Chapitre 25 : Courbes et surfaces

I Courbes planes

On identifie ici le plan à $\mathbb{R}^2$.

A) Fonctions implicites

- Problème :

Soit $f:\Omega\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ et $\Gamma=\{(x,y)\in\Omega, f(x,y)=0\}$

Γ est-il le graphe d'une fonction $\varphi: I\to\mathbb{R}$

Exemple :

Le cercle d'équation $x^2+y^2=1$

Γ est réunion des graphes de $x\mapsto\pm\sqrt{1-x^2}$

Pour tout $M_0=(x_0,y_0)$ distinct de $(\pm1,0)$, il existe un voisinage $I\times J$ de M_0 tel que $\Gamma\cap I\times J$ soit le graphe de $\begin{array}{l} I\to J \\ x\mapsto\varepsilon\sqrt{1-x^2}\end{array}$.

Si $M_0=(\pm1,0)$, un tel voisinage n'existe pas.

Analyse :

Si au voisinage de $M_0\in\Gamma$, Γ est le graphe d'une fonction $\varphi: I\to J$, on aura $\forall x\in I,(x,y)\in\Gamma\cap V\Leftrightarrow y=\varphi(x)$

Et donc $\forall x\in I, f(x,\varphi(x))=0$

En particulier, si φ est de classe C^1 : $\forall x\in I,\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))+\varphi'(x)\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))=0$

On en déduit la condition suffisante suivante (cf. théorème des fonctions implicites) pour que au voisinage de $M_0=(x_0,y_0)$, Γ soit le graphe d'une fonction C^1 :

Il suffit que *f* soit de classe C^1 et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\neq0$

Alors, au voisinage de M_0, Γ sera le graphe de $\varphi: I\to J$ tel que $\varphi(x_0)=y_0$ et

$$\forall x\in I,\varphi'(x)=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))}\quad(*)$$

Remarque :

Si *f* est de classe C^2, $G:(x,y)\mapsto-\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}$ est de classe C^1 au voisinage de M_0 et le théorème de Cauchy–Lipschitz s'applique : il existe une unique solution maximale (I,φ) à $(*)$

- Théorème des fonctions implicites (d'une variable) :

Soit $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ un ouvert, $f:\Omega\to\mathbb{R}$ de classe C^k, $k\geq1$.

On note $\Gamma=\{(x,y)\in\Omega, f(x,y)=0\}$

Soit $M_0 \in \Omega$. Si $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, alors il existe I ouvert voisinage de x_0, J intervalle ouvert voisinage de y_0, $\varphi : I \to J$ de classe C^k tel que pour tout $M = (x, y) \in I \times J$, $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x)$.

De plus, $\varphi(x_0) = y_0$ et $\forall x \in I, \varphi'(x) = -\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))}$

Démonstration :

On pose $F(x, y) = (x, f(x, y))$. Alors $F : \Omega \to \mathbb{R}^2$ est de classe C^k, et $\mathrm{Jac}(F)_{(x_0, y_0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$, donc $\mathrm{jac}(F)_{(x_0, y_0)} = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Donc d'après le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage U de $M_0 = (x_0, y_0)$ dans Ω et U' de $F(M_0) = (x_0, 0)$ dans $\mathbb{R}^2$ tels que $F : U \to U'$ soit un C^k –difféomorphisme, de réciproque $G : \begin{array}{l} U' \to U \\ (u,v) \mapsto (\alpha(u,v), \beta(u,v)) \end{array}$

On a : $\forall (x, y) \in U, G \circ F(x, y) = (x, y)$, c'est-à-dire $\begin{cases} \alpha(x, f(x, y)) = x \\ \beta(x, f(x, y)) = y \end{cases}$

Et $\forall (u, v) \in U', F \circ G(u, v) = (u, v)$, c'est-à-dire $\begin{cases} \alpha(u, v) = u \\ f(\alpha(u, v), \beta(u, v)) = v \end{cases}$.

Soit $M \in U$. Alors $F(M) = (x, f(x, y)) \in U'$

Et $M \in \Gamma$ si et seulement si $f(x, y) = 0$ c'est-à-dire si et seulement si $y = \beta(x, 0)$

(Si $f(x, y) = 0$, alors $y = \beta(x, f(x, y)) = \beta(x, 0)$ et si $y = \beta(x, 0)$, alors $f(x, y) = f(x, \beta(x, 0)) = 0$)

Donc au voisinage de (x_0, y_0), Γ est le graphe de $x \mapsto \varphi(x) = \beta(x, 0)$.

