

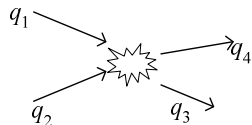
Chapitre 1 : Le champ électrostatique

I Loi de Coulomb pour deux particules élémentaires

A) Postulat de la charge

A toute particule élémentaire, on peut associer une grandeur scalaire q :

- Invariante par changement de référentiel
- Conservative :



On a $q_1 + q_2 = q_3 + q_4$ (ou, macroscopiquement : $\sigma_q = 0$)

- Algébrique : positive ou négative (ou nulle)

B) Loi de Coulomb

1) Enoncé

On considère une charge q_1 fixe dans un référentiel R .

- Cette charge q_1 en P modifie l'espace autour d'elle et crée en M un

$$\text{champ } \vec{E}(M) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} \text{ où } \vec{r} = \overrightarrow{PM}.$$

ϵ_0 : permittivité du vide ; $\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-7} c^2}$ (en F.m^{-1}) ; c'est une valeur exacte.

$$\text{On a } \epsilon_0 \approx \frac{1}{36\pi} \cdot 10^9 \text{ F.m}^{-1} \approx 8,85418782 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1} \sim 10^{-11} \text{ S.I.}$$

- On considère une charge q_2 fixe ou mobile en M .

Cette charge subit alors une force $\vec{F} = q_2 \vec{E}(M)$

2) Discussion

- La loi reste valable en relativité
C'est une loi fondamentale de la physique.
- Si q_1 se déplace, $\vec{E}(M)$ est variable et il y a en plus un champ \vec{B} .

C) Principe de superposition

On admet (principe) que \vec{E} créé par des charges q_1, \dots, q_p vérifie $\vec{E} = \sum_{i=1}^p \vec{E}_i$.

II Loi de Coulomb macroscopique

A) Du microscopique au macroscopique



On note $\overline{\rho(P,t)} = \frac{\sum_{i \in d\tau} q_i}{d\tau}$ (rappel : la barre désigne une valeur moyenne)

1) Champ microscopique

Les charges q_i ont une vitesse d'agitation \vec{v}_i , et produisent donc un champ électromagnétique $\vec{e}_i(M,t)$, $\vec{b}_i(M,t)$

2) Champ macroscopique

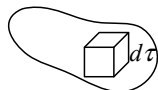
$$\text{On a } d\vec{E} = \sum_{i \in d\tau} \vec{e}_i = \frac{\rho \cdot d\tau}{4\pi \cdot \epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{dq}{4\pi \epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}$$

On retrouve donc un champ coulombien.

$$\text{On a de plus } d\vec{B} = \sum_{i \in d\tau} \vec{b}_i = \vec{0}$$

Ainsi, les particules sont mésoscopiquement au repos.

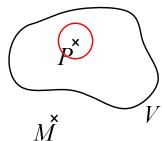
B) Le champ électrostatique macroscopique



$$\text{On a } d\vec{E} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \rho \cdot d\tau \frac{\vec{r}}{r^3}$$

1) Schématisation volumique

$$\text{On a } \vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \iiint \rho(P) \frac{\vec{r}}{r^3} d\tau$$



- Si M est extérieur à V , l'intégrale converge.
- Sinon :

On considère que ρ est borné ($|\rho| < \rho_0$)

Alors $\vec{E}(M) = \vec{E}_l(M) + \vec{E}_i(M)$, où \vec{E}_i est le champ créé à l'intérieur d'une petite boule S_R de rayon R , et \vec{E}_l par le reste de la distribution, qui converge.

On va montrer que $\vec{E}_i(M)$ est borné :

$$|\vec{E}_i(M)| \leq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{S_R} \rho_0 \frac{1}{r^2} d\tau = \frac{\rho_0 R}{\epsilon_0}$$

Donc \vec{E}_i est borné, et l'intégrale converge.

Donc E est défini aussi dans la distribution.

2) Schématisation surfacique

$$\text{On a } \vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \sigma(P) \frac{\vec{r}}{r^3} ds$$

Le champ diverge lorsque M est un point de la surface.

