



Chapitre 22 : Equations et systèmes différentiels non linéaires

On considère un espace de Banach E .

I Généralités

A) Equations résolues du premier ordre

Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times E$, $f : U \rightarrow E$ continue.

On considère l'équation différentielle du premier ordre $(E) : x'(t) = f(t, x(t))$

Lorsque $f(t, x(t))$ ne dépend que de x , l'équation est dite autonome.

Une équation autonome du premier ordre s'écrit donc $(E_{\text{au}}) : x'(t) = F(x(t))$ où $F : \Omega \rightarrow E$ est continue sur Ω ouvert de E .

En posant $U = \mathbb{R} \times \Omega$, ouvert de $\mathbb{R} \times E$, et $f(t, x) = F(x)$, on retrouve la forme générale.

B) Solution de (E)

On appelle solution de (E) un couple (I, φ) où I est un intervalle de \mathbb{R} et $\varphi : I \rightarrow E$ de classe C^1 telle que $\forall t \in I, (t, \varphi(t)) \in U$ et $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$.

C) Condition initiale et problème de Cauchy

Une condition initiale pour (E) , c'est un couple $(t_0, x_0) \in U$

Résoudre le problème de Cauchy $C_{(E), (t_0, x_0)} : \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$, c'est trouver les

solutions (I, φ) de (E) telles que $t_0 \in I$ et $\varphi(t_0) = x_0$

D) Ordre de prolongement sur les solutions et solutions maximales

Soient (I, φ) , (J, ψ) deux solutions de (E) . On dit que (I, φ) prolonge (J, ψ) lorsque $J \subset I$ et $\varphi|_J = \psi$.

Proposition :

La relation de prolongement est une relation d'ordre partielle sur l'ensemble des solutions de (E) .

Attention : il est possible que deux solutions de (E) ne soient pas comparables.

Définition :

On appelle solution maximale de (E) une solution (I, φ) maximale pour l'ordre de prolongement, c'est-à-dire que si (J, ψ) prolonge (I, φ) , alors $I = J$ et $\varphi = \psi$.

E) Premières propriétés

- Invariance par translation de la variable de l'ensemble des solutions de $(E_{\text{au}}) : x'(t) = F(x(t))$:

Théorème :

Soient $F : \Omega \subset E \rightarrow E$ continue et (I, φ) une solution de (E_{au}) .

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, si on pose $I_a = I + a$ et $\forall t \in I_a, \varphi_a(t) = \varphi(t - a)$, alors (I_a, φ_a) est solution de (E_{au}) .

De plus, (I, φ) est maximale si et seulement si (I_a, φ_a) l'est.

Démonstration :

Si (I, φ) est solution, alors $\forall t \in I, \varphi(t) \in \Omega$, donc $\forall t \in I_a, \varphi_a(t) \in \Omega$

De plus, φ_a est de classe C^1 , et $\forall t \in I_a, \varphi_a'(t) = \varphi'(t - a) = F(\varphi(t - a)) = F(\varphi_a(t))$

Caractéristique maximale :

Si (J, ψ) prolonge (I, φ) , alors (J_a, ψ_a) prolonge (I_a, φ_a) .

Inversement, si (J, ψ) prolonge (I_a, φ_a) , alors (J_{-a}, ψ_{-a}) prolonge (I, φ) .

- Equation intégrale associée à un problème de Cauchy :

Proposition :

Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times E$, $f : U \rightarrow E$ continue et $(t_0, x_0) \in U$.

On considère l'équation différentielle $(E) : x'(t) = f(t, x(t))$.

Soit $\varphi : I \rightarrow E$, continue sur l'intervalle I telle que $\forall t \in I, (t, \varphi(t)) \in U$.

On suppose que $t_0 \in I$.

Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) φ est de classe C^1 et (I, φ) est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} (E) : x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

- (2) $\forall t \in I, \varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds$

Démonstration :

C'est la même chose que pour les équations linéaires.

