

Chapitre 8 : Le champ magnétostatique

Introduction :

En général, on a $\rho(\vec{r}, t), I(\vec{r}, t), \vec{E}(\vec{r}, t), \vec{B}(\vec{r}, t)$

Et on a donc des relations compliquées, puisque chacune de ces grandeurs interagit avec toutes les autres.

Pour l'électrostatique,

On avait $\rho(\vec{r}), \vec{E}(\vec{r}), \vec{j} = \vec{0}, \vec{B} = \vec{0}$

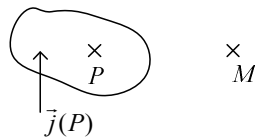
En magnétostatique, on a $\rho(\vec{r}), \vec{E}(\vec{r}), \vec{j}(\vec{r}), \vec{B}(\vec{r})$, mais on a des équations découplées entre $\rho(\vec{r}), \vec{E}(\vec{r})$ et $\vec{j}(\vec{r}), \vec{B}(\vec{r})$.

Comme de plus $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, on aura $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$.

I Loi de Biot et Savart (Postulat)

A) Expression

1) Répartition volumique de courant



On note $\vec{r} = \overrightarrow{PM}$.

La répartition de courant modifie l'espace et crée en un point M un champ

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \vec{j} d\tau \wedge \frac{\vec{r}}{r^3}$$

Où $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ SI (par définition du système international)

Remarque : on verra plus tard que $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$.

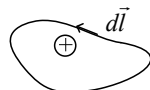
μ_0 s'appelle la perméabilité du vide.

2) Répartition surfacique et linéique

On aura alors :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint \vec{j}_s d\vec{S} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} \quad \text{ou} \quad \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint Id\vec{l} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3}$$

Remarque : physiquement, les circuits filiformes sont fermés, et on peut donc les orienter :



Ainsi, I et $d\vec{l}$ indépendamment dépendent de l'orientation, mais pas $Id\vec{l}$.

B) Discussion

- Historiquement, la loi correspondait à celle pour un circuit filiforme (plus simple à créer et à calculer)
- De façon plus générale, la loi de Biot et Savart est une conséquence d'autres postulats en électromagnétisme (plus tard...)
- Pour un petit morceau de circuit, peut-on écrire que $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} Id\vec{l} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3}$?

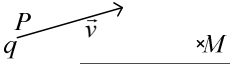
En général non, mais on verra qu'on peut l'écrire parfois de façon approchée sous certaines conditions. D'ailleurs, un « élément » de courant n'existe pas seul dans la nature (il fait toujours partie d'un « tout »), donc on n'a aucun moyen de le vérifier.

- \vec{B} est ici un pseudo-vecteur.
- Comme pour l'électrostatique, l'intégrale diverge pour une distribution surfacique.

Mais la présence du produit vectoriel change totalement la topographie du champ (symétries...)

C) Champ créé par une charge en mouvement

1) Hypothèse



A-t-on $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} q\vec{v} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3}$?

2) Interprétation de Biot et Savart

Si on suppose une telle relation, on aura pour un petit tube de courant :



On aura pour chaque particule : $\vec{b}_i = \frac{\mu_0}{4\pi} q_i \vec{v}_i \wedge \frac{\vec{r}_i}{r_i^3}$

Et donc $d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum q_i \vec{v}_i \wedge \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \underbrace{\sum q_i \vec{v}_i}_{=Id\vec{l}} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3}$

3) Discussion

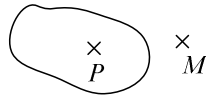
- La formule ne peut pas être vraie, car elle impliquerait qu'un changement de vitesse de la charge q aurait une conséquence immédiate sur le point M , ce qui est impossible

La formule est quand même valable quand les vitesses en jeu sont très inférieures à celle de la lumière.

- La loi de Biot et Savart est une loi de magnétostatique, donc en sommant sur tout le circuit, tous les termes correctifs s'annulent (le courant ne varie plus)

II Premier groupe de propriétés du champ magnétique

A) Divergence



On a

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}_M \cdot \vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \vec{\nabla}_M \cdot \left(\vec{j}(P) \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} \right) d\tau \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \vec{\nabla}_M \cdot \left(\vec{j}(P) \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} \right) d\tau \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \underbrace{\vec{\nabla}_M \wedge \vec{j}(P)}_{=0} - \vec{j}(P) \cdot \vec{\nabla}_M \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} \right) d\tau \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \vec{j}(P) \cdot \vec{\nabla}_M \wedge \frac{-\vec{r}}{r^3} d\tau = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \vec{j}(P) \cdot \underbrace{\vec{\nabla}_M \wedge \vec{\nabla}_M \frac{1}{r}}_{=0} d\tau = 0\end{aligned}$$

C'est-à-dire $\vec{\nabla}_M \cdot \vec{B} = 0$

Cette formule est valable aussi hors magnétostatique.

B) Flux

On a, d'après le théorème de Green et Ostrogradski :

$$\oiint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \text{ pour toute surface fermée.}$$

Ainsi, les lignes de champ \vec{B} ne peuvent pas diverger à partir d'un point ; elle n'ont « ni début ni fin ».

C) Potentiel vecteur

1) Existence

On a vu (admis) que :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Leftrightarrow \exists \vec{A}, \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

Ainsi, il existe \vec{A} tel que $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$.

\vec{A} est appelé potentiel vecteur.

2) Condition de jauge

Si on prend $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \phi$ où ϕ est quelconque, alors \vec{A}' convient aussi.

La transformation $\vec{A} \mapsto \vec{A}'$ s'appelle une transformation de jauge.

Si on impose une condition sur \vec{A} , on dit qu'on a une condition de jauge.

Condition de jauge de Coulomb : c'est lorsque on impose $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$

Cette condition semble restrictive, mais on verra qu'en fait ce n'est pas toujours suffisant pour déterminer \vec{A} de façon unique.