3) Schématisation linéique

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \lambda(P) \frac{\vec{r}}{r^3} dl$$

4) Schématisation discrète

$$\text{On a } \vec{E} = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_i}{r^3}, \quad \rho = \sum_i q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$$

III Potentiel électrostatique, rotationnel du champ E .

A) Potentiel électrostatique

1) Charge ponctuelle

Une charge q placée en P produit en M un champ :

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{\frac{\vec{r}}{r^3}}_{-\vec{\nabla}_M \frac{1}{r}} = -\vec{\nabla}_M \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$\text{Donc } \vec{E}(M) = -\vec{\nabla}_M V \text{ où } V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \text{cte.}$$

2) Répartition volumique de charges

• Expression :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \rho(P) \underbrace{\frac{\vec{r}}{r^3}}_{-\vec{\nabla}_M \frac{1}{r}} d\tau$$

$\vec{\nabla}_M$ correspond à une dérivation par rapport à r et est donc indépendant de P

$$\text{Ainsi, } \vec{E}(M) = -\vec{\nabla}_M \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(P)}{r} d\tau \right) = -\vec{\nabla}_M V$$

$$\text{Où } V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(P)}{r} d\tau + \text{cte}$$

- Convergence de l'intégrale :

A l'extérieur de la distribution, on a bien convergence.

A l'intérieur, on applique la même méthode que pour le champ :



Dans une petite boule de rayon R , le potentiel créé est majoré :

$$|V_i(M)| \leq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{S_R} \rho_0 \frac{1}{r} d\tau = \frac{\rho_0 R^2}{2\epsilon_0}$$

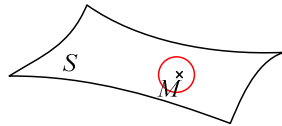
Donc l'intégrale converge sur la petite boule, et aussi en dehors, donc V est défini sur la distribution.

3) Répartition surfacique de charge

- Expression du potentiel :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \sigma(P) \frac{1}{r} ds$$

- V est aussi défini sur S :

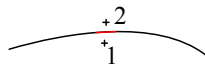


$V(M) = V_e(M) + V_i(M)$, ou $V_e(M)$ converge et :

$$|V_i(M)| \leq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\text{disque}} \sigma_0 \frac{dS}{r} = \frac{\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{2\pi.r.dr}{r} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_0 R}{\epsilon_0}$$

- V est continu à la traversée de la répartition :

En coupe,



$$\text{On a } V_2 - V_1 = V_{e_2} - V_{e_1} + V_{i_2} - V_{i_1}$$

$V_{e_2} - V_{e_1}$ peut être rendu aussi petit qu'on veut :

Il suffit de prendre 1 et 2 suffisamment proches l'un de l'autre.

$$\text{On a de plus } |V_{i_1}| < |V_i|, |V_{i_2}| < |V_i|,$$

$$\text{Et } |V_i| < \frac{1}{2} \frac{\sigma_0 R}{\epsilon_0}. \text{ Donc } |V_{i_1} - V_{i_2}| < \frac{\sigma_0 R}{\epsilon_0}, \text{ soit } |V_{i_1} - V_{i_2}| \xrightarrow{R \rightarrow 0} 0$$

Remarque :

V n'est pas défini sur la distribution pour une distribution linéique ou discrète.

B) Circulation de E .

On a $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$, donc $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$

Et $\int_p^Q \vec{E} \cdot d\vec{l} = V(P) - V(Q)$

C) Surfaces équipotentielles, lignes de champ

1) Définition

- Equipotentielle :

C'est un domaine d'équation $V(\vec{r}) = \text{cte}$ (en général, c'est une surface)

- Lignes de champ :

C'est une courbe Γ telle que \vec{E} est tangent à Γ : $\vec{E} \wedge d\vec{l} = \vec{0}$ le long de Γ ,

et Γ est orienté par \vec{E} : $\vec{E} \cdot d\vec{l} > 0$

2) Propriétés

- Les lignes de champ sont normales aux équipotentielles :

Pour tout $d\vec{r}$ sur l'équipotentielle, $dV = 0$, donc $\vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$, et \vec{E} est bien normal à l'équipotentielle.