- Théorème de prolongement en une borne :

Théorème :

Soient $f : U \subset \mathbb{R} \times E \rightarrow E$ continue, $(E) : x'(t) = f(t, x(t))$ et (I, φ) une solution de (E) .

On suppose que $I =]a, b[$ où $b \in \mathbb{R}$, et que $\varphi(t)$ a une limite $l \in E$ en b , vérifiant $(b, l) \in U$.

Alors le couple (J, ψ) où $J = I \cup \{b\}$ et $\forall t \in J, \psi(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{si } t \neq b \\ l & \text{si } t = b \end{cases}$ est solution de (E) , qui prolonge (I, φ) .

En particulier, (I, φ) n'est pas maximale

Remarque :

On a la même chose pour l'autre borne.

Démonstration :

Déjà, ψ est continue sur J , et de classe C^1 sur I .

De plus, comme $(b, l) \in U$, on a $\lim_{t \rightarrow b^-} f(t, \varphi(t)) = f(b, l)$ par continuité de f en (b, l) . Or, $\forall t \in I, \psi'(t) = \varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) = f(t, \psi(t))$

Donc $\lim_{t \rightarrow b^-} \psi'(t) = f(b, l) = f(b, \psi(b))$

Donc ψ est dérivable en b et $\psi'(b) = f(b, \psi(b))$. Donc (J, ψ) est solution de (E) .

Remarque :

Le théorème de prolongement C^1 est valable pour un espace de Banach, même de dimension infinie.

F) Cas des systèmes différentiels

- De deux équations :

On considère le système $(S) : \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), y(t)) \\ y'(t) = g(t, x(t), y(t)) \end{cases}$ où $f, g : U \rightarrow E$ sont continues sur l'ouvert U de $f, g : U \rightarrow E$.

Si on pose $F = E^2$, $h : U \subset \mathbb{R} \times F \rightarrow F$ et $(E) : v'(t) = h(t, v(t))$
 $(t, x, y) \mapsto (f(t, x, y), g(t, x, y))$

avec $v : I \rightarrow F$, alors F muni d'une topologie produit est un espace de Banach, $t \mapsto (x(t), y(t))$ et (E) est équivalent à (S) .

Une condition initiale de (S) est un triplet $(t_0, x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times E \times E$ (c'est-à-dire une condition initiale de (E)). On définit aussi le problème de Cauchy

$$C_{(S), (t_0, x_0, y_0)} : \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), y(t)) \\ y'(t) = g(t, x(t), y(t)) \\ (x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0) \end{cases}$$

- Cas de $p \geq 2$ équations : analogue.
- Equation d'ordre $r \geq 2$:

On considère l'équation $(E_r) : x^{(r)}(t) = f(t, x(t), \dots, x^{(r-1)}(t))$ où $f : U \rightarrow E$ est continue sur U , ouvert de $\mathbb{R} \times E^r$.

On appelle solution de (E_r) un couple (I, φ) où I est un intervalle, et $\varphi : I \rightarrow E$ est de classe C^r telle que $\forall t \in I, (t, \varphi(t), \dots, \varphi^{(r-1)}(t)) \in U$ et $\varphi^{(r)}(t) = f(t, \varphi(t), \dots, \varphi^{(r-1)}(t))$

On peut ramener (E_r) à un système de r équations d'ordre 1 :

Pour $r = 2$ par exemple, $(E_2) : x''(t) = f(t, x(t), x'(t))$

$$\text{Alors } (E_2) \Leftrightarrow (S) : \begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = f(t, x(t), y(t)) \end{cases} \Leftrightarrow (E) : v'(t) = h(t, v(t))$$

Où $h : U \subset \mathbb{R} \times E^2 \rightarrow E^2$
 $(t, x, y) \mapsto (y, f(t, x, y))$

Une condition initiale de (E_r) est $(t_0, x_0, \dots, x_{r-1}) \in U$.