3) Expression de \vec{A} .

$$\text{On a } \vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \vec{j}(P) \wedge \underbrace{\frac{\vec{r}}{r^3}}_{=-\vec{\nabla}_M \frac{1}{r}} d\tau = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \vec{\nabla}_M \frac{1}{r} \wedge \vec{j}(P) d\tau$$

$$\text{Or, } \vec{\nabla}_M \frac{1}{r} \wedge \vec{j}(P) = \vec{\nabla}_M \wedge \frac{\vec{j}(P)}{r} - \underbrace{\frac{1}{r} \vec{\nabla}_M \wedge \vec{j}(P)}_{=0}$$

(Car de façon générale, $\vec{\nabla} \wedge (f\vec{v}) = f \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{v} + \vec{\nabla} f \wedge \vec{v}$)

$$\text{Et donc } \vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla}_M \wedge \iiint \frac{\vec{j}(P)}{r} d\tau$$

$$\text{On peut donc poser } \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}(P)}{r} d\tau$$

4) Propriétés de \vec{A} .

- \vec{A} est un vecteur vrai
 - \vec{A} vérifie la condition de jauge de Coulomb :
- On a en effet :

$$\vec{\nabla}_M \cdot \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \vec{\nabla}_M \cdot \frac{\vec{j}(P)}{r} d\tau$$

Or,

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}_M \cdot \frac{\vec{j}(P)}{r} &= \underbrace{\vec{\nabla}_M \cdot \vec{j}(P)}_{=0} + \left(\vec{\nabla}_M \frac{1}{r} \right) \cdot \vec{j}(P) = \left(-\vec{\nabla}_P \frac{1}{r} \right) \cdot \vec{j}(P) \\ &= \frac{1}{r} \underbrace{\vec{\nabla}_P \cdot \vec{j}(P)}_{=0 \text{ en régime permanent}} - \vec{\nabla}_P \cdot \frac{\vec{j}(P)}{r} = -\vec{\nabla}_P \cdot \frac{\vec{j}(P)}{r} \end{aligned}$$

(Attention : contrairement au gradient, on n'a pas toujours $\vec{\nabla}_M \cdot \vec{f} = -\vec{\nabla}_P \cdot \vec{f}$)

Et donc l'égalité devient :

$$\vec{\nabla}_M \cdot \vec{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \vec{\nabla}_P \cdot \frac{\vec{j}(P)}{r} d\tau = -\frac{\mu_0}{4\pi} \oiint \frac{\vec{j}(P)}{r} \cdot d\vec{S}$$

Or, $\vec{j}(P)$ n'a pas de composante normale à la surface.

En effet, si \vec{j} avait une composante dirigée vers l'intérieur, alors cela signifierait qu'à $t - dt$, des charges à l'extérieur sont rentrées.

Et si \vec{j} avait une composante dirigée vers l'extérieur, cela signifierait qu'à $t + dt$ des charges sortiraient.

Ou, plus précisément, il suffit d'étendre la répartition de courant à un volume un peu plus grand, en définissant $\vec{j} = \vec{0}$ en dehors du premier volume.

On aura alors sur la surface $\vec{j} = \vec{0}$, et donc $\vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$

$$\text{D'où } \vec{\nabla}_M \cdot \vec{A} = 0$$

Cette égalité est vraie aussi pour d'autres répartitions à condition que \vec{A} soit défini.

Mais elle n'est plus valable hors magnétostatique (on a utilisé le fait qu'on est en régime permanent)

- Equation de Poisson :
- Répartition volumique :

$$\text{On a } A_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{j_x(P)}{r} d\tau$$

Donc

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}_M^2 A_x &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \vec{\nabla}_M^2 \frac{j_x(P)}{r} d\tau \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint j_x(P) \underbrace{\vec{\nabla}_M^2 \frac{1}{r}}_{-4\pi\delta(\vec{r})} d\tau \\ &= -\mu_0 j_x(M) \end{aligned}$$

$$\text{Soit } \vec{\nabla}_M^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}(M)$$

Où $\vec{\nabla}^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$, formule valable dans tout système de coordonnées, mais uniquement quand \vec{A} vérifie la jauge de Coulomb.

(En fait, ce n'est pas Coulomb qui a donné cette condition – il était déjà mort depuis longtemps – mais c'est parce que la relation trouvée ressemble beaucoup à celle correspondante en électrostatique)

- Répartitions volumiques et surfaciques :

On a $\vec{\nabla}^2 \vec{A} = \vec{0}$ sauf sur la répartition où c'est infini.

5) Potentiel vecteur associé à un champ uniforme

- Expression :
- Intrinsèque :

Pour un champ \vec{B} uniforme, $\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \wedge \vec{r}$ est un potentiel vecteur.

(Où $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ et O est un point arbitraire).

En effet : on suppose par exemple que B est dirigé selon z .

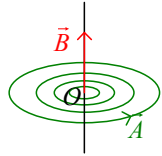
$$\text{On a } \vec{A} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -By \\ Bx \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -By \\ Bx \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}B \end{pmatrix} = \vec{B}$$

- En cylindriques $M(r, \theta, z)$:

$$\text{On a } \vec{A} = \frac{1}{2} B \vec{u}_z \wedge (r \vec{u}_r + z \vec{u}_z) = \frac{1}{2} B r \vec{u}_\theta$$

(Divergeant à l'infini, à cause de \vec{B} qui est supposé uniforme).



Remarque : O a été choisi arbitrairement, donc on avait encore des degrés de libertés même avec la condition de jauge de Coulomb, que vérifie \vec{A} , puisqu'on a en effet :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} = 0 \quad (A_y = Bx, A_x = -By)$$

III Deuxième groupe de propriétés

A) Rotationnel de \vec{B}

1) Répartition volumique

$$\text{On a } \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})$$

Rappel :

$$\text{On a } \vec{\nabla}^2 \vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})$$

$$\text{Donc } \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \underbrace{\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})}_{=0 \text{ (condition de jauge de Coulomb)}} - \vec{\nabla}^2 \vec{A}$$

$$\text{Soit } \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

Remarque :

La démonstration utilise la jauge de Coulomb, mais le résultat n'en dépend visiblement pas.

