

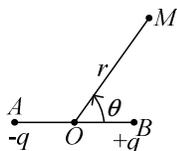


Chapitre 2 : Le dipôle électrostatique

I Potentiel et champ créés par un dipôle

A) Approche du dipôle : champ et potentiel créés à grand distance par deux charges opposées

On note $r = OM$, on suppose $r \gg AB = l$, et on note $\vec{p} = q\vec{AB}$:



On note $\vec{r}_A = \vec{AM}$, $\vec{r}_B = \vec{BM}$.

1) Potentiel

$$\text{On a } V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right).$$

- A l'ordre 1 en l/r , $r_B \approx r_A \approx r$, donc $V = 0$.

- Au deuxième ordre (en l/r),

$$\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} = \delta \frac{1}{r} = \vec{\nabla}_P \frac{1}{r} \cdot \vec{AB}$$

$$\text{Ainsi, } V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \vec{AB}, \text{ ou } V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

Donc V décroît en $1/r^2$

Et q , \vec{AB} n'interviennent pas individuellement.

$$\text{On peut écrire aussi } V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2}$$

Remarque :

On a un potentiel décroissant en $1/r^2$

La seule caractéristique utile est \vec{p} , et pas q et \vec{AB} séparément.

2) Champ E .

• On a $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$,

$$\text{Donc } E_r = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{2 \cos \theta}{r^3}, E_\theta = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sin \theta}{r^3}, E_\varphi = 0.$$

• Expression intrinsèque :

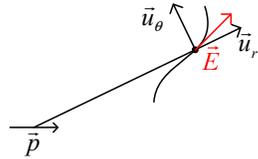
$$\text{On a } \vec{E} = -\vec{\nabla}_M V = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \vec{\nabla} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \left(\vec{p} \cdot \vec{r} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r^3} \right) + \frac{1}{r^3} \vec{\nabla} \vec{p} \cdot \vec{r} \right)$$

$$\text{Et, } \vec{\nabla}\left(\frac{1}{r^3}\right) = 3 \times \left(\frac{1}{r}\right)^2 \vec{\nabla}_M \frac{1}{r} = \frac{-3}{r^2} \times \frac{\vec{r}}{r^3}$$

De plus, $\vec{p} \cdot \vec{r} = p_x x + p_y y + p_z z$, donc $\vec{\nabla}(\vec{p} \cdot \vec{r}) = \vec{p}$

$$\text{D'où } \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(\frac{3\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^2} \vec{r} - \vec{p} \right)$$

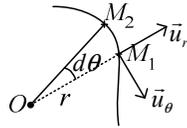
- Lignes de champ :
- Méthode 1 :



$$\text{Vecteur tangent à une courbe polaire : } \vec{T} = \frac{dr}{ds} \vec{u}_r + r \frac{d\theta}{ds} \vec{u}_\theta$$

En effet :

Pour une courbe polaire, et deux points M_1, M_2 infiniment voisins :



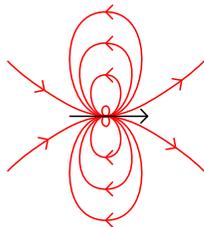
$$\text{Donc } \vec{T} = \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{M_1 M_2} = \frac{dr \cdot \vec{u}_r + r d\theta \cdot \vec{u}_\theta}{ds} = \frac{dr}{ds} \vec{u}_r + r \frac{d\theta}{ds} \vec{u}_\theta$$

Ainsi, pour $\vec{E} = E_r \vec{u}_r + E_\theta \vec{u}_\theta$, comme \vec{E} et \vec{T} sont colinéaires :

$$\frac{dr}{rd\theta} = \frac{E_r}{E_\theta} = \frac{2 \cos \theta}{\sin \theta}$$

$$\text{Soit } \frac{dr}{r} = 2 \frac{\cos \theta \cdot d\theta}{\sin \theta}$$

Donc $\ln r = 2 \ln |\sin \theta| + \text{cte}$, soit $r = K \sin^2 \theta$.



