

Chapitre 14 : Autoinduction, induction mutuelle

I Autoinduction

A) Flux propre



$$\text{On a } \phi_{\text{propre}} = \iint \vec{B}_{\text{propre}} \cdot d\vec{S}$$

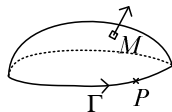
Remarque :

Quand on veut calculer ϕ_{propre} , on obtient des intégrales divergentes

(On oublie ce problème pour l'instant, mais on verra plus tard comment le régler)

B) Autoinductance

1) Définition



$$\text{On a } \vec{B}(M) = \oint \frac{\mu_0}{4\pi} Id\vec{l} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\text{Et } \phi_{\text{propre}} = \iint \vec{B}(M) \cdot d\vec{S}$$

On peut sortir I de l'intégrale, et noter $\phi_{\text{propre}} = LI$

2) Propriétés

- S'exprime en Henry ; ainsi, μ_0 s'exprime en H.m^{-1}
- On verra plus tard que $L > 0$
- Et L ne dépend pas du matériau considéré, mais seulement de sa géométrie (on le voit sur la formule précédente, quand on sort le I)

3) Augmentation de L .

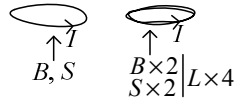
- Avec un barreau ferromagnétique :



Le courant i va créer un champ \vec{B} , qui va être augmenté à cause du barreau. On aura alors un flux propre plus important, et une inductance L qui augmente aussi. Mais on aura alors $\phi = L(i) \times i$, c'est-à-dire que la variation avec i ne sera

plus linéaire (il faut aussi que le barreau puisse s'aimanter et se désaimanter facilement, par exemple avec du fer doux)

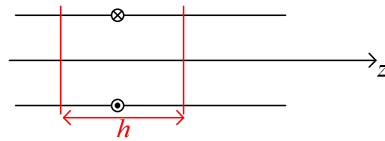
- Avec un bobinage :



Pour N spires, L sera multiplié par N^2 .

4) Exemple

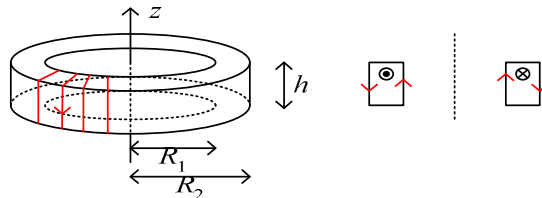
- Solénoïde infini :



Pour une spire, $\phi = \mu_0 n I S$

Pour nh spires, $\phi = \underbrace{\mu_0 n^2 S h I}_L$

- Bobine torique de section rectangulaire :



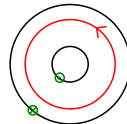
- Symétries :

On considère que le problème est invariant par rotation (c'est-à-dire qu'on a un bobinage très serré)

Tout plan contenant z est de symétrie pour les courants.

Donc $\vec{B} = B(r, z) \vec{u}_\theta$

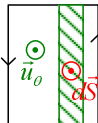
- Théorème d'Ampère :



On a $B \times 2\pi r = \mu_0 I N$

Donc $\vec{B} = \frac{\mu_0 I N}{2\pi r} \vec{u}_\theta$

- Flux à travers une spire :



On a $d\phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \times h dr$

Donc $\phi = \frac{\mu_0 N I}{2\pi} \times h \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$

- Coefficient L :

$$\text{On a } \phi = N\varphi = \frac{\mu_0 N^2}{2\pi} h \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) I \text{ donc } L = \frac{\mu_0 N^2}{2\pi} h \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right).$$

C) Force électromotrice d'autoinduction

1) Cas général

Si ϕ_{propre} varie, on aura une fem d'autoinduction $e_{\text{auto}} = -\frac{d\phi}{dt}$.

$$\text{Comme } \phi_{\text{propre}} = LI, \quad e_{\text{auto}} = -\frac{d(LI)}{dt}.$$

On peut donc avoir une fem d'autoinduction lorsque la géométrie du circuit varie ou lorsque l'intensité varie.

2) Pour un circuit indéformable

$$\text{On a alors } L = \text{cte}, \text{ et donc } e = -L \frac{dI}{dt}$$

Remarque :

Le signe négatif traduit la loi de Lenz.