Cette relation n'est pas valable hors magnétostatique.

2) Répartitions surfaciques, linéiques

On a $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \vec{0}$ partout sauf sur la répartition, où \vec{B} diverge.

B) Théorème d'Ampère

1) Enoncé, démonstration

On considère un contour Γ , et une surface Σ qui s'appuie sur Γ et qui est orientée compatiblement.

$$\text{Alors, d'après le théorème de Stokes, } \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_{\Sigma} \vec{\nabla} \wedge \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

2) Intensité embrassée

- Définition :

$$\text{On pose } I_e = \iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

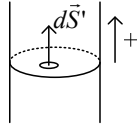
Ainsi, l'égalité précédente devient $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_e$.

I_e est donc analogue à la charge intérieure pour le théorème de Gauss.

I_e est algébrique, et dépend du contour Γ et de son orientation.

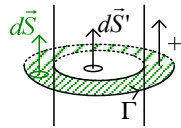
- Exemples :

Fil électrique :



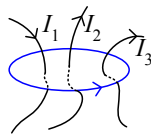
Le sens + détermine celui de $d\vec{l}$, I , $d\vec{S}'$, puisqu'on a $I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S}'$

Si on veut maintenant calculer l'intensité embrassée :

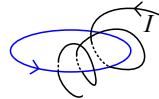


On a alors $d\vec{S} = d\vec{S}'$, et donc $I_e = I$

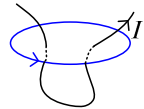
Avec l'autre orientation, on a $d\vec{S} = -d\vec{S}'$, et donc $I_e = -I$



On a ici $I_e = -I_1 + I_2 + I_3$



On a $I_e = -3I$



On a $I_e = 0$

IV Relation de passage de \vec{A} et \vec{B} .

A) Potentiel vecteur \vec{A} .

$$\text{On a } A_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{j_x(P)}{r} d\tau$$

Par analogie avec $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(P)}{r} d\tau$, on remarque que c'est la même étude

mathématique.

1) Répartition volumique

Si $|\vec{j}| < j_0$, \vec{A} est défini et continu sur la répartition.

2) Répartition surfacique

$|\vec{j}_s| < j_{0s}$, \vec{A} est défini et continu sur la répartition

3) Répartition linéique

Le potentiel vecteur diverge sur la répartition.

B) Champ \vec{B} .

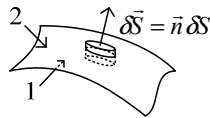
1) Répartition volumique

$$\text{On a } \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \vec{j} d\tau \wedge \frac{\vec{r}}{r^3}$$

Si $|\vec{j}| < j_0$, la même démonstration que pour \vec{E} montre que \vec{B} est aussi défini et continu sur la répartition.

2) Répartition surfacique

- Le champ n'est pas défini en général sur la répartition.
- Continuité de la composante normale :



On a $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, donc $\delta\phi = 0$

C'est-à-dire $\delta\phi_1 + \delta\phi_2 + \delta\phi_l = -\vec{B}_1 \cdot \delta\vec{S} + \vec{B}_2 \cdot \delta\vec{S} + \delta\phi_l$

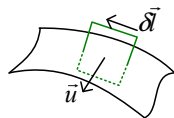
On admet que lorsque les faces de la « boîte » sont très proches de la nappe, $\delta\phi_l \rightarrow 0$ (On peut le montrer autrement mais plus difficile)

Ainsi, $-\vec{B}_1 \cdot \delta\vec{S} + \vec{B}_2 \cdot \delta\vec{S} = 0$

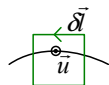
C'est-à-dire $(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \cdot \vec{n} = 0$, ou $\vec{B}_{N_1} - \vec{B}_{N_2} = \vec{0}$

- Discontinuité de la composante tangentielle :

On prend un petit circuit :



Ou, en coupe :



On introduit \vec{u} unitaire sur la surface, orthogonal à $\delta\vec{l}$

On a alors $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \mathcal{I}_e$

Soit $-\vec{B}_1 \cdot \delta\vec{l} + \vec{B}_2 \cdot \delta\vec{l} = \mu_0 \vec{j}_s \cdot \vec{u} \delta l$

(On néglige les effets latéraux quand la distance tend vers 0)

On a de plus $\vec{u} \, d\vec{l} = \vec{n} \wedge \vec{d}\vec{l}$

Donc l'égalité devient $(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{d}\vec{l} = \mu_0 \vec{j}_s \cdot \vec{n} \wedge \vec{d}\vec{l} = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n} \cdot \vec{d}\vec{l}$

Et ce pour tout $\vec{d}\vec{l}$ sur la surface.

Donc $\vec{B}_{T_2} - \vec{B}_{T_1} = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}$

Et donc $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}$

V Récapitulatif

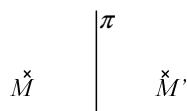
Electrostatique	Magnétostatique
Champs	
$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \rho d\tau \frac{\vec{r}}{r^3}$	$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \vec{j} d\tau \wedge \frac{\vec{r}}{r^3}$
Equations locales	
$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{0}$	$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$
Equations globales	
Circulation conservative	Théorème d'Ampère
Théorème de Gauss	Flux conservatif
Potentiel	
V scalaire	\vec{A} vecteur
A une constante près	A un gradient près
$\vec{E} = -\vec{\nabla}V$	$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$
$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho}{r} d\tau$	$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}}{r} d\tau$
$\vec{\nabla}^2 V = \frac{-\rho}{\epsilon_0}$	$\vec{\nabla}^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$
Relation de passage	
$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$	$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}$

VI Symétries

A) Plans de symétrie et d'antisymétrie

1) Symétrie

- Pour un champ de scalaire $f(\vec{r}, t)$



π est un plan de symétrie si $f(M, t) = f(M', t), \forall t$

- Champ de vecteur $\vec{H}(\vec{r}, t)$

π est un plan de symétrie si $\vec{H}(M, t)$ est symétrique de $\vec{H}(M', t)$ par rapport à π , et ce $\forall t$.

