Chapitre 12 : L'énergie électromagnétique

I L'énergie du champ électromagnétique

A) Postulat

Un volume $d\tau$ dans lequel règne un champ électromagnétique $(\vec{E},\vec{B})$ possède une énergie $dU_{em} = u_{em} d\tau$ où $\boxed{u_{em} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2}$

Pour un volume fini, on aura ainsi une énergie $U_{em} = \iiint u_{em} d\tau$.

Remarque :
Ce postulat généralise celui d'électrostatique.

De même qu'en général, on ne peut pas séparer $\vec{E}$ et $\vec{B}$, les deux termes n'ont pas ici de sens individuellement.

B) Rayonnement

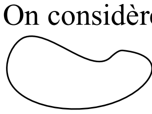
C'est la densité d'énergie électromagnétique u_{em} qui se propage avec $\vec{E}$ et $\vec{B}$.

II Bilan d'énergie électromagnétique

A) Equation de bilan

1) Bilan global

On considère une surface Σ dans un référentiel R :



Σ

On a $\frac{dU_{em}}{dt} = -\oiint_{\Sigma} \vec{j}_{u_{em}} \cdot d\vec{S} + \iiint \sigma_{u_{em}} d\tau$

On note $\vec{j}_{u_{em}} = \vec{\pi}$: vecteur de Poynting

Et $p = -\sigma_{u_{em}}$: énergie magnétique qui disparaît par unité de temps.

Ainsi, $\frac{dU_{em}}{dt} = -\oiint_{\Sigma} \vec{\pi} \cdot d\vec{S} - \iiint p d\tau$

2) Bilan local

$$\boxed{\frac{\partial u_{em}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\pi} = -p}$$

B) Terme de création

1) Origine

- Le champ électromagnétique agit sur les charges, donc il y a un transfert d'énergie et donc une disparition d'énergie électromagnétique.
- Une charge q accélérée rayonne de l'énergie électromagnétique, donc crée un champ et donc de l'énergie.

2) Puissance volumique reçue par les porteurs

- Définition :

p est la puissance volumique perdue par le champ, donc reçue par les porteurs : $\delta^2 U_{em} = -p dt d\tau$.

- Expression :

- Puissance P_i reçue par q_i :

On a une force de Lorentz $\vec{F}_i = q_i(\vec{E} + \vec{v}_i \wedge \vec{B})$

Donc $P_i = \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = q_i \vec{v}_i \cdot \vec{E}$

- Puissance volumique :

On a $dP = \sum_{i \in d\tau} P_i = \left(\sum_{i \in d\tau} q_i \vec{v}_i \right) \cdot \vec{E} = \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau$

Donc $\boxed{\dfrac{dP}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E}}$.

3) Cas des conducteurs ohmiques

- En régime permanent :

On a $\vec{j} = \sigma \vec{E}$.

Donc $p = \sigma \vec{E}^2 = \dfrac{\vec{j}^2}{\sigma}$

Donc $p > 0$, c'est-à-dire que le champ électromagnétique fournit de l'énergie au porteur.

Globalement, on a ainsi $P = \dfrac{U^2}{R} = RI^2$.

- En régime sinusoïdal,

$< P >= \dfrac{1}{2} \mathrm{Re}\left(\underline{\vec{j}} \cdot \underline{\vec{E}}^*\right) = \dfrac{1}{2} \underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{E}}^* \mathrm{Re}(\sigma) = \dfrac{1}{2} E^2 \mathrm{Re}(\sigma)$, avec $\sigma = \dfrac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau}$.

- Si $\omega\tau << 1$, c'est-à-dire $\tau << T$.

On a $\sigma \approx \sigma_0$, et $< P >= \dfrac{\sigma_0}{2} E^2 = \dfrac{j^2}{2\sigma_0}$ $(E_{\text{eff}} = \dfrac{E}{\sqrt{2}})$

(Physiquement, le porteur de charge fait tellement de chocs qu'il ne « voit » pas le régime sinusoïdal)

- Si $\omega\tau \gg 1$, $\sigma = \dfrac{i\sigma_0}{\omega\tau}$, et $< P > = 0$.