Le problème de Cauchy associé est $\begin{cases} (E_r) \\ \forall i \leq r-1, x^{(i)}(t_0) = x_i \end{cases}$

G) Exemples

- Equations différentielles linéaires :

On considère l'équation $L : x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$, où $b : I_0 \rightarrow E$ et $a : I_0 \rightarrow L_C(E)$ sont continues.

Théorème de Cauchy pour les équations différentielles linéaires :

Sous les hypothèses précédente,

- (1) Tout problème de Cauchy admet une solution maximale
- (2) Son domaine de définition est I_0
- (3) Toute solution est restriction de cette solution maximale.

Démonstration :

(1) D'après le théorème de Cauchy déjà vu, pour tout $(t_0, x_0) \in I_0 \rightarrow E$, il existe $\varphi : I_0 \rightarrow E$ de classe C^1 unique telle que $\forall t \in I_0, \varphi'(t) = a(t)\varphi(t) + b(t)$ et $\varphi(t_0) = x_0$.

Alors (I_0, φ) est solution maximale :

Si (I, ψ) est une autre solution maximale, alors $I \subset I_0$, et $\varphi|_I = \psi$ car φ et ψ sont solution sur I du même problème de Cauchy.

Comme ψ est maximale et (I_0, φ) la prolonge, on a $(I_0, \varphi) = (I, \psi)$

(3) Si (J, ψ) est une autre solution comme ci-dessus, on voit que $\psi = \varphi|_J$

- $(E) : x'(t) = 1 + x(t)^2$ ($E = \mathbb{R}$)

Equation autonome :

Soit (I, φ) une solution de (E) , $\varphi(t_0) = x_0$

$$\text{Alors } \forall t \in I, \frac{\varphi'(t)}{1 + \varphi(t)^2} = 1$$

$$\text{Donc } \forall t \in I, [\text{Arctan} \varphi(t)]_{t_0}^t = t - t_0$$

$$\text{Donc } \forall t \in I, \text{Arctan} \varphi(t) = \text{Arctan} x_0 + t - t_0 \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

$$\text{Donc } I \subset I_0 =]\text{Arctan} x_0 - t_0 - \frac{\pi}{2}, \text{Arctan} x_0 - t_0 + \frac{\pi}{2}[$$

$$\text{Et } \forall t \in I, \varphi(t) = \tan(\text{Arctan} x_0 - t_0 + t)$$

Synthèse :

Si on pose $\forall t \in I_0, \varphi_0(t) = \tan(\text{Arctan} x_0 - t_0 + t)$, alors (I_0, φ_0) est l'unique solution maximale du problème de Cauchy. Toute autre solution en est restriction.

Remarque :

On voit ici que pour une équation non linéaire, la taille des solutions maximales n'est pas prévisible.

- $(E) : x'(t) = x(t)^{1/3}$ (Autonome, $E = \mathbb{R}$)

On va montrer que tout problème de Cauchy a une infinité de solutions.

Le problème $C : \begin{cases} x'(t) = x(t)^{1/3} \\ x(0) = 0 \end{cases}$ admet comme solution $(\mathbb{R}, 0)$

On pose pour $a > 0$ et $b < 0$, $\varphi_{a,b} : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [b, a] \\ (\frac{2}{3})^{3/2} (t-a)^{3/2} & \text{si } t \geq a \\ (\frac{2}{3})^{3/2} (b-t)^{3/2} & \text{si } t \leq b \end{cases}$. Alors :

- (1) $\varphi_{a,b}$ est de classe C^1 (on a bien un raccordement C^1 en a et b)

(2) $\varphi_{a,b}$ est solution de (E) :

Pour $t > a$, $\varphi'_{a,b}(t) = (\frac{2}{3})^{1/2} (t-a)^{1/2} = (\varphi_{a,b}(t))^{1/3}$

Pour d'autres problèmes de Cauchy, on translate le long de Ox.

Remarque :

Contrairement à ce qui se passe pour les équations linéaires, la continuité de f ne suffit pas pour assurer l'unicité.