Si $\frac{dI}{dt}$ est très important (quand on coupe avec un interrupteur), on aura un champ électromoteur très intense, et on peut parfois observer au niveau de l'interrupteur des étincelles, indiquant une ionisation des molécules de l'air.

D) Energie

1) Energie magnétique propre d'un circuit

$$\text{On a } U_m = \frac{1}{2} \iiint \vec{j} \cdot \vec{A} d\tau = \frac{1}{2} \phi I \text{ soit } U_m = \frac{1}{2} LI^2.$$

Remarque :

$$\text{On a } U_m = \frac{1}{2\mu_0} \iiint \vec{B}^2 d\tau > 0 \text{ donc } L > 0$$

Ce résultat est valable aussi en ARQP.

2) Déformation d'un circuit à intensité constante

Travail des forces de Laplace dues à \vec{B}_{propre} :

• Bilan énergétique :

$$\text{On a } dU_m = \delta W_{\text{op}} + \delta W_{\text{gén}} \quad (\delta W_{\text{gén}} : \text{pour maintenir } I)$$

$$- \text{ On a } \delta W_{\text{op}} = -\delta W_L$$

- Et $\delta W_{\text{gén}} = e' Idt$, où e' est opposé à la fem induite, c'est-à-dire

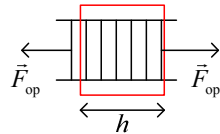
$$e' = -e = \frac{d\phi}{dt}. \text{ Donc } \delta W_{\text{gén}} = Id\phi.$$

- Enfin, $dU_m = \frac{1}{2} Id\phi$

$$\text{Donc } \delta W_L = \frac{1}{2} Id\phi$$

$$\text{Puis } W_L = \frac{1}{2} I\Delta\phi = \frac{1}{2} I^2 \Delta L$$

• Application :



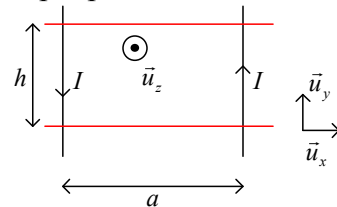
On a à l'intérieur un champ $\vec{B} = \mu_0 n I \vec{u}_z$

Qualitativement, la règle du $I\phi$ maximal indique que le solénoïde a tendance à se contracter (pour que n augmente)

On peut montrer, en faisant un bilan énergétique sur un petit déplacement, que pour empêcher cette contraction il faut exercer une force $\vec{F}_{\text{op}} = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 I^2 S \vec{u}_z$

E) Autoinductance d'un circuit non filiforme

1) Exemple préliminaire



On cherche l'autoinductance par unité de longueur.

• Schématisation linéique :

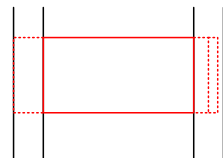
$$\text{On a } \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi \cdot (a-x)} \vec{u}_z + \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \vec{u}_z$$

$$\text{Donc pour une petite bande à l'abscisse } x, d\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot h dx \left(\frac{1}{a-x} + \frac{1}{x} \right)$$

$$\text{Donc } \phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot h \int_0^a \frac{dx}{a-x} + \frac{dx}{x}$$

On a une intégrale divergente...

• Schématisation volumique :



Problème :

On ne peut pas savoir quel contour prendre pour calculer le flux...

2) Cas général

Dans un circuit filiforme, on obtiendra toujours des intégrales divergentes, puisque \vec{B} diverge au voisinage de la répartition.

(Pour le calcul fait avec le solénoïde et le tore, on était en fait passé en schématisation surfacique...)