- Méthode 2 :

Les lignes de champ sont orthogonales aux équipotentielles.

$$\text{Mais quand } V = \text{cte}, \frac{\cos \theta}{r^2} = K'$$

$$\text{Soit } \frac{-\sin \theta d\theta}{r^2} - \frac{2 \cos \theta}{r^3} dr = 0$$

Pour un petit déplacement à $V = \text{cte}$, $d\overrightarrow{OM} = dr \cdot \vec{u}_r + r d\theta \cdot \vec{u}_\theta$

Et sur la ligne de champ, $d'\overrightarrow{OM} = dr' \cdot \vec{u}_r + r' d\theta' \cdot \vec{u}_\theta$

Comme les deux lignes sont orthogonales,

$$r dr' + r r' d\theta d\theta' = 0$$

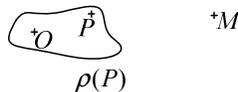
$$\text{Donc } \frac{dr}{rd\theta} = -\frac{r' d\theta'}{dr'}$$

$$\text{On a } -\sin\theta = 2 \cos\theta \frac{dr}{rd\theta}$$

$$\text{Donc } -\sin\theta' = -2 \cos\theta' \frac{r' d\theta'}{dr'} \quad (\text{en } M, \theta = \theta' \text{ et } r = r')$$

Et on retrouve en intégrant la relation précédente.

B) Généralisation : développement multipolaire d'une répartition de charge finie



1) Potentiel

On note $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, $\vec{r}' = \overrightarrow{PM}$

$$\text{Ainsi, } V(M) = \iiint_P \frac{\rho(P) d\tau}{4\pi\epsilon_0 r'}$$

$$\text{On a } \frac{1}{r'} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \overrightarrow{OP} + \dots$$

Donc

$$\begin{aligned} V(M) &= \iiint_P \frac{\rho(P) d\tau}{4\pi\epsilon_0 r} + \iiint_P \frac{\rho(P) d\tau}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r} \cdot \overrightarrow{OP} + \dots \\ &= \frac{\iiint_P \rho(P) d\tau}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\iiint_P \rho(P) \overrightarrow{OP} d\tau \right) \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} + \dots \\ &= V_0 + V_1 + \dots \end{aligned}$$

2) Analyse

- Terme monopolaire :

$$\text{On a } V_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

- Terme dipolaire :

- Moment dipolaire :

$$\text{On pose } \vec{p} = \iiint_P \rho(P) \overrightarrow{OP} d\tau.$$

$$\text{Ainsi, } V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{p} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}$$

- Retour sur le cas de deux charges opposées :

$$\text{On a dans ce cas } \rho = -q \delta(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}) + q \delta(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB})$$

$$\text{Soit } \vec{p} = \iiint_P \rho(P) \cdot \vec{OP} d\tau = q \vec{AB}$$

- Changement d'origine :

Si on remplace l'origine O par O' , le moment dipolaire devient \vec{p}' avec :

$$\vec{p}' = \underbrace{\iiint_P \rho(P) \cdot \vec{O'O} d\tau}_{Q \vec{O'O}} + \underbrace{\iiint_P \rho(P) \cdot \vec{OP} d\tau}_{\vec{p}} = Q \vec{O'O} + \vec{p}$$

Donc le moment dipolaire dépend de l'origine.

Mais en général on n'utilise p que lorsque le terme monopolaire est nul, c'est-à-dire $Q = 0$, et dans ce cas p est indépendant de l'origine.

3) Développement multipolaire

On a $V = V_0 + V_1 + V_2 + V_3 + \dots$

V_2 : quadrupolaire

V_3 : octupolaire...

$+q$					monopolaire
$+q$	$-q$				dipolaire
$+q$	$-q$	$+q$	$-q$	$+q$	quadrupolaire
$-q$	$+q$	ou	$-q$	$+2q$	$-q$

Dans tout les cas, pour le terme quadrupolaire, on peut montrer que V_2

$$\text{s'écrit sous la forme } V_2 = \frac{1}{16\pi\epsilon_0} L \cdot \frac{3\cos^2\theta - 1}{r^3} \quad (L : \text{moment quadrupolaire})$$

C) Dipôle

1) Définition

C'est un être « physique » :

- Ponctuel

- Caractérisé par \vec{p} , moment dipolaire

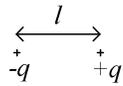
- Qui crée en tout point de l'espace un potentiel $V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{p} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}$

2) Discussion

- Un dipôle n'existe pas réellement.

