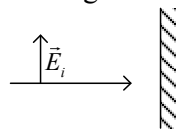
En faisant le produit vectoriel par \vec{u}_x :

$$2B_0 e^{-i\omega t} \vec{u}_y = -\mu_0 (-\vec{j}_s)$$

$$\text{Donc } \boxed{\vec{j}_s = \frac{2B_0}{\mu_0} e^{-i\omega t} \vec{u}_y}$$

4) Analyse physique

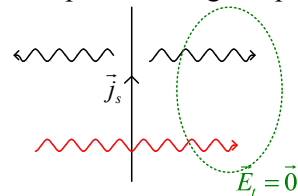
- Origine du courant superficiel :



Quand l'onde électrique arrive sur le conducteur, il met en mouvement les charges et provoque donc un courant superficiel \vec{j}_s .

- Onde rayonnée :

Les charges mises en mouvement sont en mouvement accéléré, et rayonnent d'un champ électromagnétique :

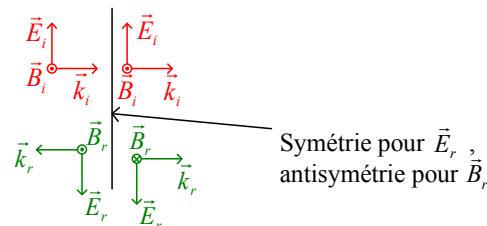


- Pour $x > 0$:

L'onde rayonnée se superpose à l'onde incidente en étant exactement en opposition de phase. On a une sorte de loi de Lenz à 100%...

- Pour $x < 0$:

Comme le plan $x=0$ est de symétrie, l'onde va se propager en sens inverse, et ne pourra donc pas l'annuler partout. On a donc une onde réfléchie.



C) Interférence de l'onde incidente et de l'onde réfléchie

On a une onde stationnaire :

1) Champ \vec{E} .

$$\text{On a } \vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_r = \begin{cases} 0 \\ 2iE_0 \sin kx \exp(-i\omega t) \\ 0 \end{cases}$$

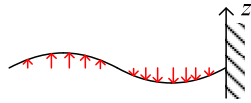
Ou en prenant la partie réelle :

$$\vec{E} = 2E_0 \sin(kx) \sin(\omega t) \vec{u}_y.$$

On a ainsi une onde stationnaire sinusoïdale :

En 0, on a un nœud de \vec{E} .

Distance entre deux nœuds : $\frac{\lambda_0}{2}$

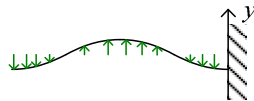


2) Champ \vec{B} .

$$\text{On a } \vec{B} = \vec{B}_i + \vec{B}_r = 2B_0 \cos(kx) \exp(-i\omega t) \vec{u}_z$$

$$\text{Ou en partie réelle : } \vec{B} = 2B_0 \cos(kx) \cos(\omega t) \vec{u}_z.$$

Les ventres et les nœuds sont inversés par rapport à \vec{E} .



\vec{E} est maximal quand \vec{B} est nul et vice versa (spatialement et temporellement)

3) Energie

- Densité d'énergie électromagnétique :

On a

$$\begin{aligned} u_{em} &= \frac{1}{2} (\epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2) \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_0 \times 4E_0^2 \sin^2(kx) \sin^2(\omega t) + \frac{1}{2\mu_0} 4B_0^2 \cos^2(kx) \cos^2(\omega t) \\ &= 2\epsilon_0 E_0^2 (\sin^2(kx) \sin^2(\omega t) + \cos^2(kx) \cos^2(\omega t)) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \langle u_{em} \rangle = \epsilon_0 E_0^2 (\sin^2(kx) + \cos^2(kx)) = \epsilon_0 E_0^2$$

Ainsi, l'énergie est répartie en moyenne uniformément dans tout l'espace.