(Ici, le porteur fait plusieurs allers-retours avant de faire un choc)

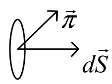
C) Terme de flux

1) Origine

Le terme de flux vient de la propagation du champ électromagnétique.

2) Vecteur de Poynting

- Définition :



On a $\vec{\pi} = \vec{j}_{u_{em}}$, et $\delta^2 U_{em} = \vec{\pi} \cdot d\vec{S}dt$

- Expression :

On a $\dfrac{\partial u_{em}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\pi} = -p$

Et $u_{em} = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \dfrac{1}{2\mu_0} B^2$, $p = \vec{j} \cdot \vec{E}$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \vec{\pi} &= -\vec{j} \cdot \vec{E} - \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
&= -\vec{j} \cdot \vec{E} - \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \cdot \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{B} - \mu_0 \vec{j}\right) + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{E} \\
&= -\frac{1}{\mu_0} \vec{E} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{B} + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{E} \\
&= \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \wedge \vec{B})
\end{aligned}$$

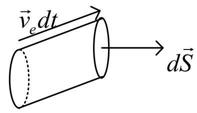
Ainsi, $\vec{\pi} = \dfrac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} + \vec{\nabla} \wedge \vec{X}$.

On prend $\boxed{\vec{\pi} = \dfrac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B}}$

- Discussion :

- En réalité, considérer le flux d'énergie à travers une petite surface n'a pas de sens physiquement, il n'en a que pour une surface fermée. On peut donc choisir en réalité $\vec{X}$ comme on veut.
- En fait, quand on utilise cette sorte de « jauge », on trouve des résultats satisfaisant physiquement.

3) Vitesse de propagation de l'énergie électromagnétique



La surface est traversée par l'énergie qui était contenue dans le cylindre.
On a

$$\delta^2 U_{em} = \vec{\pi} \cdot d\vec{S} dt$$
$$= u_{em} d\vec{S} \cdot \vec{v}_e dt$$

Donc $\vec{\pi} = u_{em}\vec{v}_e$, ou $\boxed{\vec{v}_e = \dfrac{\vec{\pi}}{u_{em}}}$.

III L'énergie du champ magnétostatique

A) Densité d'énergie magnétostatique

On a $u_{em} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$.

En magnétostatique, les équations de $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont découplées, et on peut alors considérer qu'il y a une part d'énergie électrostatique $u_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ et une part magnétique $\boxed{u_{ms} = \dfrac{1}{2\mu_0} B^2}$.

B) Energie magnétostatique d'une répartition finie de courant

On considère une répartition finie de courant $\vec{j}$.
On cherche l'énergie magnétostatique contenue dans tout l'espace.

On a $U_{ms} = \iiint u_{ms} d\tau = \dfrac{1}{2\mu_0} \iiint \vec{B}^2 d\tau$

Et $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$

Donc $U_{ms} = \dfrac{1}{2\mu_0} \iiint \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{A} d\tau$

Mais $\vec{B} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) + \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{B}$

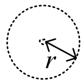
Donc $U_{ms} = \dfrac{1}{2\mu_0} \iiint \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) d\tau + \dfrac{1}{2\mu_0} \iiint \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{B} d\tau$

Calcul des termes :

On a $\dfrac{1}{2\mu_0} \iiint \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) d\tau = \dfrac{1}{2\mu_0} \oiint \vec{A} \wedge \vec{B} \cdot d\vec{S}$

On calcule sur une sphère de rayon r, qu'on fait ensuite tendre vers $+\infty$.

Pour r assez grand :



Il n'y a pas de terme monopolaire, donc $\vec{A} \propto \dfrac{1}{r^2}$ au moins.