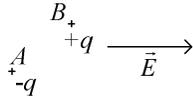
- On peut définir de même des quadrupôles...

II Action d'un champ E sur un dipôle

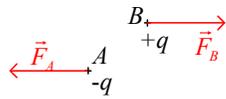


On fait un développement en $l/D \ll 1$ (D : distance caractéristique de variation de \vec{E})

A) Pour un champ uniforme



1) Résultante



On a $\vec{F} = -q\vec{E}(A) + q\vec{E}(B)$

Donc $\vec{F} = \vec{0}$

Donc le dipôle est soumis à un couple.

2) Moment

On a :

$$\begin{aligned}\vec{M}(O) &= \vec{OA} \wedge (-q\vec{E}) + \vec{OB} \wedge (q\vec{E}) \\ &= \vec{AB} \wedge q\vec{E}\end{aligned}$$

Soit $\vec{M} = \vec{p} \wedge \vec{E}$.

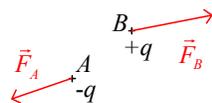
Ainsi, le champ tend à faire en sorte que \vec{p} soit colinéaire à \vec{E} .

3) Energie potentielle

On a $\delta W = -q\vec{E} \cdot d\vec{OA} + q\vec{E} \cdot d\vec{OB} = q\vec{E} \cdot d\vec{AB} = d(\vec{p} \cdot \vec{E})$

Donc $E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E} + \text{cte}$

B) Champ non uniforme



(On suppose que $l/D \ll 1$)

1) Résultante

- Expression 1 :

$$\text{On a } \vec{F} = q(\vec{E}(B) - \vec{E}(A))$$

$$\text{Donc } F_x = q(E_x(B) - E_x(A)) = q(\vec{\nabla} E_x) \cdot \vec{AB} = \vec{p} \cdot \vec{\nabla} E_x$$

Et de même pour F_y, F_z .

On utilise alors la notation :

$$\vec{F} = \vec{p} \cdot \vec{\nabla} \vec{E}$$

- Expression 2 :

$$\text{On a } F_x = p_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_x}{\partial y} + p_z \frac{\partial E_x}{\partial z}$$

$$\text{Comme } \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{0}, \text{ on a } \frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x} \dots$$

$$\text{Donc } F_x = p_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_y}{\partial x} + p_z \frac{\partial E_z}{\partial x} = \vec{p} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = \frac{\partial(\vec{p} \cdot \vec{E})}{\partial x}$$

(pour \vec{p} indépendant de x)

$$\text{Et donc si } \vec{p} \text{ ne dépend pas de la position du dipôle, } \vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{p} \cdot \vec{E}).$$

2) Moment en O .

(O : milieu des deux charges)

$$\text{On a } \vec{M}(O) = \vec{OA} \wedge (-q)\vec{E}(A) + \vec{OB} \wedge q\vec{E}(B) = \frac{1}{2} q \vec{AB} \wedge (\vec{E}(A) + \vec{E}(B))$$

$$\text{Soit } \vec{M}(O) = \vec{p} \wedge \vec{E}(O)$$

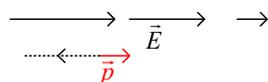
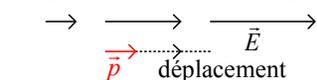
3) Energie potentielle

$$\text{On a } E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}(O)$$

4) Conséquences

Un dipôle va s'orienter dans le sens du champ.