- Vecteur de Poynting :

On a

$$\begin{aligned}\vec{\pi} &= \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} \\ &= \frac{4E_0 B_0}{\mu_0} \sin(kx) \cos(kx) \sin(\omega t) \cos(\omega t) \vec{u}_x \\ &= \frac{E_0 B_0}{\mu_0} \sin(2kx) \sin(2\omega t) \vec{u}_x\end{aligned}$$

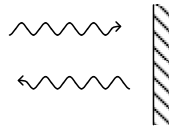
Et donc en moyenne $\langle \vec{\pi} \rangle = \vec{0}$

Il n'y a donc pas de flux d'énergie en moyenne temporelle (ce qui est normal pour une onde stationnaire...)

Remarque :

On a des plans verticaux où soit $\vec{E} = \vec{0}$ soit $\vec{B} = \vec{0}$, et dans les deux cas $\vec{\pi} = \vec{0}$ sur tout le plan et à tout instant, donc il ne peut pas y avoir de flux d'énergie dans tout l'espace, mais seulement entre ces plans.

D) Pression de radiation



L'onde va exercer une force sur le plan, et on aura donc une pression de radiation.

On suppose toujours que le conducteur est parfait et que l'onde arrive sous incidence normale.

1) En théorie corpusculaire

- Modèle :

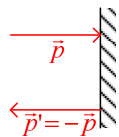
- Rayonnement :

Photons incidents : vitesse $\vec{c} = c\vec{u}_x$, énergie $h\nu$, quantité de mouvement

$$\vec{p} = \frac{h\nu}{c} \vec{u}_x, \text{ nombre de photons incidents par unité de volume } n.$$

(C'est équivalent à une OPPS)

- Réflexion :



On suppose que tous les photons incidents sont réfléchis

Que l'énergie n'est pas affectée (c'est-à-dire que l'OPPS se réfléchit sans changer de fréquence).

- Calcul de la pression :

- On note $\delta \vec{F}_{\text{paroi} \rightarrow \text{photons}}$ la force exercée par la paroi sur les photons. On a :

(1) Pour chaque photon, une variation de quantité de mouvement

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}' - \vec{p} = -2 \frac{h\nu}{c} \vec{u}_x$$

(2) $\delta^2 N = ncdt\delta S$ photons qui arrivent sur δS pendant dt

(3) Et donc une variation totale de quantité de mouvement de
 $\delta^2 \vec{p} = \delta^2 N \times \Delta \vec{p} = -2nh\nu\delta S \cdot dt \cdot \vec{u}_x$

(4) Ainsi, $\delta \vec{F}_{\text{photons} \rightarrow \text{paroi}} = \frac{\delta^2 \vec{p}}{dt} = -2nh\nu\delta S \cdot \vec{u}_x$

- Donc $\delta \vec{F}_{\text{paroi} \rightarrow \text{photons}} = 2nh\nu\delta S \cdot \vec{u}_x$

C'est-à-dire $P = 2nh\nu$

On reconnaît $nh\nu$ la densité d'énergie incidente par unité de volume, et le facteur 2 est pour la densité totale (incidente et réfléchie)

Ainsi, $P = u_{em}$

2) En théorie ondulatoire

- Hypothèses :

$$\vec{E}_i = E_0 \exp i(kx - \omega t) \vec{u}_y$$

$$\vec{B}_i = B_0 \exp i(kx - \omega t) \vec{u}_z$$

- Courant superficiel induit :

$$\vec{j}_s = \frac{2B_0}{\mu_0} \exp(-i\omega t) \vec{u}_y$$

- Force de Laplace induite :

$$\text{On a } d\vec{F}_l = \vec{j}_s dS \wedge \vec{B}_i (x=0)$$

(Attention : on ne peut pas utiliser le calcul direct en complexe puisqu'on a un produit)

Et en moyenne :

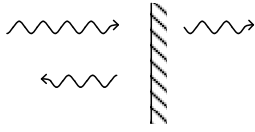
$$\begin{aligned} \langle d\vec{F}_l \rangle &= \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{j}_s \wedge \vec{B}_i^*) dS \\ &= \frac{1}{2} \frac{2B_0^2}{\mu_0} dS \vec{u}_x = \frac{B_0^2}{\mu_0} \vec{u}_x \cdot dS \end{aligned}$$

$$\text{Donc } P = \frac{B_0^2}{\mu_0} = \epsilon_0 E_0^2 (= u_{em})$$

Remarque :

On a pris uniquement \vec{B}_i dans le calcul de la force de Laplace induite, et pas \vec{B}_r . \vec{j}_s n'est pas en effet soumise à \vec{B}_r , puisque c'est ce courant qui crée le champ !