Remarque :

Pour $M \in \pi$, on a alors $\vec{H}(M, t) \subset \pi$

2) Antisymétrie

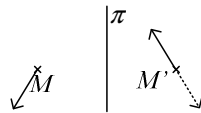
- Champ scalaire :

On a $f(M, t) = -f(M', t), \forall t$

Ainsi, lorsque $M \in \pi$, $f(M) = 0$.

- Champ de vecteurs :

$\vec{H}(M, t)$ est symétrique de $-\vec{H}(M', t)$ par rapport à π :



Si $M \in \pi$, alors $\vec{H}(M, t)$ est orthogonal à π

3) Opérations sur les champs vectoriels

- Produit scalaire :

Soient \vec{H}, \vec{J} deux champs vectoriels, on note $f = \vec{H} \cdot \vec{J}$

On note dans la suite + un plan de symétrie, - un plan d'antisymétrie.

Si \vec{H} et \vec{J} admettent un plan d'(anti)symétrie, on a les relations suivantes pour le champ f :

$\vec{H} \backslash \vec{J}$	+	-
+	+	-
-	-	+

- Produit vectoriel :

On aura ici pour le champ $\vec{H} \wedge \vec{J}$:

$\vec{H} \backslash \vec{J}$	+	-
+	-	+
-	+	-

4) Opérateurs

- Gradient :

f	+	-
$\vec{\nabla}f$	+	-

- Divergence :

\vec{H}	+	-
$\vec{\nabla} \cdot \vec{H}$	+	-

- Rotationnel :

\vec{H}	+	-
$\vec{\nabla} \wedge \vec{H}$	-	+

B) Application au champ électrostatique/magnétostatique

1) Electrostatique

$$\text{On a } V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho d\tau}{r}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}V.$$

On a donc le tableau :

ρ	+	-
V	+	-
\vec{E}	+	-

2) Magnétostatique

$$\text{On a } \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j} d\tau}{r}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

Et donc le tableau :

\vec{j}	+	-
\vec{A}	+	-
\vec{B}	-	+

VII Calculs de champ magnétostatique

A) Méthode

1) Calcul direct

$$\text{On a } \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint Id\vec{l} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3}. \text{ Donc en général, il y a trois intégrales scalaires.}$$

Cas plus simple : pour un circuit plan et un point M du plan,



$$\text{Et donc } \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint (dr\vec{u}_r + rd\theta\vec{u}_\theta) \wedge \frac{-r\vec{u}_r}{r^3}$$

$$\text{Soit } \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\oint \frac{d\theta}{r} \right) \vec{u}_z$$

Si on connaît l'équation polaire de la courbe, on obtient un champ assez simple à calculer (et orthogonal au plan)

2) Calcul par le théorème d'Ampère

Avec suffisamment de symétries, on peut utiliser le théorème d'Ampère,

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_e$$

3) Potentiel vecteur

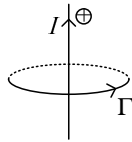
$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

Cette méthode a deux inconvénients :

Ici, \vec{A} est un vecteur, comme \vec{B}

Il faut de plus connaître le rotationnel dans le système de coordonnées considéré.

B) Fil rectiligne infini



1) Symétrie

\vec{B} est porté par \vec{u}_θ et ne dépend que de r (symétrie pour I)

$$\text{Donc } \vec{B} = B(r)\vec{u}_\theta$$

2) Théorème d'Ampère

$$2\pi.r.B = \mu_0 I_e = \mu_0 I$$

$$\text{Donc } \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi.r} \vec{u}_\theta$$

Remarque : $\|\vec{B}\| \xrightarrow{r \rightarrow 0} +\infty$

3) Calcul de \vec{A} .

(Remarque : c'est inutile puisqu'on a déjà \vec{B} !)

- Calcul direct :

$$\text{On a } \vec{A} = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Id\vec{l}}{r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \vec{u}_z \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{r}.$$

On a déjà vu qu'une telle intégrale divergeait, donc la méthode ne convient pas.

- Calcul par le champ \vec{B} :

$$\text{On a } \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}.$$

On pourrait « intégrer » la relation, mais on obtient un calcul compliqué.

- Méthode :

Tout plan orthogonal à z est un plan d'antisymétrie pour le courant donc pour \vec{A} aussi.

Tout plan contenant z est un plan de symétrie pour le courant donc pour \vec{A} .

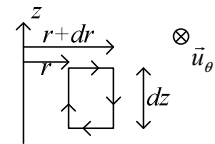
$$\text{Donc } \vec{A} = A(r)\vec{u}_z$$

Remarque :

La forme générale est $\vec{A} = A(r)\vec{u}_z + \vec{\nabla}\phi(r, \theta, z)$, qui ne vérifie généralement pas les symétries.

On a alors d'après le théorème de Stokes :

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}$$



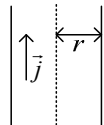
(On oriente le circuit dans le sens de \vec{u}_θ)

$$\text{Ainsi, } A(r)dz - A(r+dr)dz = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr \cdot dz$$

$$\text{Soit } \frac{d(A(r))}{dr} = \frac{-\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$\text{Et donc } A(r) = A(r_0) - \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r}{r_0}$$

C) Câble cylindrique infini



On suppose \vec{j} uniforme.

Les symétries sont les mêmes que pour le fil rectiligne.