II Théorème de Cauchy–Lipschitz pour les équations d'ordre 1

A) Le théorème de Cauchy–Lipschitz local

(Totalement inutile en pratique)

Théorème :

Soit E un espace de Banach, U un ouvert de $\mathbb{R} \times E$, $f : U \rightarrow E$ de classe C^1 .

Pour toute condition initiale $(t_0, x_0) \in U$, le problème de Cauchy

$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ admet une et une seule solution locale, c'est-à-dire qu'il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que $]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[\times B_o(x_0, \beta) \subset U$, et $\varphi_0 :]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[\rightarrow B_o(x_0, \beta)$ de classe C^1 telle que $\begin{cases} \forall t \in]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[, \varphi_0'(t) = f(t, \varphi_0(t)) \\ \varphi_0(t_0) = x_0 \end{cases}$

Et pour toute autre solution (I, φ) , $\varphi_{0/I \cap I_0} = \varphi_{I \cap I_0}$ où $I_0 =]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$

Remarque :

Le théorème est vrai si on remplace « f est de classe C^1 » par « f est continue et localement lipschitzienne en x », c'est-à-dire que pour tout $(t_0, x_0) \in U$, il existe un voisinage $]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[\times B_f(x_0, \beta) \subset U$ de (t_0, x_0) et une constante $K > 0$ tels que

$$\forall (t, x, y) \in]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[\times B_f(x_0, \beta) \times B_f(x_0, \beta), \|f(t, x) - f(t, y)\| \leq K \|x - y\|$$

L'hypothèse est moins forte puisque si f est de classe C^1 , elle est automatiquement continue et localement lipschitzienne.

Démonstration du théorème (avec l'hypothèse moins forte) :

Comme f est continue et localement lipschitzienne, quitte à diminuer le voisinage de (t_0, x_0) , on peut trouver α, β, M, K strictement positifs tels que :

(1) $]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[\times B_f(x_0, \beta) \subset U$

(2) $\forall (t, x) \in]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[\times B_f(x_0, \beta), \|f(t, x)\| \leq M$

(3) $\forall (t, x, y) \in]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[\times B_f(x_0, \beta) \times B_f(x_0, \beta), \|f(t, x) - f(t, y)\| \leq K \|x - y\|$

(4) $\alpha M \leq \beta$

(5) $\alpha K < 1$

On considère l'espace métrique X des fonctions continues de $]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$ dans $B_f(x_0, \beta)$ muni de la distance d définie par la norme infinie, et l'application Φ qui à

$h \in X$ associe g définie par $g(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, h(s)) ds$.

Alors :

X est un espace métrique complet, car c'est une partie fermée de l'espace de Banach des fonctions continues de $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ dans E muni de la norme $\| \cdot \|_\infty$.

Pour $h \in X$, on a :

- $g = \Phi(h)$ est bien définie et continue sur $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ (d'après 1)

- $g \in X$ (d'après (2) et (4))

De plus, pour $h_1, h_2 \in X$ et $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, en notant $\varepsilon(t)$ le signe de $t - t_0$, on a

$$\begin{aligned} \|\Phi(h_1)(t) - \Phi(h_2)(t)\|_E &= \left\| \int_{t_0}^t (f(s, h_1(s)) - f(s, h_2(s))) ds \right\|_E \\ &\leq \varepsilon(t) \int_{t_0}^t K \|h_1(s) - h_2(s)\|_E ds \leq \alpha K d(h_1, h_2) \end{aligned}$$

Donc $\|\Phi(h_1) - \Phi(h_2)\|_\infty \leq \alpha K d(h_1, h_2)$, c'est-à-dire que Φ est αK -lipschitzienne, donc contractante.

Ainsi, on peut appliquer le théorème du point fixe à Φ : il existe un unique point fixe φ qui est l'unique solution sur $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ de l'équation intégrale associée à $C_{(E), (t_0, x_0)}$. Ce problème a donc une unique solution maximale dans $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ et, plus généralement, dans tout sous-intervalle de $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ contenant t_0 .

D'où le résultat.