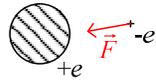
Il est ensuite soumis à une force $\vec{\nabla}(\vec{p} \cdot \vec{E})$, et va donc se déplacer dans le sens d'augmentation du champ :



2) Modèle de l'électron élastiquement lié (faux)

- Force de rappel élastique :

On modélise la force exercée par le noyau sur un électron par $\vec{F} = -k\vec{r}$:



On sait qu'en réalité la force est coulombienne (et donc en $1/r^2$)

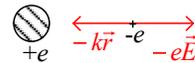
On ajoute aussi une force de frottement $\vec{F}_f = -f\vec{v}$

- Polarisabilité :

- Pour $\vec{E} = \vec{0}$, on a une trajectoire de forme elliptique, et à l'équilibre l'électron est dans le noyau, et $\vec{p} = \vec{0}$.

- Pour $\vec{E} \neq \vec{0}$, on aura à l'équilibre : $\underbrace{m\ddot{\vec{r}}}_{=\vec{0}} = -k\vec{r} - e\vec{E} - \underbrace{f\dot{\vec{r}}}_{=\vec{0}}$

$$\text{Donc } \vec{r} = \frac{-e}{k} \vec{E}$$



$$\text{Donc } \vec{p} = -e\vec{r} = \frac{e^2}{k} \vec{E}, \text{ soit } \alpha = \frac{e^2}{k}.$$

$$\text{Pour } Z \text{ électrons, } \alpha = Z \frac{e^2}{k}$$

- Interprétation du modèle :

- Ce modèle est dû à Thomson (1902) :

Selon lui, un atome de rayon R avait une structure de la forme :



C'est-à-dire qu'on a des charges négatives ponctuelles dans une boule uniformément chargée.

(1) Champ dans le « noyau » :

$$\text{On a } E \times 4\pi r^2 = \frac{Ze}{\epsilon_0} \frac{r^3}{R^3}$$

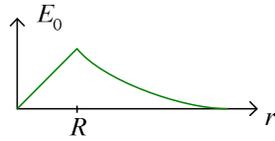
$$\text{Soit } \vec{E} = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{R^3}$$

$$(2) \text{ Et } \vec{F} = -e\vec{E} = -\underbrace{\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 R^3}}_k \vec{r}$$

(3) Le résultat justifie donc le modèle de la liaison élastique.

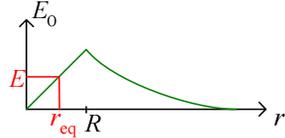
Et on a ici $\alpha = \frac{Ze^2}{k} = 4\pi\epsilon_0 R^3$ (ou $\alpha' = 4\pi.R^3$, avec les dimensions d'un volume : $3 \times$ le volume de la boule de rayon R)

(4) Variations :



Si on ajoute un champ \vec{E} :

Pour \vec{E} assez petit, à l'équilibre, $\vec{0} = -e\vec{E}_0 - e\vec{E}$



Si \vec{E} continue d'augmenter, l'électron se rapproche de la paroi extérieure. Lorsque le champ est suffisant, l'électron s'en va.

Ainsi, plusieurs résultats vrais ont été observés réellement à partir de ce modèle, mais...

(5) 1911 : Rutherford montre que la taille de la charge positive de l'atome est très petite devant la taille de l'atome.

- Modèle de Bohr :



Avec $\vec{F} = \frac{-Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}$ (modèle planétaire de l'atome)

On considère que l'électron a une orbite circulaire (très rapide)



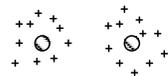
Le centre négatif est donc légèrement décalé, ce qui donne un moment dipolaire non nul.

L'électron élastiquement lié de Thomson correspond en quelque sorte à la position moyenne de l'électron.

B) Diélectriques (=isolants)

1) Polarisation diélectrique

- Dans un diélectrique :



Les électrons ne peuvent pas se déplacer d'un noyau à l'autre.

Ainsi, en l'absence de champ, il n'y a pas de moment dipolaire.

Mais quand $\vec{E} \neq \vec{0}$, les électrons vont se décaler en valeur moyenne.

Un petit volume $d\tau$ va ainsi posséder un moment dipolaire $d\vec{p}$, et on pose

$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{d\tau}$: moment dipolaire par mètre cube, ou vecteur polarisation diélectrique.

Remarque :

- C'est la polarisation diélectrique électronique.