- Le potentiel décroît le long d'une ligne de champ :



On a $\vec{E} \cdot d\vec{r} > 0$, donc $dV < 0$

D) Rotationnel de E .

1) Première équation locale du champ

On a :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V \Leftrightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{0}$$

2) Discussion

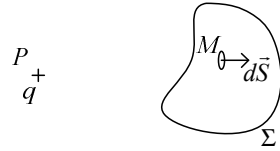
- La relation n'est valable qu'en électrostatique (sinon, $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$)
- $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{E}$ est à circulation conservative.
- Elle est valable pour tout champ en $\frac{\vec{r}}{r^n}$.

IV Théorème de Gauss et divergence de E .

A) Théorème de Gauss

1) Préliminaire

Flux du champ \vec{E} créé par une charge ponctuelle à travers une surface quelconque :



$$\text{On a } d\phi = \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

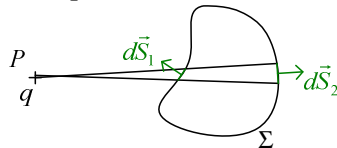
$$\text{Soit } \phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \Omega$$

2) Flux de E à travers une surface fermée

- Charge ponctuelle :

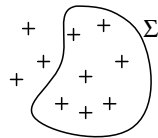
- Si q est intérieur à Σ , on a $\Omega = 4\pi$, donc $\phi = \frac{q}{\epsilon_0}$

- Si q est extérieur à Σ :



On a $d\Omega_1 = -d\Omega_2$, et donc en intégrant $\Omega = 0$, soit $\phi = 0$.

- Ensemble de charges ponctuelles :



$$\text{On a } \vec{E} = \sum \vec{E}_i. \text{ Donc } \phi = \sum \phi_i = \sum_{i \text{ intérieur}} \frac{q_i}{\epsilon_0} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

- Répartition volumique :

$$\text{On a } \phi = \iiint_V \frac{\rho d\tau}{\epsilon_0}$$

$$\text{Ainsi, la formule devient } \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \frac{\rho d\tau}{\epsilon_0}$$

3) Théorème de Gauss

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

4) Théorème de Earnshaw

- Enoncé :

Il n'existe pas d'extremum absolu de potentiel dans une région de l'espace vide de charge.

(Extremum absolu : la dérivée est nulle et la fonction est (dé)croissante dans toutes les directions de l'espace ; Extremum relatif : la dérivée est simplement nulle – comme pour une selle de cheval par exemple)

- Démonstration :

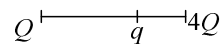
Si on a par exemple un maximum absolu en M , alors toutes les lignes de champ partent du point M (puisque V décroît le long d'une ligne de champ)

Ainsi, $\phi > 0$, donc il y a une charge en M .

- Conséquence :

On ne peut pas confiner la matière avec un champ électrostatique.

Ceci a déjà été vu quand on a remarqué qu'il ne pouvait pas y avoir d'équilibre stable dans une configuration de la forme :

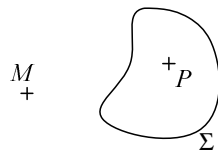


(Où $Q, 4Q$ sont des charges fixes et q mobile)

Et ce quel que soit le signe des charges, ou même si on ajoute d'autres charges fixes autour de q .

B) Divergence de E .

1) Deuxième équation locale du champ



$$\text{On a } \vec{E}(M) = \iiint \frac{\rho(P) \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} d\tau$$

$$\text{Donc } \vec{\nabla}_M \cdot \vec{E}(M) = \iiint \frac{\rho(P)}{4\pi\epsilon_0} \vec{\nabla}_M \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} d\tau$$

(On dérive uniquement par rapport à M)

$$\text{Or, } \frac{\vec{r}}{r^3} = -\vec{\nabla}_M \frac{1}{r}. \text{ Donc } \vec{\nabla}_M \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = -\vec{\nabla}_M^2 \frac{1}{r} = -\vec{\nabla}_P^2 \frac{1}{r} = 4\pi\delta(\vec{r})$$

$$\text{Et } \vec{\nabla}_M \cdot \vec{E}(M) = \frac{\rho(M)}{\epsilon_0}, \text{ ou } \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

2) Discussion

- L'égalité est encore valable pour des charges mobiles ou même pour un champ qui n'est pas créé par des charges.
- On aurait pu montrer l'égalité à partir du théorème de Gauss.