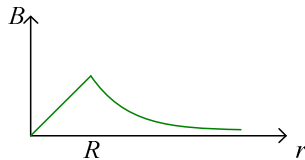
$$\text{Ainsi, } \vec{B} = B(r)\vec{u}_\theta$$

D'après le théorème d'Ampère, pour un disque de rayon r :

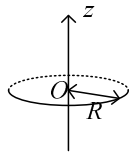
$$B \times 2\pi r = \mu_0 I_e$$

$$\text{Et } I_e = \begin{cases} I & \text{si } r > R \\ I\left(\frac{r}{R}\right)^2 & \text{si } r < R \end{cases}$$

$$\text{Ainsi, } \vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta & \text{si } r > R \\ \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \vec{u}_\theta & \text{si } r < R \end{cases}$$



D) Spire circulaire

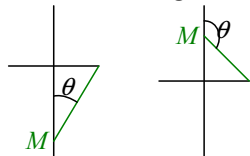


- Au centre :

$$\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\oint \frac{d\vec{\theta}}{r} \right) \vec{u}_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \left(\oint d\theta \right) \vec{u}_z = \frac{\mu_0 I}{2R} \vec{u}_z$$

- Sur l'axe :

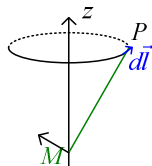
- Paramétrage :



$$\text{On a alors } \tan \theta = \frac{-r}{z}$$

- Direction :

Tout plan contenant z est un plan d'antisymétrie pour \vec{j} , donc de symétrie pour \vec{B} . Ainsi, $\vec{B} = B(z)\vec{u}_z$



- On a $d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} d\vec{l} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3}$

(L'égalité n'a pas de sens mais c'est uniquement pour intégrer)

Donc $dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} dl$, et $dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \sin \theta$

Ainsi, seul « dl » est à intégrer (le reste est constant sur le domaine d'intégration)

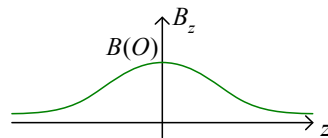
Donc $B(z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2\pi R}{r^2} \sin \theta$

On a $r = \frac{R}{\sin \theta}$

Donc $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \theta \vec{u}_z = \vec{B}(O) \sin^3 \theta$

- Variation de $B(z)$ avec z :

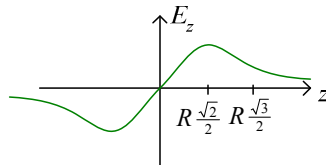
On a $\sin \theta = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}}$



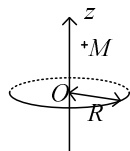
On a une fonction paire, la largeur de la courbe est de l'ordre de R (par analyse dimensionnelle). Plus précisément, la distance entre les points d'inflexions vaut $R/2$.

Remarque :

Pour une spire chargée de charge linéique λ ,



- Champ au voisinage de l'axe :



On se place à une distance $r \ll R$ de l'axe.

Le plan contenant M et l'axe est un plan d'antisymétrie pour le courant, et le problème est invariant par rotation autour de l'axe.

Donc $\vec{B} = B_r(r, z)\vec{u}_\theta + B_z(r, z)\vec{u}_z$

On a au premier ordre :

$B_r(r, z) = B_r(0, z) + r.\alpha = r.\alpha$ ($\alpha = \left(\frac{\partial B_r}{\partial r}\right)_{r=0}$)

$B_z(r, z) = B_z(0, z) + \beta.r$

On retrouve la même chose que pour \vec{E} :

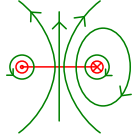
L'intensité embrassée est nulle pour un disque de rayon r passant par M , et le flux à travers une galette de hauteur dz et de rayon r est aussi nul. Ainsi, on aura ici aussi $\beta = 0$

Ainsi, $B_z(r, z) \approx B_z(0, z)$ et $B_r(r, z) \approx -\frac{r}{2} \left(\frac{\partial B_z}{\partial z}\right)_{r=0}$

Remarque :

\vec{E} et \vec{B} ont en général des propriétés très différentes, mais dans un lieu où $\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$, on retrouve les mêmes propriétés.

- Lignes de champ :

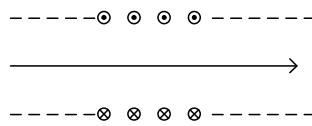


E) Solénoïde

1) Définition

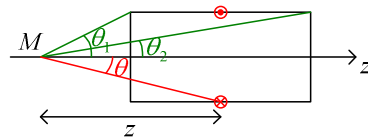
C'est un ensemble de N spires circulaires de même rayon R et équidistantes (de distance d), parcourues par une même intensité I .

On note $n = \frac{1}{d}$ le nombre de spires par unité de longueur.



On suppose que $d \ll R$

2) Champ en un point de l'axe



On a $\tan \theta = \frac{R}{z}$, soit $z = R \cdot \cotan \theta$

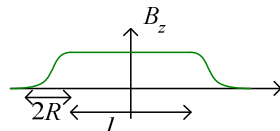
Par symétrie, $\vec{B} = B(z)\vec{u}_z$

Pour une spire, on a $b_z = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \theta$

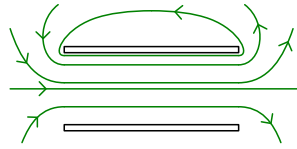
Si on considère que $d \ll R$, on peut passer au continu, et un élément dz aura une contribution :

$$dB_z = b_z \times ndz = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \theta \cdot n \left(\frac{-Rd\theta}{\sin^2 \theta} \right)$$

$$\text{Donc } B_z = \mu_0 n I \times \frac{\cos \theta_2 - \cos \theta_1}{2}$$



3) Lignes de champ



Le champ \vec{B} est canalisé à l'intérieur, mais diminue très brutalement à l'extérieur.

4) Solénoïde infini

- On suppose que les spires sont suffisamment rapprochées pour que le problème soit invariant par *toute* translation le long de z .
- Direction :
Tout plan orthogonal à z est de symétrie pour les courants, donc d'antisymétrie pour \vec{B} .

Donc $\vec{B} = B(r)\vec{u}_z$

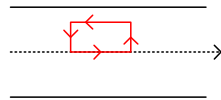
- Champ à l'intérieur :

- Sur l'axe : on a $\theta_2 = 0$, $\theta_1 = \pi$.

Donc $\vec{B} = \mu_0 n I \vec{u}_z$

- Hors de l'axe :

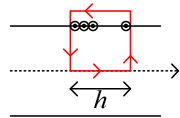
On prend un petit circuit à l'intérieur :



On aura $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_e = 0$

Et sur les parties latérales du circuit, la circulation est nulle, donc la circulation en haut compense exactement celle en bas, c'est-à-dire $\vec{B} = \mu_0 n I \vec{u}_z$ en dehors de l'axe aussi.