Calcul de φ :

On a $\forall x \in I, f(x, \varphi(x)) = 0$

Comme $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, au voisinage de x_0, on a $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x)) \neq 0$

En dérivant l'égalité $f(x, \varphi(x)) = 0$, on obtient bien la formule voulue pour φ

On procède par récurrence pour montrer que φ est de classe C^k.

B) Qu'est-ce qu'une courbe plane ?

Définition, proposition :

On appelle courbe de classe $C^k, k \geq 2$ de $\mathbb{R}^2$ toute partie non vide Γ de $\mathbb{R}^2$ telle que pour tout $M_0 \in \Gamma$, il existe V voisinage de M_0 dans $\mathbb{R}^2$ tel qu'on ait l'une des propositions équivalentes suivantes :

(1) (défini par paramétrisation) : il existe I intervalle de $\mathbb{R}^2$ ouvert, $\psi : I \to \mathbb{R}^2$ de classe C^k régulière, tels que $V \cap \Gamma$ est le support de ψ ($V \cap \Gamma = \psi(I)$).

(2) (défini par une fonction implicite) : il existe $f:V\to\mathbb{R}$ de classe C^k tel que $\overrightarrow{\text{grad}}f(M_0)\neq\vec{0}$ et $V\cap\Gamma=\{M\in V, f(M)=0\}$

(3) (défini par une équation cartésienne) : quitte à échanger x et y, il existe I voisinage de x_0, J voisinage de y_0 et $\varphi:I\to J$ de classe C^k tels que $V\cap\Gamma=\{(x,\varphi(x)),x\in I\}$

De plus :

Si dans la représentation (1), on a $M_0=\varphi(t_0)$, la droite passant par M_0 dirigée par $\vec{\psi}'(t_0)\neq\vec{0}$ est indépendante du choix de ψ. Elle est égale à la droite passant par M_0 et normale à $\overrightarrow{\text{grad}}f(M_0)$ ou encore à la droite passant par M_0 de pente $m=\varphi'(t_0)$.

Définition :

Cette droite s'appelle tangente en M_0 à Γ.

Démonstration :

$(3)\Rightarrow(1)$: en posant $\psi(t)=(t,\varphi(t))$,

φ est de classe C^k et $\forall x\in I, \vec{\psi}'(x)=(1,\varphi'(x))\neq\vec{0}$

Donc ψ est régulière.

$(2)\Rightarrow(3)$: On peut appliquer le théorème des fonctions implicites :

Si $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$, il s'applique

Sinon, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\neq 0$ (car $\overrightarrow{\text{grad}}f(M_0)\neq\vec{0}$), donc en échangeant x et y, on trouve $\varphi:J\to I$ de classe C^k, $V=I\times J$ voisinage de M_0 tel que

$\forall(x,y)\in V,(x,y)\in\Gamma\Leftrightarrow x=\varphi(y)$

$(1)\Rightarrow(3)$:

Soit $\psi:I\to\mathbb{R}^2$ de support $V\cap\Gamma$, de classe C^k, régulier et t_0 tel que $\psi(t_0)=M_0=(x_0,y_0)$. On a $\vec{\psi}'(t_0)\neq\vec{0}$

On note $\psi:\begin{array}{l}I\to\mathbb{R}^2\\ t\mapsto(\alpha(t),\beta(t))\end{array}$.

Si $\alpha'(t_0)\neq 0$, alors $\alpha:I\to K$ où K est un intervalle de $\mathbb{R}$, et quitte à restreindre I, on peut supposer que α est un C^k–difféomorphisme de I dans $K=\alpha(I)$

Posons $\varphi:\begin{array}{l}K\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\beta\circ\alpha^{-1}(x)\end{array}$

Alors $V\cap\Gamma$ est le graphe de φ.

En effet, pour $(x,y)\in V$,

$(x,y)\in\Gamma$ si et seulement si il existe $t\in I$ tel que $(x,y)=\psi(t)=(\alpha(t),\beta(t))$

c'est-à-dire si et seulement si il existe $t\in I$ tel que $\alpha(t)=x$ et $\underbrace{\beta(\alpha^{-1}(x))}_{\varphi(x)}=y$

Si $\alpha'(t_0)=0$, alors $\beta'(t_0)\neq 0$ et on fait la même chose en échangeant x et y.

$(3)\Rightarrow(2)$: on pose $f(x,y)=y-\varphi(x)$

Exemples : coniques à centre :

$\lambda x^2+\mu y^2=1$ où $\lambda\mu\neq 0$

On pose $f(x,y)=\lambda x^2+\mu y^2-1$

Alors *f* est de classe C^1 et $\overrightarrow{\text{grad}}f(x,y)=\begin{pmatrix}2\lambda x\\ 2\mu y\end{pmatrix}$

Problème :

$\overrightarrow{\text{grad}}f$ s'annule t'il sur Γ d'équation $f(x,y)=0$?