III Réflexion d'une onde plane sur un conducteur non parfait



On va s'intéresser à l'onde transmise (pour l'onde réfléchie, on sait faire...):

- On aura une propagation amortie
- Ou pas de propagation du tout.

On suppose le conducteur homogène, que l'onde est une OPPS et sous incidence normale.

A) Propagation dans le conducteur

1) Equations de Maxwell

On suppose que $\epsilon_r = \mu_r = 1$, $\rho = 0$ (c'est-à-dire $\omega \neq \omega_p$), et que le conducteur est ohmique : $\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}$

$$\text{Avec } \sigma = \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau}, \quad \sigma_0 = \frac{nq^2\tau}{m}.$$

Les équations s'écrivent donc en transformée de Fourier :

$$\begin{aligned} i\vec{k} \cdot \vec{E} &= 0 & i\vec{k} \wedge \vec{E} &= i\omega\vec{B} \\ i\vec{k} \cdot \vec{B} &= 0 & i\vec{k} \wedge \vec{B} &= \mu_0(\vec{j} - i\omega\epsilon_0\vec{E}) \end{aligned}$$

Les deux équations de gauche montrent déjà que l'onde est transverse électromagnétique.

2) Relation de dispersion

On a d'après les équations précédentes :

$$i\vec{k} \wedge \left(\frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E} \right) = \mu_0(\sigma - i\omega\epsilon_0)\vec{E}$$

$$\text{C'est-à-dire } -i\frac{\vec{k}^2}{\omega}\vec{E} = \mu_0(\sigma - i\omega\epsilon_0)\vec{E}$$

$$\text{Soit } k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} + i\omega\mu_0\sigma$$

On reconnaît dans le premier terme la propagation venant du courant de déplacement, et dans le deuxième celle venant du courant de conduction.

B) Domaine ohmique

1) Définition

$$\text{C'est lorsque } \frac{1}{\tau} \gg \omega, \text{ soit } \tau \ll T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

C'est-à-dire que les porteurs de charge ont beaucoup de chocs au cours d'une période. Ainsi, $\sigma \approx \sigma_0$

2) Ordres de grandeur

On a $\tau \sim 10^{-14}$ s, donc $\omega < 10^{12}$ rad.s⁻¹, ou $\lambda_0 > 2.10^{-3}$ m
(Correspond au domaine hertzien)

3) Relation de dispersion

$$\text{On a } \frac{\omega^2 / c^2}{\omega \mu_0 \sigma} = \frac{\omega \epsilon_0}{\sigma} \lesssim \frac{10^{12} 10^{-11}}{10^7} \ll 1$$

Donc on peut écrire l'équation de dispersion sous la forme

$$k^2 = i \mu_0 \omega \sigma_0$$

$$\text{Soit } k = \pm(1+i) \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \sigma_0}{2}} = \pm(1+i) / \delta$$

4) Equation d'onde

On a pour les opérateurs, à partir de la relation de dispersion :

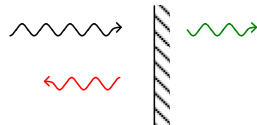
$$-\vec{\nabla}^2 = -\mu_0 \sigma_0 \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\text{Soit pour } \vec{E} : \vec{\nabla}^2 \vec{E} = \mu_0 \sigma_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

On obtient ainsi une équation de diffusion (comme pour l'équation de la chaleur), et qui traduit un phénomène irréversible.

5) Onde transmise

- Structure des champs



(On suppose que le métal est infini, il n'y a donc pas de retour de l'onde)

Onde transmise :

Elle sera progressive dans le sens positif, donc $\text{Re}(k) > 0$, et $k = \frac{1+i}{\delta}$.

Avec $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \sigma_0}}$, épaisseur de peau.