Remarque :

La condition « localement lipschitzienne » est celle qui entraîne l'unicité de la solution.

Pour l'existence, en dimension finie, on a le théorème de Cauchy-Arzelà :

Si f est continue, tout problème de Cauchy admet au moins une solution (locale)

B) Théorème de Cauchy-Lipschitz global

Théorème :

On suppose $f : U \rightarrow E$ de classe C^1 sur U ouvert de $\mathbb{R} \times E$. Soit $(t_0, x_0) \in U$.

Alors :

- (1) Le problème de Cauchy $\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ a une unique solution maximale (I, φ) .
- (2) I est un intervalle ouvert (voisinage de t_0)
- (3) Toute autre solution du problème de Cauchy est restriction de (I, φ)

Remarque :

L'énoncé est vrai avec f seulement continue et localement lipschitzienne en x .

Démonstration :

(1) et (3) découlent du théorème de Cauchy-Lipschitz local.

(2) est conséquence du théorème de prolongement en une borne.

Remarque :

Le théorème local est maintenant conséquence de ce théorème, et ne sert plus à rien.

III Application à des équations remarquables

A) Equations scalaires à variables séparables

Pour une équation de la forme $(E) : x'(t) = a(t) \times b(x(t))$, $a : I_0 \rightarrow \mathbb{R}$, $b : J_0 \rightarrow \mathbb{R}$.

Ici, $U = I_0 \times J_0$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$
 $(t, x) \mapsto a(t) \times b(x)$

On suppose a et b C^1 pour appliquer le théorème de Cauchy–Lipschitz (global)

Remarque :

Il suffit que a soit continue et b de classe C^1 ou localement lipschitzienne.

Résolution du problème de Cauchy $\begin{cases} x'(t) = a(t) \times b(x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

- Si $b(x_0) = 0$, la solution maximale est (I_0, x_0) , fonction constante.
- Si $b(x_0) \neq 0$, alors la solution maximale (I, φ) vérifie $\forall t \in I, b(\varphi(t)) \neq 0$.

En effet, si il existe $t_1 \in I$ tel que $b(\varphi(t_1)) = 0$, alors (I, φ) et (I_0, x_1) , où $x_1 = \varphi(t_1)$ fonction constante, sont deux solutions maximales du problème de Cauchy

$\begin{cases} (E) \\ x(t_1) = x_1 \end{cases}$. Donc $I = I_0$ et $\varphi = x_1$.

Donc b ne s'annule pas sur $\varphi(I) = J$ intervalle.

Soit G une primitive de $1/b$ sur J .

On a alors $\forall t \in I, \frac{\varphi'(t)}{b(\varphi(t))} = a(t)$

Donc $G(\varphi(t)) - G(\varphi(t_0)) = \int_{t_0}^t a(s) ds = A(t)$

De plus, G est un C^1 -difféomorphisme (G' ne s'annule pas).

Donc $\varphi(t) = G^{-1}(G(x_0) + A(t))$ est solution du problème de Cauchy sur I .

Morale :

Pour une équation à variables séparables $x'(t) = a(t)b(x(t))$ où a, b sont de classe C^1 , il y a dichotomie entre les deux cas :

- $\forall t \in I, b(x(t)) = 0$
- $\forall t \in I, b(x(t)) \neq 0$

B) Equations scalaires d'ordre 2

On considère $(E) : x''(t) = f(t, x(t), x'(t))$: correspond à toute la mécanique du point en physique.

Théorème :

Si f est de classe C^1 sur l'ouvert $U \subset \mathbb{R}^3$, à valeur réelles, alors pour toute condition initiale $(t_0, x_0, v_0) \in U$, le problème $\begin{cases} (E) \\ x(t_0) = x_0 \\ v(t_0) = v_0 \end{cases}$ a une unique solution maximale, et toute solution est restriction de cette solution (c'est-à-dire que pour une position et une vitesse initiales données, il n'y a qu'une seule trajectoire possible..!)