On doit avoir $\begin{cases}2\lambda x=0\\ 2\mu y=0\\ \lambda x^2+\mu y^2=1\end{cases}$, système qui n'a pas de solution.

Donc Γ est une courbe, et tout point de Γ est régulier.

La tangente à Γ en $(x_0,y_0)\in\Gamma$ a pour équation $<\overrightarrow{M_0M},\overrightarrow{\text{grad}}f(M_0)>=0$

C'est-à-dire $2\lambda.x(x-x_0)+2\mu.y(y-y_0)=0$, ou $\lambda x_0x+\mu y_0y=1$

Plus généralement, si $q(x,y)$ est une forme quadratique non dégénérée, et si Γ est la conique d'équation $q(x,y)=c$ ($c\neq 0$), alors la tangente en $(x_0,y_0)\in\Gamma$ à Γ a pour équation $\varphi(M_0M)=c$ où φ est la forme polaire de *q*.

Exercice :

Courbes de niveaux de $f(x,y)=x^3+y^3-3axy$ ($a>0$) :

On pose $\Gamma_k=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x,y)=k\}$

- Pour quels $k\in\mathbb{R}$ Γ_k est-elle singulière (admet-elle un point singulier) ?
- Tracer les Γ_k singulières
- Allure des Γ_k

(1) Γ_k est la courbe d'équation $f_k(x,y)=0$ où $f_k=f-k$

Comme $\overrightarrow{\text{grad}}f_k=\overrightarrow{\text{grad}}f$, Γ_k est singulière si et seulement si $\overrightarrow{\text{grad}}f$ s'annule sur Γ_k. On a $\overrightarrow{\text{grad}}f(x,y)=\begin{pmatrix}3x^2-3ay\\ 3y^2-3ax\end{pmatrix}$

Donc $\overrightarrow{\text{grad}}f(x,y)=0\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=ay\\ y^2=ax\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2=ay\\ y^4=a^2x^2=a^3y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=y=0\\ \text{ou } y=a, x=\pm a\end{cases}$

La réciproque est fausse si $x=-a$, donc on ne garde que $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}a\\a\end{pmatrix}$

Remarque : ce sont les points critiques de *f*.

La matrice hessienne de *f* en $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ est $H(0,0)=\begin{pmatrix}0 & -3a\\ -3a & 0\end{pmatrix}$

Donc $\det(H(0,0))<0$; on a donc un col.

$H(a,a)=\begin{pmatrix}6a & -3a\\ -3a & 6a\end{pmatrix}$, donc $\det(H(a,a))>0$, $\text{Tr}(H(a,a))>0$; on a un minimum local strict.

On a $(0,0)\in\Gamma_0$; le point $(0,0)$ est un point double de Γ_0 car $(0,0)$ est un col de *f*.

On a $(a,a)\in\Gamma_{-a^3}$; le point (a,a) est un point isolé de Γ_{-a^3} car (a,a) est un minimum local strict de *f*.

(2) On a $\Gamma_0 : x^3 + y^3 = 3axy$

En coordonnées polaires, $\rho^3(\cos^3\theta + \sin^3\theta) = 3a\rho^2 \sin\theta.\cos\theta$

Donc $\rho = 0$ ou $\rho(\cos^3\theta + \sin^3\theta) = 3a\sin\theta.\cos\theta$

Si $\cos^3\theta + \sin^3\theta = 0$, c'est-à-dire $\cos\theta = -\sin\theta$, alors $0 = -3a\cos^2\theta$, c'est-à-dire $\cos\theta = \sin\theta = 0$, ce qui est impossible.

Donc Γ_0 est la courbe d'équation polaire

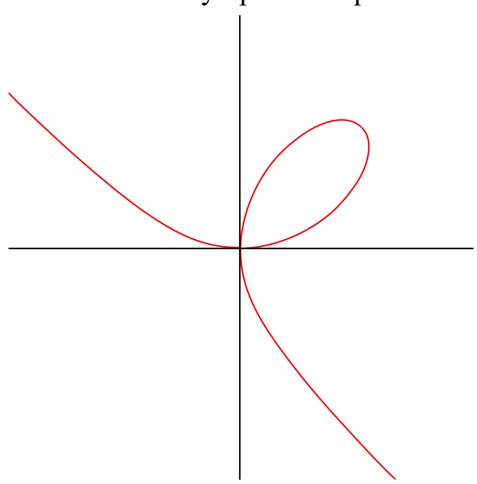
$$\rho = \frac{3a\cos\theta\sin\theta}{\cos^3\theta + \sin^3\theta} = \frac{3a\cos\theta\sin\theta}{(\cos\theta + \sin\theta)(1 - \sin\theta\cos\theta)}$$