- Champ \vec{E} :

$$\text{On a } \vec{E}_t = \vec{E}_{t_0} \exp i(kx - \omega t) = \vec{E}_{t_0} \exp(-x/\delta) \exp i(x/\delta - \omega t)$$

- Champ \vec{B} :
L'équation de Maxwell-Faraday donne :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E}, \text{ avec } \vec{k} = k\vec{u}_x$$

Donc $\vec{B} = \vec{B}_{t_0} \exp(-x/\delta) \exp i(x/\delta - \omega t)$

Avec $\vec{B}_{t_0} = \frac{1+i}{\delta\omega} \vec{u}_x \wedge \vec{E}_{t_0}$

• Propagation :
- Longueur d'onde :

On a $\lambda = \frac{2\pi}{\text{Re}(k)} = 2\pi\delta$

Et $\frac{\lambda}{\lambda_0} = \sqrt{\frac{2\omega\epsilon_0}{\sigma_0}} \ll 1$

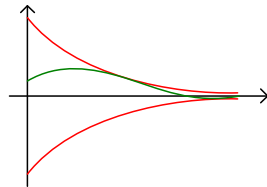
- Dispersion :
On a $v_\phi = \frac{\omega}{\text{Re}(k)} = \delta.\omega$

- Amortissement :
Il est en $\exp(-x/\delta)$.

Donc l'onde ne pénètre que sur quelques δ (d'où le nom d'épaisseur de peau)

Remarque :
On a $\lambda = 2\pi\delta \sim 6\delta$

Donc l'onde est quasiment morte avant même qu'il n'y ait une longueur d'onde complète :



• Amplitude des champs :
Conditions aux limites en $x = 0$:
 \vec{B} est continu à la traversée de la surface ($\vec{j}_s = \vec{0}$ pour un conducteur réel)

Et continuité de la composante tangentielle de \vec{E}
On a $\vec{B}_i(x=0) + \vec{B}_r(x=0) = \vec{B}_t(x=0)$. D'où on tire $\vec{B}_{t_0} \dots$

6) Effet de peau

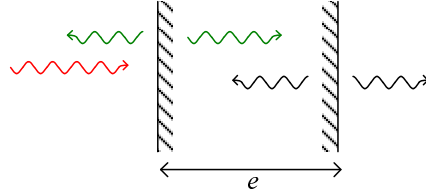
• Epaisseur de peau :

On a $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\sigma_0\omega}}$

Lorsque la conductivité diminue, δ augmente et quand $\sigma \rightarrow +\infty$, on a $\delta = 0$.

Lorsque la pulsation ω augmente (ou λ_0 diminue), δ diminue.

- Absorption sélective :



- Si $\delta \ll e$, l'onde est totalement absorbée avant d'arriver à l'autre bord.

Si $\delta > e$, l'onde atteint l'autre bord, et on a une onde transmise.

- Exemple :

Pour de l'aluminium, d'épaisseur $e = 1\text{mm}$:

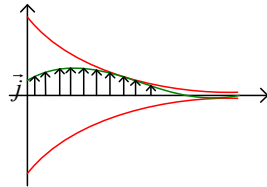
Si $\lambda_0 = 0,2\text{m}$ ($\omega = 10^{10}\text{rad.s}^{-1}$), on aura $\delta = 1,5 \cdot 10^{-6}\text{m}$, et l'onde sera totalement absorbée.

Si $\lambda_0 = 2 \cdot 10^5\text{m}$ ($\omega = 10^4\text{rad.s}^{-1}$), on aura $\delta = 3 \cdot 10^{-3}\text{m}$, et l'onde pourra traverser.

- Si on envoie un mélange d'onde, les pulsations les plus basses vont passer alors que les plus hautes seront absorbées. On a donc un filtre passe-bas.

- Courant pelliculaire :

On a $\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}$

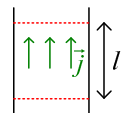


On a donc un courant pelliculaire (une onde de courant)

Dans un conducteur parfait, $\delta \rightarrow 0$, $\vec{j} \rightarrow +\infty$

Et $\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \vec{j} dx = \vec{j}_s$; on a un courant surfacique.