De plus, $\vec{B} \propto \dfrac{1}{r^2}$, et $S \propto r^2$.

Donc le flux total à travers la surface est en $\dfrac{1}{r^2}$ et tend vers 0.

On a pour l'autre terme $\dfrac{1}{2\mu_0}\iiint \vec{A} \cdot \underbrace{\vec{\nabla} \wedge \vec{B}}_{\mu_0 \vec{j}} d\tau = \dfrac{1}{2}\iiint \vec{j} \cdot \vec{A} d\tau$

Donc $\boxed{U_{ms} = \dfrac{1}{2}\iiint \vec{j} \cdot \vec{A} d\tau}$.

Remarque :

- Pour connaître l'énergie dans *tout* l'espace, on n'a besoin de sommer que sur la répartition.
- Cette formule est valable aussi en ARQP magnétique.
- De façon analogue, on aura $U_{es} = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 \iiint E^2 d\tau = \dfrac{1}{2}\iiint \rho V d\tau$

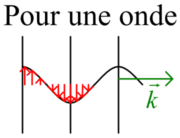
IV Compléments

A) Quantité de mouvement du champ

1) Dualité onde–corpuscule

- Onde électromagnétique :

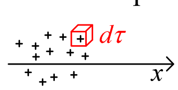
Pour une onde plane, on a une évolution en $e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega . t)}$.



Dans le vide, $\Box \vec{E} = \vec{0}, \Box \vec{B} = \vec{0}$

On a donc une relation $k^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}$.

- Flux de photons :



- On note n le nombre de photons par unité de volume. On a $dN = n d\tau$
- Energie d'un photon $= \hbar\omega = h\nu$
- Vitesse $\vec{v} = c\vec{u}_x$
- Quantité de mouvement $\vec{p} = \dfrac{h\nu}{c}\vec{u}_x$.

2) Energie

- Ondulatoire :

$$u_{em} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2$$

- Corpusculaire :

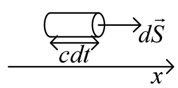
$$u_{em} = nh\nu = n\hbar\omega$$

3) Vecteur de Poynting

- Ondulatoire :

On a $\vec{\pi} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \wedge \vec{B}$

- Corpusculaire :



On a $\delta^2 U_{em} = cdS.dt \times nh\nu$

Donc $\vec{\pi} = u_{em} c\vec{u}_x = nh\nu c.\vec{u}_x$

Donc l'énergie se propage à la vitesse $\vec{v}_e = c\vec{u}_x$.

4) Densité de quantité de mouvement

- Corpusculaire :

Un volume $d\tau$ de photons a une quantité de mouvement $d\vec{p}$:

$$d\vec{p} = \frac{h\nu}{c}\vec{u}_x \times n d\tau$$

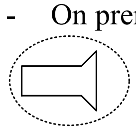
Donc $\frac{d\vec{p}}{d\tau} = \frac{h\nu n}{c}\vec{u}_x = \frac{\vec{\pi}}{c^2}$.

- Ondulatoire :

Pour que les deux aspects de l'onde coïncident, on admet que le champ électromagnétique a aussi une densité de quantité de mouvement $\frac{d\vec{p}}{d\tau} = \frac{\vec{\pi}}{c^2} = \frac{1}{\mu_0 c^2}\vec{E} \wedge \vec{B}$, soit $\boxed{\frac{d\vec{p}}{d\tau} = \varepsilon_0 \vec{E} \wedge \vec{B}}$.

- Exemple :

- On prend une lampe de poche, dans le vide, soumise à aucune force :



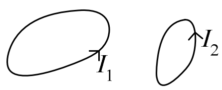
Si on ne considère pas la quantité de mouvement du champ électromagnétique, le système est isolé. Pourtant, lorsque la lampe est allumée, on observe un déplacement dans le sens opposé à l'ampoule, ce qui indique une variation de la quantité de mouvement du système.

- On a réussi à faire léviter des petits objets dans un laser suffisamment intense.