(Le cas $\rho = 0$ est pris en compte avec $\theta = 0$)

On a une branche infinie pour $\theta \to \theta_0 = \frac{\pi}{4}$:

$$\begin{aligned}
\lim_{\theta\to\theta_0} \rho\sin(\theta - \theta_0) &= \lim_{\theta\to\theta_0} \rho(\sin\theta\cos\theta_0 - \cos\theta\sin\theta_0) \\
&= \lim_{\theta\to\theta_0} \frac{\rho(\cos\theta + \sin\theta)}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{3a\cos\theta_0\sin\theta_0}{1 - \cos\theta_0\sin\theta_0}\frac{1}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{-3a/2}{1 + \frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{-a}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

On a donc une asymptote d'équation $x + y = -a$.



(La courbe s'appelle une strophoïde droite)

On a $\Gamma_{-a^3} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y + a = 0\} \cup \{(a, a)\}$

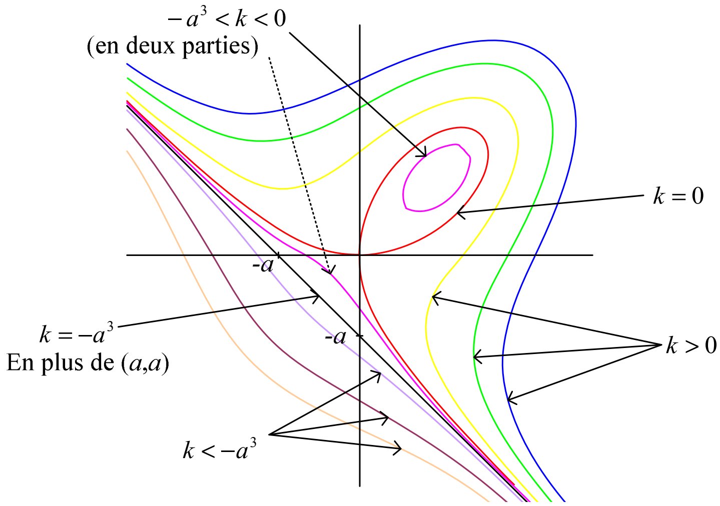
Γ_{-a^3} est en effet la courbe d'équation $x^3 + y^3 - 3axy + a^3 = 0$,

et on a $X^3 + Y^3 - 3aXY + a^3 = (X + Y + a)\left((X - \frac{1}{2}Y - \frac{1}{2}a)^2 + \frac{3}{4}(Y - a)^2\right)$

Donc

$$\begin{aligned}
x^3 + y^3 - 3axy + a^3 = 0 &\Leftrightarrow x + y + a = 0 \text{ ou } (x - \tfrac{1}{2}y - \tfrac{1}{2}a)^2 + \tfrac{3}{4}(y - a)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow x + y + a = 0 \text{ ou } \begin{cases} x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}a = 0 \\ \frac{3}{4}(y - a)^2 = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow x + y + a = 0 \text{ ou } x = y = a
\end{aligned}$$

On obtient après étude pour l'allure des autres lignes de niveau :



C) Image d'une courbe par un difféomorphisme

Théorème :

Soit Γ une courbe de classe C^k d'un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, $\phi : U \to U' \subset \mathbb{R}^2$ un C^k-difféomorphisme.

Alors $\phi(\Gamma)$ est une courbe de U'.

- Si M_0 est un point régulier de Γ, $\phi(M_0)$ en est un de $\phi(\Gamma)$ et la tangente à $\phi(\Gamma)$ en $\phi(M_0)$ est dirigée par $d\phi_{M_0}(\vec{u})$ où $\vec{u}$ dirige la tangente à Γ en M_0
- M_0 est stationnaire si et seulement si $\phi(M_0)$ l'est.

Corollaire :

Si ϕ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$, la tangente à $\phi(\Gamma)$ en $\phi(M_0)$ est l'image par ϕ de la tangente à Γ en M_0

Démonstration :

Il existe un paramétrage local de Γ, $t \in I \mapsto \psi(t)$ où $\psi(t_0) = M_0$, ψ étant de classe C^k régulier, $\vec{\psi}'(t_0) \neq \vec{0}$.

Alors $\phi(\Gamma)$ admet au voisinage de M_0 le paramétrage $t \in I \mapsto \phi \circ \psi(M_0)$, de classe C^k et $\overrightarrow{\phi \circ \psi}'(t_0) = d\phi_{(\psi(t_0))}(\vec{\psi}'(t_0)) \neq 0$

Les résultats en découlent.