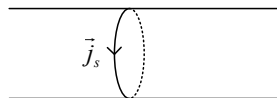
- Champ à l'extérieur :



On a $\mu_0 n I H - B_z h = \mu_0 n h I$ donc $B_z = 0$

5) Nappe solénoïdale infinie

C'est un rouleau avec un courant surfacique $\vec{j}_s = j_s \vec{u}_\theta$ uniforme :



On va adapter le résultat du solénoïde :

$$\text{On a } \vec{B} = \mu_0 n I \vec{u}_z$$

(A l'extérieur, on aura toujours $\vec{B} = \vec{0}$)

Pour une longueur dz , on aura une intensité $I.n.dz$ dans un solénoïde, et $dI = \vec{j}_s \cdot \vec{u}_\theta dz = j_s . dz$ dans une nappe solénoïdale.

Ainsi, on doit remplacer $I.n$ par j_s .

$$\text{Donc } \vec{B} = \mu_0 j_s \vec{u}_z$$

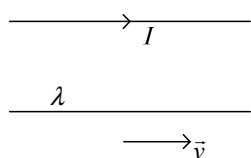
$$\text{On a } \vec{B}(R^+) - \vec{B}(R^-) = \vec{0} - \mu_0 j_s \vec{u}_z = -\mu_0 j_s \vec{u}_z = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{u}_r$$

On retrouve donc la relation de passage à la traversée d'une surface.

VIII Compléments

A) Expérience de Rowland (XIX^{ème} siècle)

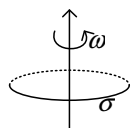
Idée :



Le premier fil, parcouru par un courant, crée un champ \vec{B} , appelé courant de conduction (pas de déplacement « important » de matière)

Le but de Rowland était de montrer que le deuxième crée aussi un champ \vec{B} , c'est-à-dire que le champ est créé par des particules chargées en mouvement ; un tel courant est appelé courant de convection.

On prend un disque chargé uniformément :



On cherche le champ magnétique créé par ce disque :

Champ sur l'axe :

On décompose le disque en lanières circulaires de longueur dr entre r et $r+dr$.

Contribution d'une telle lanière :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 dI}{2r} \sin^3 \theta . \vec{u}_z$$

Calcul de dI :

Pour des charges σ se déplaçant à la vitesse \vec{v} , on a $\vec{j}_s = \sigma . \vec{v} = \sigma . r . \omega . \vec{u}_\theta$

$$\text{Donc } dI = \vec{j}_s \cdot \vec{u}_\theta dr = \sigma . r . \omega . dr$$

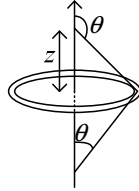
Ou, autrement :

La charge δq qui passe en un point pendant un tour vaut $\delta q = \sigma \times 2\pi . r . dr$

Pour faire ce tour, il faut un temps $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Donc $I = \frac{\delta q}{T} = \sigma . r . \omega . dr$

Maintenant, en remplaçant :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 \sigma r \omega dr}{2r} \sin^3 \theta \vec{u}_z = \frac{\mu_0 \sigma \omega dr}{2} \sin^3 \theta \vec{u}_z$$



On a $r = -z \tan \theta$, soit $dr = -z \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$

Donc
$$dB = \frac{-\mu_0 \sigma \omega z}{2} \frac{\sin^3 \theta}{\cos^2 \theta} d\theta = \frac{\mu_0 \sigma \omega z}{2} \frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} d(\cos \theta)$$

Ainsi,
$$B = \frac{\mu_0}{2} \sigma \omega z \left[-\frac{1}{\cos \theta} - \cos \theta \right]_0^\alpha \quad \text{si } z < 0, \quad B = \frac{\mu_0}{2} \sigma \omega z \left[-\frac{1}{\cos \theta} - \cos \theta \right]_\pi^\alpha \quad \text{si } z > 0.$$

Après calcul,
$$B = \frac{\mu_0}{2} \sigma \omega R \frac{1 + \varepsilon \cos \alpha}{\sin \alpha} \vec{u}_z \quad \text{où } \varepsilon = \frac{z}{|z|}$$

(Et $\cos \alpha = \frac{-z}{\sqrt{R^2 + z^2}}$, $\sin \alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}}$)

B) Discussion

On a $\lim_{\alpha \rightarrow 0, \pi} B = 0$

Il n'y a pas de discontinuité en $\alpha = \frac{\pi}{2}$, ce qui s'explique par le fait que comme

$j_s = \sigma r \omega$, le courant est nul en 0.

Ordre de grandeur :

- σ :

A $V \sim 10^5 V$, et pour un disque de rayon R (on a alors une capacité $C \sim 4\pi\epsilon_0 R$)

On a $\sigma = \frac{\epsilon_0 V}{R}$

- Et $B \sim \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} R \sim \frac{\mu_0 \epsilon_0 V}{2} \omega \sim \frac{V \omega}{c^2}$

- ω : à l'heure actuelle, on peut atteindre 10^4 rad.s^{-1} (pas à l'époque de Rowland !)

On a alors un champ $B \sim \frac{10^9}{10^{17}} \sim 10^{-8} \text{ T}$

Par comparaison, la Terre crée un champ $B \sim 10^{-5} \text{ T}$.

Il faut donc compenser le champ créé par la Terre avec une précision d'au moins trois décimales pour pouvoir observer le champ créé par le disque avec une aiguille aimantée !

Il faut en plus faire l'expérience dans le vide, puisque la vitesse importante du disque produit un courant d'air qui peut faire bouger l'aiguille.

Par comparaison, avec une spire de rayon 5cm et une intensité d'un ampère, on atteint un champ magnétique proche de 10^{-5} T

Cette différence d'ordres de grandeur montre aussi qu'une surface chargée contient très peu de charges par rapport au nombre de charges en mouvement en présence d'un courant (vu aussi en électrostatique, quand on a calculé le travail à fournir pour enlever tous les électrons libres d'une petite boule de conducteur)

C) Calcul de \vec{j} à partir de \vec{B} .