5) Densité de moment cinétique

On a $d\vec{\sigma}(O) = \overrightarrow{OP} \wedge d\vec{p}$, et donc $\dfrac{d\vec{\sigma}(O)}{d\tau} = \overrightarrow{OP} \wedge (\varepsilon_0 \vec{E} \wedge \vec{B})$.

B) Energie magnétique d'un ensemble de conducteurs filiformes



On va montrer que $\boxed{U_{ms} = \frac{1}{2}\sum I_k \phi_k}$ où ϕ_k est le flux de $\vec{B}$ à travers le circuit k.

1) Démonstration

On a $U_{ms} = \frac{1}{2}\iiint \vec{j} \cdot \vec{A} d\tau = \frac{1}{2}\sum_k \iiint_k \vec{j} \cdot \vec{A} d\tau$

Et donc en schématisation filiforme :

$U_{ms} = \frac{1}{2}\sum_k \oint_k I_k d\vec{l} \cdot \vec{A} = \frac{1}{2}\sum_k I_k \iint_k \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{2}\sum_k I_k \phi_k$

2) Discussion

- On a l'énergie *totale* dans tout l'espace,

C'est-à-dire l'énergie d'interaction entre les circuits et l'énergie propre.

- Energie propre d'un conducteur :

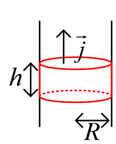
Comme on a une schématisation filiforme, le champ est divergent au voisinage de la répartition et donc $\phi_{k \to k}$ est infini, donc l'énergie propre aussi.

- Cas particulier :

Si les C_k sont indéformables et que l'intensité reste constante, l'énergie propre de chaque circuit est constante (mais infinie)

Et pour un déplacement, $\Delta U_m = \Delta U_{\text{interaction}} = \sum \frac{1}{2} I_k \Delta\phi_k$, qui pour le coup est finie.

C) Bilan énergétique d'un conducteur ohmique



On suppose que $\vec{j}$ est uniforme, et que le conducteur a une conductivité σ.
Puissance électromagnétique entrante :

$$P = -\oiint \vec{\pi} \cdot d\vec{S} = \frac{-1}{\mu_0} \oiint \vec{E} \wedge \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

- Symétries, invariance :

- On a $\vec{E} = E(r)\vec{u}_z$
- $\vec{B} = B(r)\vec{u}_\theta$

Donc le vecteur de Poynting est dirigé selon $\vec{u}_r$, c'est-à-dire que l'énergie électromagnétique dissipée par effet Joule sort par les parois latérales.

- Champs :

$\vec{B}(R^+) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\vec{u}_\theta$ (théorème d'Ampère)

$\vec{E}(R^+) = \vec{E}(R^-) = \frac{\vec{j}}{\sigma}$ (continuité de la composante tangentielle)

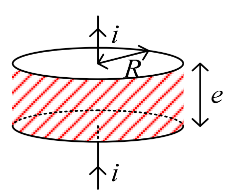
Donc $\vec{\pi} = \frac{1}{\mu_0}\frac{j}{\sigma}\frac{\mu_0 I}{2\pi R}.(-\vec{u}_r)$

Donc $P = \frac{I.j}{2\pi.R\sigma} \times 2\pi.Rh$

Et, avec $I = j.S$:

$P = I^2 \frac{h}{\sigma.S} = I^2 \rho$.

D) Bilan énergétique de la charge d'un condensateur



1) Champ électromagnétique

On a en ARQP $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_z$

Et $\vec{B} = \frac{r}{2}\mu_0 \frac{d\sigma}{dt}\vec{u}_\theta$

2) Vecteur de Poynting

$$\vec{\pi} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \wedge \vec{B} = \frac{-r}{2\varepsilon_0}\sigma\frac{d\sigma}{dt}\vec{u}_r$$

Ainsi, l'énergie du condensateur arrive non pas par le bas, mais par les parois latérales du condensateur.