Exercice :

Trouver les bijections affines de $\mathbb{R}^2$ qui conservent l'astroïde

$$\mathrm{A} : \begin{cases} x(t) = a\cos^3 t \\ y(t) = a\sin^3 t \end{cases} = \psi(t), t \in \mathbb{R}$$

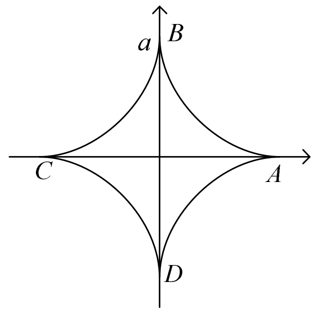
Etude de A :

- ψ est périodique, donc on peut faire l'étude sur $[\alpha, \alpha + 2\pi]$
- $\psi(t+\pi)$ est symétrique de $\psi(t)$ par rapport à O ; on peut faire l'étude sur $[\alpha, \alpha + \pi]$ puis faire une symétrie par rapport à O.

- $\psi(-t)$ est symétrique de $\psi(t)$ par rapport à l'axe Ox. On fait donc l'étude sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, puis une symétrie d'axe Ox.
- $\psi(\frac{\pi}{2}-t)$ est symétrique de $\psi(t)$ par rapport à la bissectrice. On fait donc l'étude sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

$\forall t\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right], x'(t)=-3a\cos^2 t\sin t, y'(t)=3a\sin^2 t\cos t, m(t)=-\tan t$

	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
x'	0	$-$	0
x	a	$\searrow$	0
y	0	$\nearrow$	a
y'	0	$+$	0
m	0	$-$	∞



On a deux points stationnaires $M(0)$, $M(\frac{\pi}{2})$ (sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$)

Soit $f:\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}^2$ affine bijective qui conserve l'astroïde, c'est-à-dire telle que $f(\mathrm{A})=\mathrm{A}$. *f* est de classe C^∞ est conserve A, donc *f* permute les points stationnaires.

Comme *f* est affine, elle conserve *O*, isobarycentre de *A*, *B*, *C*, *D*.

1er cas : si $f(A)=A$, comme $f(O)=O$, on a $f(C)=C$

Soit $f(B)=B$, et donc $f=\mathrm{Id}$

En effet, comme $f(O)=O$, *f* s'exprime sous la forme

$(x,y)\mapsto(ax+by,cx+dy)$

Comme $f(A)=A$, on a $(a,c)=(1,0)$

Comme $f(B)=B$, on a $(b,d)=(0,1)$

Soit $f(B)=D$, et donc $g=s_{x'x}\circ f$ conserve A et fixe *A*, *B*, *O*.

Donc $g=\mathrm{Id}$ et $f=s_{xx'}$.

Etude générale :

On note *G* l'ensemble des applications affines bijectives qui conservent A.

Alors *G* est un sous-groupe du groupe des transformations affines.

Par ailleurs, on dispose de quatre isométries directes $\mathrm{rot}(O,\frac{k\pi}{2})=r_k$ ($k=0..3$)

Si $f\in G$, il existe $k\in[\![0,3]\!]$ tel que $r_k(A)=f(A)$

Donc $g=r_k^{-1}\circ f\in G$ vérifie $g(A)=A$

Donc soit $g=\mathrm{Id}$, et donc $f=r_k$

soit $g=s_{xx'}$ et $f=r_k\circ s_{xx'}$, réflexion.

Donc $\#G=8$ et $G=\{r_k,k=0..3\}\cup\{r_k\circ s_k,k=0..3\}$

II Courbes et surfaces de l'espace

A) Surfaces d'équation cartésienne $z=f(x,y)$ où f est de classe C^k, $k\geq 1$.

- Plan tangent :

Théorème :

Pour tout $M_0=(x_0,y_0,z_0)$ de la surface Σ d'équation $z=f(x,y)$, il existe un unique plan tangent à Σ, c'est le plan $T_\Sigma(M_0)$ d'équation

$$z=z_0+\frac{\partial f}{\partial x}(M_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(M_0)(y-y_0)$$

Démonstration :

Admis

- Position du plan tangent : étude à l'ordre 2.

Théorème :

On suppose que f est de classe C^k, $k\geq 2$ et on pose $r=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)$, $t=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)$, $s=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0)$

Si $rt-s^2=\det\begin{pmatrix} r & s \\ s & t\end{pmatrix}>0$, la surface Σ reste d'un même côté du plan tangent au voisinage de M_0

Si $rt-s^2<0$, Σ coupe le plan tangent dans tout voisinage de M_0 ; dans tout voisinage de M_0, Σ a des points de part et d'autre de $T_\Sigma(M_0)$.