On peut trouver d'autres types de polarisation (par exemple quand on applique des champs à des cristaux de NaCl)

- Problème :

Les petits dipôles ainsi créés vont créer eux-mêmes un champ \vec{E}' , et on a donc la superposition de deux champs (mais ce nouveau champ va encore changer le moment dipolaire, donc \vec{E}' ... on n'a pas toujours une relation simple)

• Dans un conducteur :

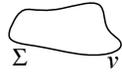
Par exemple, pour le cuivre, on a 29 électrons autour du noyau.

27 d'entre eux restent liés à l'atome, mais 2 peuvent bouger librement.

Lorsque le champ \vec{E} est nul, les électrons n'ont à priori aucune raison de se déplacer.

Lorsque \vec{E} augmente, les électrons qui peuvent se déplacer vont bouger (conduction) ; on a aussi une polarisation due aux électrons liés, mais elle sera complètement masquée par la conduction.

2) Potentiel créé par un diélectrique polarisé



On suppose qu'on connaît $\vec{P}(P)$, et on veut calculer $V(M)$.

• Expression :

$$V(M) = \iiint_V \frac{d\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \iiint_V \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{r^3} d\tau$$

$$\text{On a } \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{r^3} = \vec{P} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{r} = \vec{\nabla}_P \cdot \left(\frac{\vec{P}}{r} \right) - \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{r}$$

Donc

$$\begin{aligned} V(M) &= \iiint_V \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{\nabla}_P \cdot \left(\frac{\vec{P}}{r} \right) d\tau + \iiint_V \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-\vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{r} d\tau \\ &= \oint_{\Sigma} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P}}{r} \cdot \vec{dS} + \iiint_V \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-\vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{r} d\tau \\ &= \oint_{\Sigma} \frac{\vec{P} \cdot \vec{n}}{4\pi\epsilon_0 r} dS + \iiint_V \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-\vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{r} d\tau \end{aligned}$$

• Interprétation :

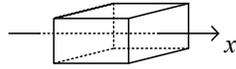
On note $\vec{P} \cdot \vec{n} = \sigma_{\text{lié}}$, $-\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = \rho_{\text{lié}}$

$$\text{Ainsi, } V(M) = \oint_{\Sigma} \frac{\sigma_{\text{lié}}}{4\pi\epsilon_0 r} dS + \iiint_V \frac{\rho_{\text{lié}}}{4\pi\epsilon_0 r} d\tau$$

On a le même potentiel qu'une répartition de la forme :



- Analyse physique du résultat :



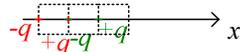
On suppose que $\vec{P} = P\vec{u}_x$.

Si \vec{P} est uniforme :

On décompose en cubes élémentaires : $\delta\vec{P} = \vec{P}\delta\alpha^3$

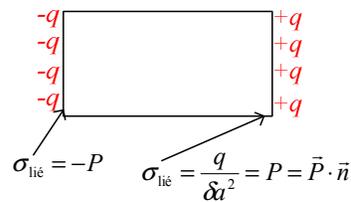


$q\delta\alpha = P\delta\alpha^3$, soit $q = P\delta\alpha^2$



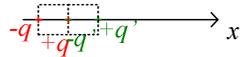
Ainsi, les charges s'annulent deux à deux.

Donc $\rho_{\text{lié}} = 0 = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$.



Si \vec{P} n'est pas uniforme :

Si $\vec{P} = P(x)\vec{u}_x$, avec par exemple $\frac{dP}{dx} > 0$:



On a $q = P(x)\delta\alpha^2$, $q' = P(x + \delta\alpha)\delta\alpha^2$, soit $q - q' = -\frac{\partial P}{\partial x}\delta\alpha^3$.

Donc $\rho = \frac{q - q'}{\delta\alpha^3} = -\frac{\partial P}{\partial x} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$

La charge surfacique est la même que précédemment.