- Un champ en $\frac{\vec{r}}{r^4}$ (par exemple) ne vérifierait pas l'équation. En fait :
- $$\left. \begin{array}{l} \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{0} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \vec{E} = \iiint \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} d\tau + \vec{K}$$

3) Cas d'une charge ponctuelle

Pour $\rho = q\delta(\vec{r})$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{q}{\epsilon_0} \delta(\vec{r})$, la divergence est nulle partout sauf sur la charge où elle n'est pas définie.

4) Cas d'une répartition surfacique/linéique

C'est la même chose.

Remarque :

On peut aussi appliquer le théorème de Gauss pour la gravitation avec la correspondance

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \leftrightarrow -G$$

V Relation de passage à la traversée d'une distribution surfacique

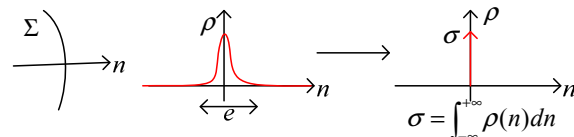
A) Potentiel V .

On a vu que pour une distribution bornée, V est défini et continu sur la surface.

B) Champ E .

1) De la schématisation volumique à la schématisation surfacique

Densité :



Donc $\rho \rightarrow \rho'(n) = \sigma\delta(n)$

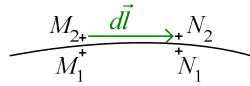
Ainsi, \vec{E} est en réalité défini sur la surface (c'est à cause du modèle qu'il est divergeant)

On a donc une relation en 0 :

$$\left. \begin{array}{l} \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{0} \\ \text{On va montrer que } \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$$

C'est-à-dire qu'il y a continuité de la composante tangentielle de E et discontinuité de la composante normale.

2) Continuité de la composante tangentielle



On a $V(M_2) - V(M_1) < \varepsilon$, $V(N_2) - V(N_1) < \varepsilon'$

Donc $V(M_2) - V(M_1) - (V(N_2) - V(N_1)) < \varepsilon''$ soit

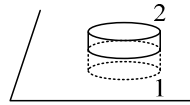
$V(M_2) - V(N_2) - (V(M_1) - V(N_1)) < \varepsilon''$

Ou $\vec{E}_2 \cdot d\vec{l} - \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} < \varepsilon''$

Donc $(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot d\vec{l} = 0, \forall d\vec{l}$ sur Σ

Soit $\vec{E}_{T_2} - \vec{E}_{T_1} = \vec{0}$ (on n'a utilisé que le fait que $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{0}$)

3) Discontinuité de la composante normale



On a $\delta\phi = \frac{\delta q}{\varepsilon_0}$

Soit $\delta\phi_1 + \delta\phi_2 + \delta\phi_l = \frac{\sigma dS}{\varepsilon_0}$ ($\delta\phi_l$: flux latéral)

Lorsque les deux parois sont très proches :

$\delta\phi_l \rightarrow 0$

$\delta\phi_2 = \vec{E}_2 \cdot \vec{n} \cdot dS$, $\delta\phi_1 = -\vec{E}_1 \cdot \vec{n} \cdot dS$

Donc $(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \vec{n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

Ou $\vec{E}_{N_2} - \vec{E}_{N_1} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}$

(On n'utilise ici que le fait que $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$)

4) Relation de passage globale

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}$$

VI Equations locales pour V .