Définition :

Si $rt-s^2>0$, on dit que M_0 est elliptique

Si $rt-s^2<0$, on dit que M_0 est hyperbolique

Si $rt-s^2=0$, on dit que M_0 est dégénéré.

Démonstration :

Considérons $\varphi(x,y)=f(x,y)-l(x,y)$ où $l(x,y)=0$ est l'équation du plan tangent $T_\Sigma(M_0)$

Ici, $l(x,y)=\underbrace{z_0}_{f(x_0,y_0)}+(x-x_0)\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+(y-y_0)\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$

Signe de $\varphi(x,y)$:

On a $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x_0,y_0)=\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(x_0,y_0)=0$, $\varphi(x_0,y_0)=0$

Donc (x_0,y_0) est un point critique de φ.

Comme la matrice hessienne de φ est la même que celle de f,

Si $rt-s^2>0$, $\varphi(x_0,y_0)$ sera un extremum local strict donc φ est de signe constant au voisinage de (x_0,y_0).

Si $rt-s^2<0$, $\varphi(x_0,y_0)$ sera un col donc φ change de signe dans tout voisinage de M_0.

Remarque :

Lorsque le point est elliptique, M_0 est un point isolé de $\Sigma \cap T_\Sigma(M_0)$

S'il est hyperbolique, c'en est un point double.

- Exemples fondamentaux :

Paraboloïdes :

- (PE) : $z = x^2 + y^2$; on a $f(x,y) = x^2 + y^2$, $H(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Donc tout point de (PE) est elliptique
- (PH) : $z = x^2 - y^2$; on a $f(x,y) = x^2 - y^2$, $H(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Donc tout point est hyperbolique.

Pour tout $M_0 \in (\mathrm{PH})$, $(\mathrm{PH}) \cap T_{(\mathrm{PH})}(M_0)$ est une réunion de deux droites : ce sont les génératrices de (PH) qui passent par M_0. (déjà vu)

B) Nappes paramétrées de classe C^k, $k \geq 1$.

- Définition :

C'est une application de classe C^k $\psi : \begin{array}{c} U \to \mathbb{R}^3 \\ (u,v) \mapsto \psi(u,v) \end{array}$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Le support de ψ est $\Sigma = \psi(U)$

- Point régulier, stationnaire :

(u,v) est dit régulier lorsque $\mathrm{rg}\left(\frac{\partial \vec{\psi}}{\partial u}(u,v), \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial v}(u,v)\right) = 2$, c'est-à-dire si $\frac{\partial \vec{\psi}}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial v}(u,v) \neq \vec{0}$

Il est dit stationnaire dans le cas contraire.

- Plan tangent :

Théorème :

Soit $M_0 = \psi(u_0, v_0)$ un point du support Σ de ψ.

Si M_0 est régulier, il existe un voisinage V de (u_0, v_0) dans U tel que, quitte à permuter les coordonnées (x,y,z), $\psi(V)$ soit une surface C^k d'équation cartésienne $z = f(x,y)$.

Dans ce cas, le plan tangent à $\psi(V)$ en M_0 est dirigé par $\left(\frac{\partial \vec{\psi}}{\partial u}(u_0,v_0), \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial v}(u_0,v_0)\right)$, c'est-à-dire normal à $\frac{\partial \vec{\psi}}{\partial u}(u_0,v_0) \wedge \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial v}(u_0,v_0) \neq \vec{0}$

Démonstration :

Il suffit d'appliquer le théorème d'inversion local à $(u,v) \mapsto (\psi_1(u,v), \psi_2(u,v))$ où $\vec{\psi}(u,v) = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$

C) Surface d'équation $F(x,y,z)=0$ où F est de classe C^k, $k\geq 1$.

- Point régulier, point singulier :

Un point $M_0=(x_0,y_0,z_0)$ de Σ d'équation $F(x,y,z)=0$ est régulier si $\overrightarrow{\text{grad}}F(M_0)\neq\vec{0}$, singulier si $\overrightarrow{\text{grad}}F(M_0)=\vec{0}$

- Plan tangent en un point régulier :

Théorème :

Si M_0 est régulier, quitte à permuter les coordonnées, au voisinage de M_0, Σ a une équation de la forme $z=f(x,y)$ et le plan tangent à Σ en M_0 est le plan normal à $\overrightarrow{\text{grad}}F(M_0)$ passant par M_0.