En coordonnées cylindriques, on suppose qu'on a un champ \vec{B} de la forme :

$$\vec{B} = B_0 \left(\frac{r}{R} \right)^3 e^{-r/R} \vec{u}_\theta \text{ si } 0 < r < R$$

$$\vec{B} = 2B_0 \frac{R}{r} \vec{u}_\theta \text{ si } r > R$$

On cherche la répartition de courant qui a créé un tel champ \vec{B} .

1) Préliminaire

Déjà, on vérifie que $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

(Par le calcul, ou en remarquant simplement que les lignes de champ sont en cercles autour de l'axe...)

On pourrait utiliser le fait que $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$, mais on n'est pas sûr que la répartition de courant est une répartition volumique.

2) Symétrie

Déjà, \vec{j} ne dépend ni de z ni de θ , et idem pour \vec{j}_s

Ainsi, si on a une répartition surfacique, elle sera forcément cylindrique.

De même pour une répartition linéique éventuelle, elle serait forcément le long de l'axe z .

Ainsi, $\vec{j} = j(r) \vec{u}_z$, $\vec{j}_s = j_s \vec{u}_z$

3) Courant volumique

$$\text{On a } \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint \mu_0 \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

Sur un contour circulaire de rayon r , on note $C(r) = \oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$



On a alors $C(r + dr) - C(r) = \mu_0 j \times 2\pi r dr$

Donc $d(2\pi r B) = \mu_0 \times 2\pi r \cdot j dr$

$$\text{D'où } j = \frac{1}{\mu_0 r} \frac{d(rB_r)}{dr}$$

$$\text{Soit } \vec{j} = \frac{B_0}{\mu_0} \frac{r^3}{R^3} \left(4 - \frac{r}{R}\right) e^{-r/R} \vec{u}_r \text{ si } r < R$$

$$\text{Et } \vec{j} = \vec{0} \text{ si } r > R$$

4) Courants surfaciques

Le champ est continu en tout point autre que R , donc s'il y a un courant surfacique, il ne peut être qu'en R .

$$\text{On a } \vec{B}(R^+) - \vec{B}(R^-) = \left(2B_0 - \frac{B_0}{e}\right) \vec{u}_\theta$$

Donc le champ est discontinu en R , donc il y a un courant surfacique, et :

$$\vec{B}(R^+) - \vec{B}(R^-) = B_0 \left(2 - \frac{1}{e}\right) \vec{u}_z \wedge \vec{u}_r = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{u}_r$$

Soit, comme $\vec{j}_s = j_s \vec{u}_z$,

$$\vec{j}_s = \frac{B_0}{\mu_0} \left(2 - \frac{1}{e}\right) \vec{u}_z$$

5) Courant linéique

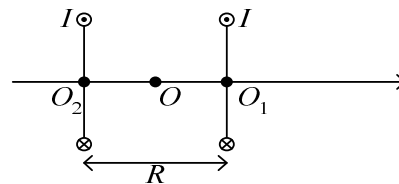
Il est forcément le long de l'axe.

S'il y a un courant linéique, il sera toujours présent quand $r \rightarrow 0$.

Mais $2\pi r B_0 \left(\frac{r}{R}\right)^3 e^{-r/R} \rightarrow 0$, donc il n'y a pas de courant linéique.

D) Bobines de Helmholtz

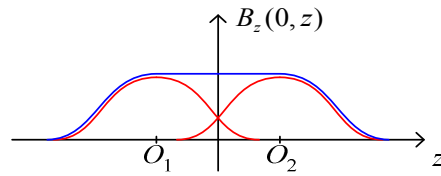
1) Dispositif



2) Champ entre les bobines

$$\text{On a } \vec{B} = \vec{B}(r, z) = B_r(r, z) \vec{u}_r + B_z(r, z) \vec{u}_z$$

- Sur l'axe au voisinage de O :



Par parité, les termes d'ordre impair seront nuls :

$$B_z(0, z) = B_z(0, 0) + \underbrace{\left(\frac{\partial B_z}{\partial z}\right)_{z=0}}_{=0} \times z + \underbrace{\left(\frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2}\right)_{z=0}}_{=0} \times \frac{z^2}{2} + \underbrace{\left(\frac{\partial^3 B_z}{\partial z^3}\right)_{z=0}}_{=0} \times \frac{z^3}{3}$$

De plus, $\left(\frac{\partial^2 B_{z,1}}{\partial z^2}\right)_{z=0} = \left(\frac{\partial^2 B_{z,2}}{\partial z^2}\right)_{z=0} = 0$ pour chacune des deux spires (avec

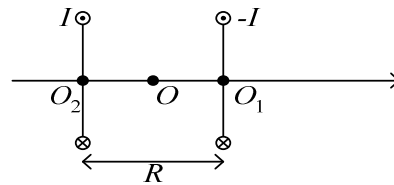
l'expression du champ créé par une spire de rayon R , on voit qu'on a un point d'inflexion à une distance $R/2$ de cette spire)

Ainsi, on a un champ qui varie en z^4 au voisinage de l'axe.

- En dehors de l'axe au voisinage de O :

On a ici une variation en r^2 quand on s'éloigne de l'axe.

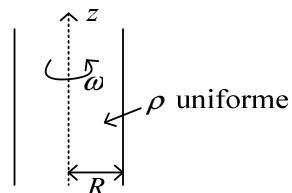
3) Bobine de Holzhelm



On inverse ici le sens du courant dans une des bobines

On aura cette fois-ci une variation pratiquement linéaire au voisinage de O , et donc un gradient quasiment uniforme.