3) Définition à partir de l'énergie

$$\text{On a } U_m = \frac{1}{2\mu_0} \iiint \vec{B}^2 d\tau$$

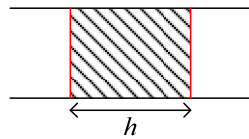
$$\text{On pose alors } U_m = \frac{1}{2} LI^2 :$$

Comme B est proportionnel à I , $\iiint \vec{B}^2 d\tau$ est bien proportionnel à I^2 .

$$\text{Ainsi, par définition, } L = \frac{2U_m}{I^2}.$$

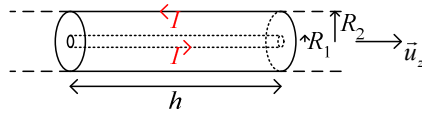
4) Exemple

- Solénoïde infini :



$$\text{On a } U_m = \frac{1}{2\mu_0} (\mu_0 n I)^2 S h = \frac{1}{2} \underbrace{\mu_0 n^2 S h}_L I^2$$

- Câble coaxial :



$$\text{On a } \vec{j}_{s,1} = \frac{I}{2\pi R_1} \vec{u}_z, \quad \vec{j}_{s,2} = \frac{-I}{2\pi R_2} \vec{u}_z$$

Calcul de \vec{B} :

On a déjà par symétrie $\vec{B} = B(r) \vec{u}_\theta$

(1) Pour $r < R_1$, $B = 0$

(2) Pour $R_1 < r < R_2$, $B \times 2\pi r = \mu_0 I$, donc $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$

(3) Pour $r > R_2$, $B = 0$.

$$\text{On a ainsi } U_m = \frac{1}{2\mu_0} \iiint \vec{B}^2 d\tau = \frac{1}{2\mu_0} h \cdot 2\pi \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0^2 I^2}{4\pi^2 r^2} r dr = \frac{\mu_0}{4\pi} I^2 h \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

- Autoinductance linéique :

$$\text{On a pour la portion de coaxial } L = \frac{\mu_0}{2\pi} h \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

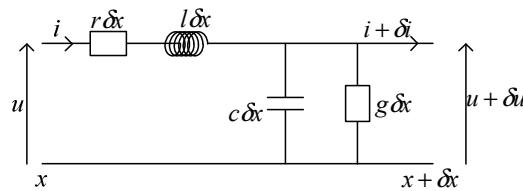
$$\text{Donc } l = L/h = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

- Capacité linéique :

$$\text{Pour un condensateur cylindrique, on avait } C = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} h, \text{ donc}$$

$$c = C/h = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

- Propagation dans un coaxial :



On avait vu pour les ondes que en supposant la ligne parfaite ($r = 0, g = 0$),

$$i \text{ et } u \text{ vérifiaient l'équation différentielle } \frac{\partial^2}{\partial x^2} - lc \frac{\partial^2}{\partial t^2} = 0$$

$$\text{Et on a maintenant } lc = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = \frac{1}{c_0^2}$$

Remarque :

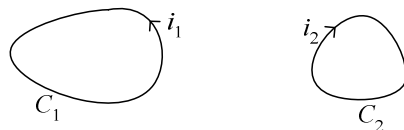
Ceci est valable pour toute ligne bifilaire.

On a appliqué la loi des nœuds, donc on est nécessairement en ARQP magnétique (pour la portion de coaxial)

II Induction mutuelle

A) Inductance mutuelle (ou « mutuelle »)

1) Définition



$$\text{On a } \vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$$

$$\text{Donc } \phi_1 = \phi_{1 \rightarrow 1} + \phi_{2 \rightarrow 1} = L_1 I_1 + M_{1,2} I_2$$

$$\text{Et } \phi_2 = \phi_{2 \rightarrow 2} + \phi_{1 \rightarrow 2} = L_2 I_2 + M_{2,1} I_1$$

$$\text{Ainsi, } \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 & M_{1,2} \\ M_{2,1} & L_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

On définit les coefficients d'induction mutuelle :

$$\begin{cases} M_{1,2} = \frac{\phi_{2 \rightarrow 1}}{I_2} \\ M_{2,1} = \frac{\phi_{1 \rightarrow 2}}{I_1} \end{cases}$$

2) Formule de Neumann

On a :

$$\begin{aligned} \phi_{2 \rightarrow 1} &= \iint_{\Sigma_1} \vec{B}_2 \cdot d\vec{S}_1 = \oint_{C_1} \vec{A}_2 \cdot d\vec{l}_1 = \oint_{C_1} d\vec{l}_1 \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} I_2 \frac{d\vec{l}_2}{r} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{r} I_2 \end{aligned}$$

Et on reconnaît donc $M_{1,2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{r}$

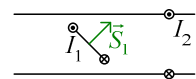
3) Propriétés

- Par symétrie, on a $M_{1,2} = M_{2,1} = M$
- M peut être positif ou négatif, en fonction de l'orientation choisie des circuits.
- M dépend de la forme de chacun des circuits et de la distance entre eux.