A) Expression

1) Equation de Poisson

$$\left. \begin{array}{l} \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla} V \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}^2 V = \frac{-\rho}{\epsilon_0}}$$

2) Equation de Laplace

Dans une région où $\rho = 0$, on a $\vec{\nabla}^2 V = 0$

Remarque :

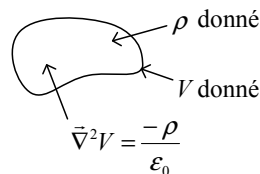
On a $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$, donc toutes les dérivées ne sont pas de même

signe (on retrouve le théorème de Earnshaw)

B) Résolution

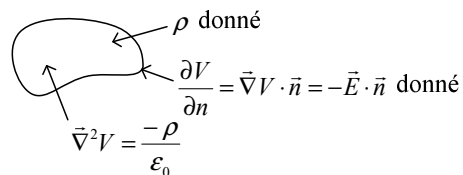
1) Conditions aux limites

- Dirichlet :



La solution de l'équation est unique (si on la trouve !)

- Neumann :



Alors la solution est unique à une constante additive près.

2) Commentaires

On a ainsi deux méthodes pour calculer V :

- L'utilisation de la loi de Coulomb $V(M) = \iiint \frac{\rho d\tau}{4\pi\epsilon_0 r}$

Mais il faut connaître ρ sur tout l'espace.

- Equation de Poisson $\vec{\nabla}^2 V = \frac{-\rho}{\epsilon_0}$

On n'a besoin de ρ que sur un domaine

Récapitulatif :

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} \text{ ou } \vec{E} = \iiint \frac{\rho d\tau}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}$$

Circulation conservative.

Circulation conservative

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{0}$$

$$\vec{E}_{T_2} - \vec{E}_{T_1} = \vec{0}$$

Flux non conservatif

Théorème de Gauss :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}_{N_2} - \vec{E}_{N_1} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$$

$$\vec{\nabla}^2 V = \frac{-\rho}{\epsilon_0}$$

VII Exemples de champs et potentiels particuliers

A) Méthodes de calcul de E .

- Calcul direct :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \rho d\tau \frac{\vec{r}}{r^3}$$

3 intégrales scalaires à priori.

- Calcul par le potentiel :
 - Plus commode car V est scalaire.
 - On a deux méthodes pour calculer V .
 - Pour calculer \vec{E} ensuite, il faut V tout autour.
- Utilisation du théorème de Gauss :

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

Applicable uniquement avec beaucoup de symétries.

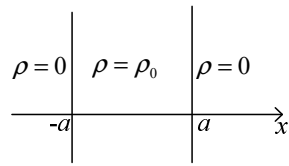
B) Champ E uniforme

$$\text{Si } \vec{E} = E\vec{u}_x$$

$$\text{Densité de charge : } \rho = +\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

$$\text{Potentiel : } dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -Edx, \text{ donc } V = -Ex + \text{cte}$$

C) Répartition volumique uniforme entre deux plans parallèles



Symétries :

Invariance par translation orthogonale à Ox .

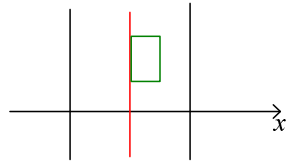
Donc V ne dépend que de x , et $\vec{E} = E(x)\vec{u}_x$.

Invariance par symétrie par rapport à yOz

Donc $V(x) = V(-x)$. Donc $E(x) = -E(-x)$

Calcul de \vec{E} :

Pour $x > 0$:



On a $\phi = \phi_g + \phi_l + \phi_d$

Et $\phi_g = 0$ (paroi de gauche) car $E(0) = 0$,

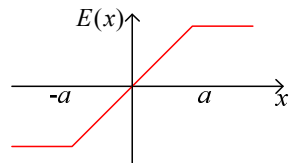
$\phi_l = 0$ car $\vec{E} \parallel Ox$,

$\phi_d = E(x)S$

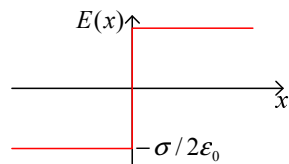
Donc $\phi = E(x)S$

Si $0 \leq x \leq a$, $Q_{\text{int}} = \rho_0 Sx$, donc $E(x) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} x$, soit $\vec{E}(x) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} x \vec{u}_x$