7) Résistance d'un conducteur



- En courant continu :

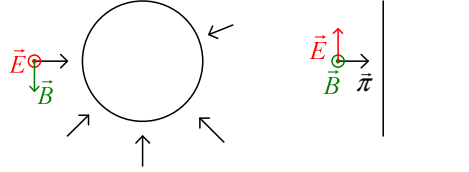
- Densité de courant uniforme

- Résistance du conducteur :

$$I = \vec{j} \cdot \vec{S} = \sigma \cdot \vec{E} \cdot \vec{S} = \frac{\sigma \cdot S}{l} U$$

$$\text{Donc } R = \frac{l}{\sigma \cdot S}$$

- Champ électromagnétique :



En régime permanent, le flux de $\vec{\pi}$ entrant est égal à l'énergie dissipée par effet Joule.

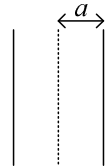
• En courant alternatif :

- Champ à l'extérieur :

On a la même structure mais \vec{E} et \vec{B} vont se propager.

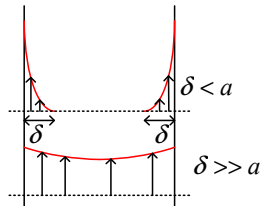
- A l'intérieur :

On a vu, avec les opérateurs : $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{-1}{\mu_0 \sigma_0} \nabla^2$



Si $a \gg \delta$, l'onde pénètre sur une très petite distance (la surface est alors quasiment plane)

- Densité de courant :



- Résistance :

On n'a plus $R = \frac{l}{\sigma S}$ (\vec{j} n'est plus uniforme)

Section utile : la surface à prendre en compte devient uniquement la couronne extérieure, c'est-à-dire $s \sim 2\pi a \delta$ (si $\delta < a$). On a alors une plus grande

résistance $R' \sim R \times \frac{a}{2\delta}$ (et proportionnelle à $\sqrt{\omega}$)

Application numérique :

Pour le cuivre, $\sigma = 59 \cdot 10^6 \text{ S.m}^{-1}$. Si on prend un rayon $a \sim 1 \text{ mm}$,

On aura pour une fréquence $\nu \sim 50 \text{ Hz}$, $\delta \sim 9,3 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ et donc $R' \sim R$

Et pour $\nu \sim 50 \text{ MHz}$, on aura $\delta \sim 9,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ et donc $R' \sim 54R$.

C) Domaine optique

1) Définition

C'est lorsque $\omega\tau \gg 1$

On a alors $\sigma \approx i \frac{nq^2}{m\omega}$, qui correspond à la même forme que pour un plasma.

2) Ordre de grandeur

On a $\tau \sim 10^{-15}$ s, donc $\omega \gg 10^{15}$ rad.s⁻¹ et $\lambda_0 \ll 2\mu\text{m}$

3) Relation de dispersion

Elle s'écrit alors $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} + i\omega\mu_0 \left(i \frac{nq^2}{m\omega} \right) = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$ où $\omega_p = \sqrt{\frac{nq^2}{m\epsilon_0}}$.

On a dans un métal $n \sim 10^{30}$ m⁻³.

Donc $\omega_p \sim 6.10^{16}$ rad.s⁻¹ et $\lambda_p \sim 0,03\mu\text{m}$.

Les deux cas $\omega > \omega_p$ et $\omega < \omega_p$ sont donc possibles ($\lambda_p \ll 2\mu\text{m}$).

4) Equation d'onde

$$\square \vec{E} = \frac{\omega_p^2}{c^2} \vec{E} \text{ (Klein-Gordon)}$$

5) Onde transmise

- Si $\omega > \omega_p$ (rayons UV, X) :

On a alors $k \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire une propagation sans atténuation.

Vitesse de phase : $v_\phi = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$. Vitesse de groupe : $v_g = c\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$

Le métal est donc transparent à l'UV et aux rayons X.

- Si $\omega < \omega_p$:

On a $k \in i\mathbb{R}$,

Et $\vec{E}_t = \vec{E}_0 \exp(-x/\delta) \exp(-i\omega t)$ où $\delta = \frac{c}{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}$.

On a donc une onde évanescente (donc pas de propagation)

6) Effet Joule

On a $\sigma \in i\mathbb{R}$

$$\text{Donc } \langle p \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{j} \cdot \vec{E}^*) = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{E}^* \text{Re}(\sigma) = 0$$

(De plus, $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ donc le courant et le champ sont déphasés de $\frac{\pi}{2}$)