4) Théorème de réciprocité

On a ainsi $\frac{\phi_{1 \rightarrow 2}}{I_1} = \frac{\phi_{2 \rightarrow 1}}{I_2}$.

- Exemple 1 :



On veut calculer le flux envoyé par la spire dans le solénoïde.

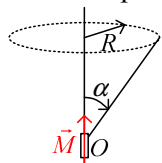
Il faut déjà connaître le champ \vec{B} créé par la spire (pas facile en dehors de l'axe...) Une fois qu'on y est arrivé, il faut ensuite calculer le flux à travers chaque spire du solénoïde...

Mais avec le théorème :

$$\text{On a } \phi_{2 \rightarrow 1} = \mu_0 n_2 I_2 S_1 \cos \theta .$$

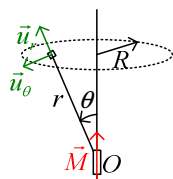
$$\text{Donc } \phi_{1 \rightarrow 2} = \mu_0 n_2 I_1 S_1 \cos \theta .$$

- Exemple 2 :



On cherche le flux envoyé par l'aimant dans le disque.

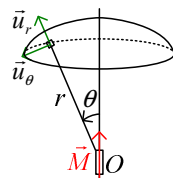
- Méthode 1 :



On a $d\phi = (B_r \cos \theta - B_\theta \sin \theta) dS \dots$

- Méthode 2, plus astucieuse :

On prend plutôt comme surface une calotte sphérique centrée en O et contenant le cercle :



Cette fois, la composante de \vec{B} selon \vec{u}_θ est rasante, et on a donc

$$\begin{aligned} d\phi &= B_r dS = \frac{\mu_0}{4\pi} M \frac{2 \cos \theta}{r^3} dS \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} M \frac{2 \cos \theta}{r^3} r d\theta \cdot 2\pi r \sin \theta \end{aligned}$$

(Pour une petite languette d'angle constant)

$$\text{Et donc } \phi = \frac{\mu_0}{r} M \int_0^\alpha \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{\mu_0 M}{2r} \sin^2 \alpha = \frac{\mu_0 M}{2R} \sin^3 \alpha$$

- Méthode 3 : avec le théorème :

On remplace l'aimant par une boucle de courant :

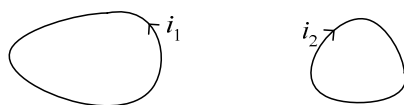
$$\vec{M} = i_1 S_1 \vec{u}_z$$

On imagine de plus que le cercle est une spire parcourue par un courant i_2

$$\text{Ainsi, } \phi_{1 \rightarrow 2} = \frac{i_1}{i_2} \phi_{2 \rightarrow 1} = \frac{i_1}{i_2} \left(\frac{\mu_0 i_2}{2R} \sin^3 \alpha \right) S_1 = \frac{\mu_0 M}{2R} \sin^3 \alpha$$

B) Aspect énergétique

1) Energie d'interaction entre deux circuits



On a

$$U_m = \sum \frac{1}{2} I_k \phi_k = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} M I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + \frac{1}{2} M I_2 I_1$$

$$= \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2$$

Remarque : on a

$$U_m = \frac{1}{2\mu_0} \iiint (\vec{B}_1 + \vec{B}_2)^2 d\tau = \frac{1}{2\mu_0} \iiint \vec{B}_1^2 d\tau + \frac{1}{2\mu_0} \iiint \vec{B}_2^2 d\tau + \frac{1}{\mu_0} \iiint \vec{B}_1 \cdot \vec{B}_2 d\tau$$

Donc on retrouve les termes d'énergie propre de chaque circuit, et l'énergie d'interaction $M I_1 I_2$.

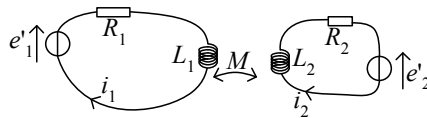
2) Conséquence sur M .

On a $U_m > 0$

Donc on a une forme quadratique définie-positive.