D) Courbes sur une surface

- Théorème :

Soit Σ une surface, $\Gamma\subset\Sigma$ une courbe et $M_0\in\Gamma\subset\Sigma$

Si M_0 est régulier à la fois sur Σ et sur Γ, alors la tangente $T_\Gamma(M_0)$ à Γ en M_0 est incluse dans le plan tangent $T_\Sigma(M_0)$ à Σ en M_0

Démonstration :

On peut supposer que Σ a pour équation $F(x,y,z)=0$, où F est de classe C^k, et que Γ est paramétrée par $\psi:t\mapsto(x(t),y(t),z(t))$ aussi de classe C^k (au voisinage de M_0)

On a $\Gamma\subset\Sigma$, donc $\forall t\in I, F(\psi(t))=0$ et en dérivant $<\overrightarrow{\text{grad}}F(\psi(t)),\vec{\psi}'(t)>=0$

Donc en M_0, $<\overrightarrow{\text{grad}}F(M_0),\vec{\psi}'(0)>=0$.

Donc la direction de $T_\Gamma(M_0)$ est incluse dans celle de $T_\Sigma(M_0)$. Comme les deux passent par M_0, on a bien $T_\Gamma(M_0)\subset T_\Sigma(M_0)$.

Application :

(1) Si une droite D est incluse dans une surface Σ, alors pour tout $M_0\in D$, $D\subset T_\Sigma(M_0)$ car $D=T_D(M_0)$

(2) Cylindre de révolution : le plan tangent en M_0 au cylindre (C_y) est défini par la génératrice verticale D de M_0 et la tangente en M_0 au cercle C passant par M_0 inclus dans (C_y).

(3) Cas des nappes paramétrées $\psi:U\to\mathbb{R}^3$

Pour $u_0\in U$ fixé, $v\mapsto\psi(u_0,v)$ est un arc tracé sur la nappe. Sa tangente en (u_0,v_0) est dirigée par $\dfrac{\partial\psi}{\partial v}(u_0,v_0)$ (idem pour v_0)

- Intersection de deux surfaces :

Théorème :

Soient Σ_1, Σ_2 deux surfaces de classe $C^k, k\geq 1$ on suppose que $\Sigma_1\cap\Sigma_2\neq\varnothing$, et on prend $M_0\in\Sigma_1\cap\Sigma_2$. On suppose de plus que les plans tangents en M_0 $T_{\Sigma_1}(M_0)$ et $T_{\Sigma_2}(M_0)$ sont distincts.

Alors il existe un voisinage U de M_0 dans $\mathbb{R}^3$ tel que $U\cap(\Sigma_1\cap\Sigma_2)=\Gamma$ soit un arc de classe C^k régulier.

La tangente à Γ en M_0 est alors $T_\Gamma(M_0)=T_{\Sigma_1}(M_0)\cap T_{\Sigma_2}(M_0)$

Démonstration :

On peut supposer qu'au voisinage de M_0, Σ_1 et Σ_2 ont pour équation

$\Sigma_1 : f(x,y,z)=0$ et $\Sigma_2 : g(x,y,z)=0$

Ainsi, $\overrightarrow{\text{grad}}f(M_0)\wedge\overrightarrow{\text{grad}}g(M_0)\neq\vec{0}$, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\frac{\partial g}{\partial y}(M_0)-\frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\frac{\partial g}{\partial x}(M_0)\\ \vdots\end{pmatrix}\neq\vec{0}$$

On suppose par exemple que $\frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\frac{\partial g}{\partial y}(M_0)-\frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\frac{\partial g}{\partial x}(M_0)\neq 0$

Alors $H:(x,y,z)\mapsto(f(x,y,z),g(x,y,z),z)$ a pour matrice jacobienne

$$\text{Jac}(H)_{M_0}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z}\\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\in GL_3(\mathbb{R})$$

Donc le théorème d'inversion locale s'applique.

Au voisinage de M_0, les égalités $\begin{cases}u=f(x,y,z)\\ v=g(x,y,z)\\ w=z\end{cases}$ s'inversent en $\begin{cases}x=\alpha(u,v,w)\\ y=\beta(u,v,w)\\ z=w\end{cases}$

Donc $(x,y,z)\in\Gamma$ si et seulement si $u=v=0$ c'est-à-dire $\begin{cases}x=\alpha(0,0,z)\\ y=\beta(0,0,z)\end{cases}$

Donc Γ est paramétrée par $\begin{cases}x=\varphi(z)\\ y=\psi(z)\end{cases}$ où $\varphi:z\mapsto\alpha(0,0,z)$, $\psi:z\mapsto\beta(0,0,z)$ sont de classe C^k.