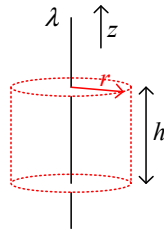
Si $x \geq a$, $Q_{\text{int}} = \rho_0 Sa$, donc $\vec{E}(x) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} a \vec{u}_x$



Lorsque $a \rightarrow 0$ et $\rho_0 \rightarrow +\infty$ mais de sorte que $2a\rho_0 = \text{cte} = \sigma$:



D) Fil rectiligne uniformément chargé



Symétries :

Translation d'axe Oz .

Rotation autour de z .

Ainsi, V ne dépend que de r , et $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$.

Calcul du champ :

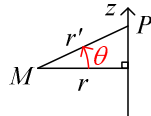
$$\phi = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

$$\text{On a } \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}, \text{ soit } ES = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}.$$

$$\text{Donc } \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{u}_r$$

Calcul du potentiel :

Calcul direct :



$$\text{On a } V(M) = \int_{z=-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda dz}{4\pi\epsilon_0 r'}$$

On fait le changement de variable $z = r \tan \theta$, $r' = \frac{r}{\cos \theta}$

$$V(M) = \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\lambda r d\theta}{4\pi\epsilon_0 \frac{r}{\cos^2 \theta}} = \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\lambda d\theta}{4\pi\epsilon_0 \cos \theta} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\ln \left| \tan \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| \right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

L'intégrale est donc divergente.

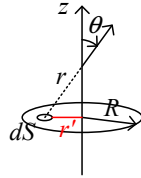
Calcul par le champ :

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr$$

$$\text{Donc } V = V_0 - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{r_0}$$

E) Disque uniformément chargé

1) Champ sur l'axe



On a $\vec{E} = E(z)\vec{u}_z$. Une surface dS crée en M un champ $d\vec{E} = \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}$, soit

$$dE_z = \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \cos\theta.$$

Donc $E_z = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{dS}{r^2} \cos\theta$. Pour une petite bande, $dS = 2\pi r' dr'$.

On a $r = \frac{z}{\cos\theta}$, $r' = z \tan\theta$.

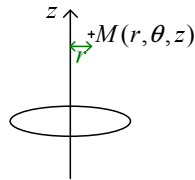
Donc

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_{\theta=0}^{\alpha} \frac{\cos^2\theta}{z^2} \times 2\pi z \tan\theta \frac{z}{\cos^2\theta} \cos\theta d\theta = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^{\alpha} \sin\theta d\theta \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (1 - \cos\alpha) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) \end{aligned}$$

(Pour $z > 0$)

Si $z \gg R$, on a un champ proche de celui créé par une charge ponctuelle.

2) Champ au voisinage de l'axe



On a $E_r(r, \theta, z), E_\theta(r, \theta, z), E_z(r, \theta, z)$

On a une symétrie de révolution : donc V ne dépend que de r, z .

Donc $E_r(r, z), E_\theta = \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0, E_z(r, z)$

Champ à l'ordre 1 en r :

$$E_r(r, z) = E_r(0, z) + r \left(\frac{\partial E_r}{\partial r} \right)_{r=0} = 0 + r \cdot \alpha(z)$$

$$E_z(r, z) = E_z(0, z) + r \left(\frac{\partial E_z}{\partial r} \right)_{r=0} = E_z(0, z) + r \cdot \beta(z)$$

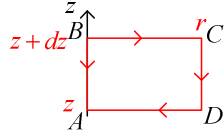
Première méthode :

En connaissant $\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{0} \end{cases}$ (il n'y a pas de charge en M), on peut calculer

α, β .