3) Equation locale du champ

- $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{0}$

- $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{\rho_{\text{lié}}}{\epsilon_0} + \frac{\rho_{\text{libre}}}{\epsilon_0} = \frac{-\vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{\epsilon_0} + \frac{\rho_{\text{libre}}}{\epsilon_0}$

Donc $\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{E} + \frac{\vec{P}}{\epsilon_0} \right) = \frac{\rho_{\text{libre}}}{\epsilon_0}$

Avec $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, l'équation devient :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{\text{libre}}$$

\vec{D} s'appelle l'induction/excitation électrique.

4) Cas des diélectriques LHI (linéaires homogènes isotropes)

- Polarisation :
 - Linéaire :
 $\vec{P} = \epsilon_0 \tilde{\chi}_e(\vec{E})$ où $\tilde{\chi}_e$ est une application linéaire

Ou matriciellement :

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \epsilon_0 (\chi_e) \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

$\tilde{\chi}_e$ est l'opérateur de susceptibilité électrique.

- Homogène :
 $\tilde{\chi}_e$ ne dépend pas du point.
- Isotrope :
 χ_e est scalaire : $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$

- Equation locale du champ :

- $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{0}$
- $\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{E} + \frac{\vec{P}}{\epsilon_0} \right) = \frac{\rho_{\text{libre}}}{\epsilon_0}$

Avec $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$, l'équation devient :

$$\vec{\nabla} \cdot \underbrace{(1 + \chi_e)}_{\epsilon_r} \vec{E} = \frac{\rho_{\text{libre}}}{\epsilon_0}$$

Soit $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{\text{libre}}}{\epsilon_0 \epsilon_r}$ (car le milieu est homogène, donc ϵ_r est indépendant du

point)

Ainsi, on peut ignorer les charges de polarisation, à condition de remplacer ϵ_0 par $\epsilon_0 \epsilon_r$.

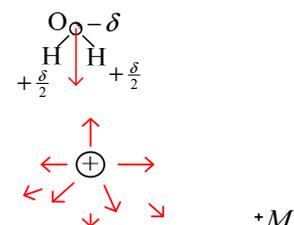
- ϵ_r : permittivité diélectrique relative.
- $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$: permittivité diélectrique.

- Application :

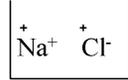
H₂O à 25°C : on a $\epsilon_r = 78$

- Champ créé par une charge ponctuelle :

$$q^+ P \quad \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (\text{seul } P \text{ est une particule libre, les autres sont liées})$$

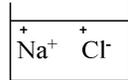


- Force entre deux charges ponctuelles :



$$\vec{F} = \frac{qq' \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

Si on ajoute de l'eau :



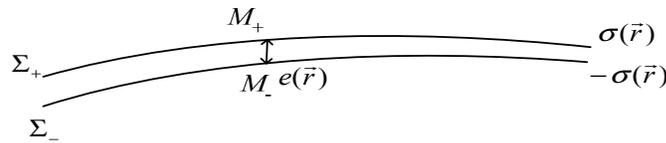
$$\vec{F}' = \frac{qq' \vec{r}}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^3}$$

(Favorise la dissolution)

C) Couche dipolaire

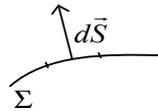
1) Densité dipolaire surfacique

- Approche :



On fait tendre $e(\vec{r})$ vers 0 et $\sigma(\vec{r})$ vers $+\infty$ mais de sorte que $e\sigma = D(\vec{r}) = \text{cte}$

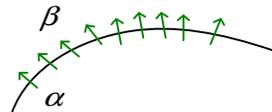
- Définition :



Pour un élément de surface $d\vec{S}$ d'une surface, on a un moment dipolaire $d\vec{p} = D(\vec{r})d\vec{S}$; $D(\vec{r})$; densité dipolaire surfacique.

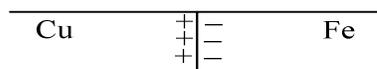
2) Exemples

- Membrane biologique :



La membrane se comporte comme une couche dipolaire.