Donc $L_1 > 0$, $L_2 > 0$ et $M^2 \leq L_1 L_2$

C) Force électromotrice d'induction



1) Loi d'Ohm

On a $R_1 i_1 = e'_1 + e_1$ avec $e_1 = -\frac{d\phi_1}{dt} = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$

Donc $e'_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$

Et de même $e'_2 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$

2) Bilan énergétique

On a en multipliant par $i_1 dt$:

$$e'_1 i_1 dt = R_1 i_1^2 dt + L_1 i_1 di_1 + M i_1 di_2$$

On reconnaît $\delta W_{\text{gén}} = e'_1 i_1 dt$,

$\delta W_{\text{joule}} = R_1 i_1^2 dt$, qui n'est pas une différentielle totale, (pas d'énergie stockée)

Et $L_1 i_1 di_1 = d\left(\frac{1}{2} L_1 i_1^2\right)$, énergie potentielle.

Ce terme représente une énergie stockée (et disponible).

Mais le troisième terme n'est pas une différentielle totale et représente pourtant une énergie potentielle (stockée dans les deux bobines).

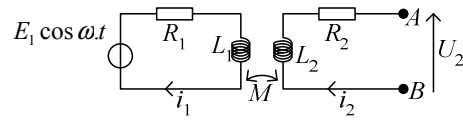
On fait le bilan énergétique dans le deuxième circuit :

$$e'_2 i_2 dt = R_2 i_2^2 dt + L_2 i_2 di_2 + M i_2 di_1$$

Et en considérant le bilan total des deux circuits, on trouve une différentielle totale $d(Mi_1 i_2)$.

3) Transformateur

- Principe :



Loi des mailles :

$$R_1 i_1 = E_1 \cos \omega t - L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$$

En circuit ouvert, $i_2 = 0$

$$\text{Donc } R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} = E_1 \cos \omega t$$

Dans l'autre maille :

$$0 = U_{AB} - L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}$$

$$\text{Et donc } U_2 = M \frac{di_1}{dt}$$

En complexe,

$$(R_1 + jL_1 \omega) \underline{I}_1 = E_1$$

$$\text{et } \underline{U}_2 = jM \omega \underline{I}_1$$

$$\text{Donc } \underline{U}_2 = \frac{jM \omega}{R_1 + jL_1 \omega} \cdot E_1$$

On suppose que $R_1 \ll jL_1 \omega$

$$\text{Ainsi, } \underline{U}_2 = \frac{M}{L_1} \cdot E_1$$

On a donc fait apparaître aux bornes du circuit une tension sinusoïdale proportionnelle à E_1 et dont le rapport peut être choisi.

Remarque :

Le premier circuit consomme quand même de l'énergie si le circuit reste ouvert.

Les résultats sont modifiés si le deuxième circuit n'est plus ouvert.

- Aspect technologique :



On suppose que $n_1 = 2n_2$, $N_1 = 2N_2$ (et donc que les deux bobines ont la même longueur)

Ainsi, $\phi_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{2} \phi_{1 \rightarrow 1}$, donc $M = \frac{1}{2} L_1$

Et $\phi_{2 \rightarrow 1} = 2 \phi_{2 \rightarrow 2}$, donc $M = 2 L_2$

Ainsi, selon les branchements, la tension sera multipliée par deux ou divisée par deux.

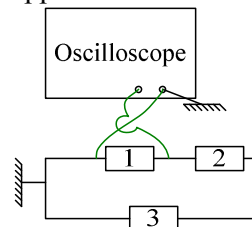
On peut mettre un noyau de fer doux pour limiter l'influence de la charge d'un côté sur l'autre.

Perte de puissance :

Par effet joule (« perte cuivre »)

Par hystérésis : les particules aimantées du fer doux gardent parfois une orientation privilégiée, et donc l'énergie utilisée pour les mettre dans cette position est perdue (« perte fer »)

Application du transformateur :



Pour calculer la tension aux bornes de 1 ou 3, on n'a pas trop de difficulté.

Mais si on branche directement 2 aux bornes de l'oscilloscope, on aura en quelque sorte un court-circuit.

Pour l'éviter, on intercale un transformateur (de rapport 1) entre le dipôle et l'oscilloscope.