Exemple : Conoïde de Plücker :

On note K la surface paramétrée en coordonnées cylindriques par $z=a\sin(2\theta)$ ($a>0$)

- Quels sont les points stationnaires ? équation du plan tangent en un point régulier
- Equation cartésienne $f(x,y,z)=0$ de K.
- Etude de $K\cap T_K(M)$

(1) Soit $\psi:(r,\theta)\mapsto(r\cos\theta,r\sin\theta,a\sin 2\theta)$

On a $\dfrac{\partial\psi}{\partial r}(r,\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\\ 0\end{pmatrix}$, $\dfrac{\partial\psi}{\partial\theta}(r,\theta)=\begin{pmatrix}-r\sin\theta\\ r\cos\theta\\ 2a\cos\theta\end{pmatrix}$

On pose $\vec{n}=\dfrac{\partial\psi}{\partial r}\wedge\dfrac{\partial\psi}{\partial\theta}=\begin{pmatrix}2a\cos2\theta\sin\theta\\ -2a\cos\theta\cos2\theta\\ r\end{pmatrix}$

Alors $\vec{n}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}r=0\\ \cos2\theta=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}r=0\\ \theta=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\end{cases}$

On a donc deux points stationnaires $\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \pm a\end{pmatrix}$

Equation du plan tangent en un point non stationnaire $M_0=\psi(r_0,\theta_0)$:

$ar_0\sin\theta_0\cos\theta_0(x-r_0\cos\theta_0)-2a\cos2\theta_0\cos\theta_0(y-r_0\sin\theta_0)+2r_0(z-a\sin\theta_0)=0$

Ou $2a\cos2\theta_0(x\sin\theta_0-y\cos\theta_0)+r_0z=ar_0\sin2\theta_0$

(Remarque : le plan est horizontal si et seulement si $2a\cos2\theta_0=0$)

(2) Equation cartésienne :

Soit $M=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On a les équivalences :

$$M=(x,y,z)\in K\Leftrightarrow\exists(r,\theta)\in U,\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\\ z=a\sin2\theta\end{cases}\qquad (U=\mathbb{R}_+\times]-\pi,\pi])$$

$$\Leftrightarrow\exists(r,\theta)\in U,\begin{cases}r=\sqrt{x^2+y^2}\\ (x^2+y^2)z=2axy\\ x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\\ z=a\sin2\theta\end{cases}$$

Ainsi, $M=(x,y,z)\in K\Rightarrow(x^2+y^2)z=2axy$

Réciproquement, si $(x^2+y^2)z=2axy$

On pose $r=\sqrt{x^2+y^2}$

Si $r\neq0$, on note θ réel tel que $e^{i\theta}=\dfrac{x+iy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Alors $z=\dfrac{2ar^2\cos\theta\sin\theta}{r^2}=a\sin2\theta$, donc $M\in K$

Si $r=0$, c'est-à-dire $x=y=0$,

Il existe $\theta\in\mathbb{R}$ tel que $z=a\sin2\theta$ si et seulement si $|z|\leq a$.

Ainsi, $M=(x,y,z)\in K\Leftrightarrow\begin{cases}(x^2+y^2)z=2axy\\ |z|\leq a\text{ si }x=y=0\end{cases}$

Remarque :

Le conoïde K et la surface Σ d'équation $(x^2+y^2)z=2axy$ vérifient $\Sigma=K\cap(z'z)$ ($=K\cap\delta$ où $\delta=\{(0,0,z),|z|\geq a\}$)

(3) Intersection de $T_K(M_0)$ et K :

K est représenté par $(r,\theta)\mapsto\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = a\sin 2\theta \end{cases}$

Et $T_K(M_0): 2a\cos 2\theta_0(x\sin\theta_0 - y\cos\theta_0) + r_0 z = ar_0\sin 2\theta_0$

Ainsi,

$$\begin{aligned} M(r,\theta)\in T_K(M_0)\cap K &\Leftrightarrow 2a\cos 2\theta_0 r\sin(\theta_0-\theta) + r_0 a\sin 2\theta = ar_0\sin 2\theta_0 \\ &\Leftrightarrow r\cos 2\theta_0\sin(\theta_0-\theta) = r_0\sin(\theta-\theta_0)\cos(\theta+\theta_0) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(\theta-\theta_0)=0 & (1) \\ \text{ou } r\cos 2\theta_0 = r_0\cos(\theta+\theta_0) & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

L'équation (1) est celle de la droite $D:\begin{cases} z = a\sin 2\theta_0 \\ y = r\sin\theta_0 \\ x = r\cos\theta_0 \end{cases},\ r\in\mathbb{R}$

L'équation (2) est celle d'une ellipse passant par O si $\cos 2\theta_0 \neq 0$

Conclusion :

Si $\cos 2\theta_0 \neq 0$, $T_K(M_0)\cap K$ est la réunion de la génératrice de M_0 et d'une ellipse passant par M_0.