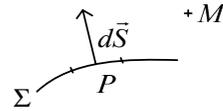
- Jonction entre deux conducteurs :



Il y a une partie des électrons à la jonction qui vont passer du côté du fer (le milieu est « plus agréable » pour les électrons)

3) Discontinuité du potentiel à la traversée de la couche

- Expression :



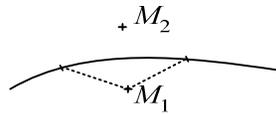
On note $\vec{r} = \overrightarrow{PM}$

$$\text{On a } V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\Sigma} \frac{d\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\Sigma} \frac{D(\vec{r}) d\vec{S} \cdot \vec{r}}{r^3} = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\Sigma} D(\vec{r}) d\Omega$$

Où $d\Omega$ est l'angle solide sous lequel, depuis M , on voit le confetti :

$$d\Omega = \frac{\overrightarrow{MP} \cdot d\vec{S}}{r^3} = \frac{-\vec{r} \cdot d\vec{S}}{r^3}$$

Au voisinage de la surface,



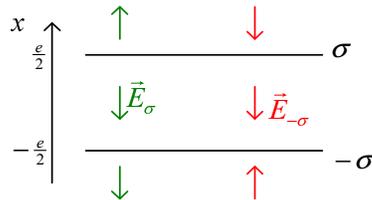
On a un confetti pour lequel $\Omega \approx 2\pi$, et pour les autres on a un angle solide quasiment nul.

$$\text{Ainsi, } V(M_1) = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} D(M) \times 2\pi \text{ et } V(M_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} D(M) \times 2\pi$$

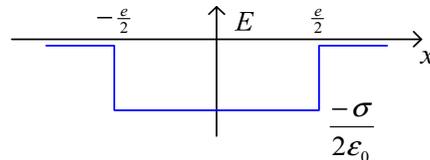
$$\text{Donc } V(M_1) - V(M_2) = \frac{D(M)}{\epsilon_0}$$

- Analyse :

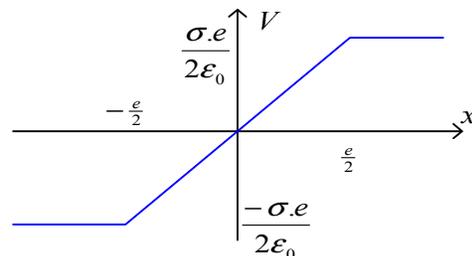
Pour les champs créés par chacune des plaques,



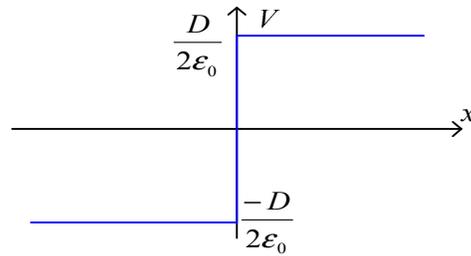
Et donc globalement :



Ainsi, pour le potentiel :

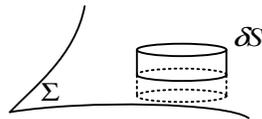


Quand e tend vers 0, on obtient ainsi la courbe :



4) Relations de passage du champ

- Continuité de la composante normale :



On a, à travers la surface fermée : $\delta\phi = \frac{\delta Q}{\epsilon_0} = 0$

Donc $\vec{E}_2 \cdot \vec{\delta S} - \vec{E}_1 \cdot \vec{\delta S} = 0$, et $\vec{E}_{n,2} - \vec{E}_{n,1} = 0$

- Discontinuité de la composante tangentielle :



On a

$$V_{M_2} - V_{M_1} - (V_{N_2} - V_{N_1}) = \frac{D(M)}{\epsilon_0} - \frac{D(N)}{\epsilon_0} = \frac{\vec{\nabla} D}{\epsilon_0} \cdot (-d\vec{l})$$

$$= V_{M_2} - V_{N_2} - (V_{M_1} - V_{N_1}) = \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} - \vec{E}_1 \cdot d\vec{l}$$

Donc $\vec{E}_{T,2} - \vec{E}_{T,1} = -\frac{\vec{\nabla} D}{\epsilon_0}$

Puis $\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = -\frac{\vec{\nabla} D}{\epsilon_0}$