Autre méthode :

- Circulation de \vec{E} :



On a

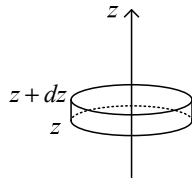
$$\begin{aligned} \delta C = 0 &= \underbrace{E_z(0, z) dz}_{AB} + \underbrace{\int_0^r r' \alpha(z + dz) dr'}_{BC} - \underbrace{E_z(r, z) dz}_{CD} - \underbrace{\int_0^r r' \alpha(z) dr'}_{DA} \\ &= \frac{1}{2} (\alpha(z + dz) - \alpha(z)) r^2 - r \beta(z) dz \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \frac{1}{2} \alpha'(z) r = \beta(z)$$

Donc en considérant l'ordre 0, $\beta(z) = 0$

(Attention : on ne peut pas écrire que $\alpha'(z) = 0$ car le membre de droite ne correspond à un DL qu'à l'ordre 0 en r .)

- Flux de \vec{E} :



On a $\delta \phi = 0$

Soit $\pi r^2 (E_z(0, z + dz) - E_z(0, z)) + 2\pi r dz \times E_r(r, z) = 0$ (au premier ordre)

$$\text{Donc } \pi r^2 \frac{dE_z(0, z)}{dz} dz + 2\pi r dz \times E_r(r, z) = 0$$

$$\text{D'où } E_r(r, z) = \frac{-r}{2} \frac{dE_z(0, z)}{dz}, \text{ puis } \alpha = \frac{-1}{2} \frac{dE_z(0, z)}{dz}$$

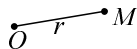
Remarque :

On n'a utilisé ici que des symétries de révolution pour appliquer le raisonnement (et le fait qu'il n'y a pas de charge là où on l'applique)

On verra que ce type de résultat s'applique aussi en magnétostatique.

VIII Complément

Détermination de la répartition de charge à partir du potentiel :



On suppose que $V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-r/a}$, où q et a sont des constantes.

1) Analyse

La répartition de charge possède une symétrie sphérique.

On pourrait utiliser la formule $\bar{\nabla}^2 V = \frac{-\rho}{\epsilon_0}$, mais il faut connaître $\bar{\nabla}^2$ en coordonnées sphériques ; on a peut-être aussi une répartition surfacique, qu'on ne pourrait pas trouver avec cette formule.

2) Champ E .

On a :

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\bar{\nabla}V = -\frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0}e^{-r/a}\left(\frac{-1}{r^2} - \frac{1}{ar}\right)\vec{u}_r \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}e^{-r/a}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{ar}\right)\vec{u}_r\end{aligned}$$

3) Calcul de $\phi(r)$.

$$\text{On a } \phi(r) = \frac{q}{\epsilon_0}e^{-r/a}\left(1 + \frac{r}{a}\right) \quad (= E_r \times 4\pi r^2)$$

4) Calcul de ρ .

On a $\phi(r+dr) - \phi(r) = \frac{4\pi r^2 dr \cdot \rho}{\epsilon_0}$ (répartition de charge entre deux sphères de rayons r et $r+dr$)

$$\text{Donc } \rho = \frac{\epsilon_0}{4\pi r^2} \frac{d\phi}{dr} = \frac{-1}{4\pi} \frac{1}{ar} e^{-r/a}$$

Problème :

On a trouvé que $\rho < 0$, et $\lim_{r \rightarrow +\infty} \phi(r) = 0$

Donc d'après le théorème de Gauss (dans « tout l'espace »), $\int_0^{+\infty} \rho = 0$

Ainsi, il y a forcément une charge ponctuelle en O (qui n'a pas été « détectée » par les sphères successives), qui compense ainsi exactement toute la distribution à l'extérieur.

5) Charge ponctuelle

On a $\lim_{r \rightarrow 0} \phi(r) = \frac{q}{\epsilon_0}$. On a donc une charge q en O , et une charge $-q$ répartie selon $\rho(r)$.

6) Commentaires

- On aurait très bien pu trouver des distributions surfaciques avec cette méthode (on aurait $d\phi = +\infty$ sur la surface)
- Cette répartition modélise l'atome d'hydrogène.
- Interaction forte :

Yukawa : l'énergie potentielle de l'interaction forte vaut

$$U = \frac{-g^2}{r} e^{-r/a}, \text{ où } \frac{g^2}{\hbar c} \approx 14,5.$$