E) Champ d'un cylindre chargé en rotation



On cherche le champ magnétique créé par ce cylindre en rotation :

1) Densité de courant de convection

$$\text{On a } j = \rho \cdot \vec{v} = \rho \cdot r \omega \vec{u}_\theta$$

2) Calcul du champ

On a pour un cerceau de hauteur dz et compris entre r et $r+dr$ une intensité :

$$dI = \rho \cdot \omega \cdot r \times dr \cdot dz$$

En assimilant ce cerceau à une portion de solénoïde infini parcourue par un courant $I \cdot dz$, on obtient pour toute la hauteur :

$$\text{Si } r' < r, \quad d\vec{B}(r') = \mu_0 \rho \omega r' dr' \vec{u}_z$$

$$\text{Si } r' > r, \quad d\vec{B}(r') = \vec{0}$$

En intégrant, on obtient pour tout le cylindre :

$$\text{Si } r > R, \quad \vec{B} = \vec{0}$$

$$\text{Si } r < R, \quad \vec{B} = \int_r^R \rho \omega \mu_0 r' dr' \vec{u}_z = \frac{1}{2} \mu_0 \rho \omega (R^2 - r^2) \vec{u}_z$$

F) Courant de conduction et de convection

1) Définition

On prend un milieu avec des porteurs de charge, dans un référentiel R :

$$\text{Pour un volume } d\tau, \text{ on a } \vec{j} = \frac{1}{d\tau} \sum q_i \vec{v}_i = \sum_k \rho_k \vec{v}_k$$

- Pour le cuivre :

$$\vec{j} = \rho_e \vec{v}_e + \rho_{\text{Cu}^{2+}} \vec{v}_{\text{Cu}^{2+}}$$

Vitesse barycentrique :

$$\vec{v} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{\sum m_i} \quad (\text{vitesse globale de l'élément } d\tau)$$

$$\text{On a alors } \vec{j} = \sum_k \rho_k (\vec{v}_k - \vec{v}) + \underbrace{\sum_k \rho_k}_{\rho} \vec{v} = \sum_k \rho_k \vec{v}_{r,k} + \rho \vec{v}$$

- Courant de convection :

$$\vec{j}_{\text{conv}} = \rho \vec{v} \quad / \quad \vec{j}_{s,\text{conv}} = \sigma \vec{v} \quad / \quad I = \lambda \vec{v}$$

- Courant de conduction :

$$\vec{j}_{\text{cond}} = \sum_k \rho_k (\vec{v}_k - \vec{v})$$

2) Exemple

- Courant de convection :

Pour un fil rectiligne uniformément chargé de charge linéique λ , se déplaçant à la vitesse \vec{v} , on a à une distance r de ce fil :

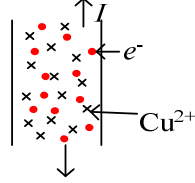
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi \cdot r} \vec{u}_\theta = \frac{\mu_0 \lambda \cdot v}{2\pi \cdot r} \vec{u}_\theta, \quad \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 \cdot r} \vec{u}_r \quad (\text{calcul détaillé dans le chapitre 11})$$

Ainsi, pour une charge q se déplaçant à la vitesse \vec{v} , on a une force magnétique de Lorentz $F_m = qvB$, et une force électrique de Lorentz $F_e = qE$

On a donc un effet relatif $\frac{F_m}{F_e} \sim \frac{vB}{E} = \mu_0 \epsilon_0 v^2 = \frac{v^2}{c^2} \ll 1$

L'effet magnétique est donc difficile à mettre en évidence.

- Courant de conduction :
 - Fil conducteur fixe dans le référentiel d'étude :



On a une vitesse barycentrique $\vec{v} = \frac{m_{\text{Cu}^{2+}} \vec{v}_{\text{Cu}^{2+}} + 2m_{e^-} \vec{v}_{e^-}}{m_{\text{Cu}^{2+}} + m_{e^-}} = \frac{2m_{e^-} \vec{v}_{e^-}}{m_{\text{Cu}^{2+}} + m_{e^-}} \ll \vec{v}_{e^-}$

$$(\vec{v}_{\text{Cu}^{2+}} = \vec{0})$$

Le mouvement d'ensemble est donc négligeable.

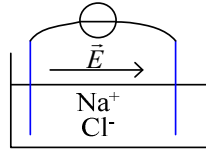
$$(1) \text{ On a de plus } \vec{j}_{\text{conv}} = \underbrace{(\rho_{\text{Cu}^{2+}} + \rho_{e^-})}_{=0} \vec{v} = \vec{0}$$

$$(2) \text{ Et } \vec{j}_{\text{cond}} = \rho_{\text{Cu}^{2+}} (\vec{v}_{\text{Cu}^{2+}} - \vec{v}) + \rho_{e^-} (\vec{v}_{e^-} - \vec{v}) = \rho_{e^-} \vec{v}_{e^-}$$

On a ainsi des champs :

$$\begin{cases} \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta \\ \vec{E} = \vec{0} \end{cases}$$

- Solution saline :



$$(1) \text{ On a } \rho = \rho_{\text{Na}^+} + \rho_{\text{Cl}^-} = 0, \text{ donc } \vec{j}_{\text{conv}} = \vec{0}$$

$$(2) \text{ Et } \vec{j}_{\text{cond}} = \rho_{\text{Na}^+} (\vec{v}_{\text{Na}^+} - \vec{v}) + \rho_{\text{Cl}^-} (\vec{v}_{\text{Cl}^-} - \vec{v}) = \rho_{\text{Na}^+} \vec{v}_{\text{Na}^+} + \rho_{\text{Cl}^-} \vec{v}_{\text{Cl}^-}$$

$$\text{On a } \rho_k = n_k z_k e = C_k z_k \mathfrak{F} \quad (\mathfrak{F} = N_a e)$$

$$\text{Et } \vec{v}_k = \mu_k \vec{E}, \text{ où } \text{sgn } \mu_k = \text{sgn } z_k$$

$$\text{Donc } \vec{j}_{\text{cond}} = \sum \rho_k \vec{v}_k = \sum C_k |z_k| \mathfrak{F} |\mu_k| \vec{E} = \sum C_k |z_k| \lambda_k^{\text{eq}} \vec{E}$$