Démonstration :

Il suffit de se ramener au système d'ordre 1 associé :

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = f(t, x(t), y(t)) \end{cases}$$

C) Equations et systèmes autonomes

- Théorème de Cauchy–Lipschitz :

On considère une équation différentielle autonome $(E_{\text{au}}) : x'(t) = F(x(t))$

Si $F : \Omega \subset E \rightarrow E$ est de classe C^1 , alors pour toute condition initiale $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \Omega$, le problème de Cauchy $C_{(E_{\text{au}}), (t_0, x_0)}$ a une unique solution maximale et toute solution est restriction de cette solution.

Si (I, φ) est la solution maximale de $C_{(E_{\text{au}}), (0, x_0)}$, alors la solution maximale de $C_{(E_{\text{au}}), (t_0, x_0)}$ est (I_{t_0}, φ_{t_0})

Remarque :

Pour une équation autonome, il suffit donc de résoudre $C_{(E_{\text{au}}), (0, x_0)}$.

- Trajectoire :

On appelle trajectoire de $(E_{\text{au}}) : x'(t) = F(x(t))$ une courbe paramétrée $I \rightarrow E$ où $t \mapsto \varphi(t)$

(I, φ) est solution maximale.

Proposition :

Si $F : \Omega \subset E \rightarrow E$ est de classe C^1 , alors l'ensemble des trajectoires de E_{au} forme une partition de $\mathbb{R} \times \Omega$; autrement dit, deux trajectoires différentes sont disjointes.

Démonstration :

C'est toujours le théorème de Cauchy–Lipschitz.

Trajectoires particulières :

(1) Les « points » : correspondent aux solutions maximales constantes.

Mais $x(t) = x_0$ est solution de (E_{au}) si et seulement si $F(x_0) = 0$

Un tel point x_0 s'appelle position d'équilibre (en physique) ou point critique (en math)

(2) Les trajectoires fermées, c'est-à-dire telles que φ n'est pas injective.

Proposition (Hors programme) :

Si F est de classe C^1 , les solutions maximales (I, φ) sont :

- Soit injectives
- Soit périodiques, c'est-à-dire que $I = \mathbb{R}$ et il existe $T > 0$ tel que φ est T -périodique.

Démonstration :

Supposons que la solution maximale (I, φ) ne soit pas injective.

Alors il existe $a, b \in I$ distincts tels que $\varphi(a) = \varphi(b)$ et on peut supposer $a < b$.

On a alors, en posant $T = a - b > 0$, $(I, \varphi) = (I_T, \varphi_T)$.

En effet, ce sont deux solutions maximales du même problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = F(x(t)) \\ x(b) = x_0 = \varphi(b) \end{cases}, \text{ car, pour } (I_T, \varphi_T) \text{ (clair pour } (I, \varphi)) :$$

$$b \in I_T = I + (b - a) \text{ car } a \in I,$$

$$\varphi_T(b) = \varphi(b - T) = \varphi(a) = \varphi(b)$$

Donc $I = I + T$. Donc $I = \mathbb{R}$ et $\varphi_T = \varphi$ donc φ est T -périodique.

- Equations autonomes scalaires $x'(t) = F(x(t))$, où $F : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 : c'est un cas particulier d'équation à variables séparables.

Exercice :

$$\text{Résoudre } x'(t) = \sin(x(t))$$

Méthode : on utilise le théorème de Cauchy–Lipschitz pour résoudre

$$\begin{cases} x'(t) = \sin(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Remarque « géométrique » :

(1) Comme l'équation est autonome, il suffit de résoudre le problème de Cauchy en $t_0 = 0$

(2) Le théorème de Cauchy–Lipschitz s'applique car la fonction sinus est de classe C^1 ; on a donc une unique solution maximale (I, φ)

(3) Si (I, φ) est solution maximale, alors $(I, \varphi + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$, aussi.

(4) Si (I, φ) est solution maximale, alors $(I, -\varphi)$ aussi.

Avec (3) et (4) : on peut supposer que $x_0 \in [0, \pi]$

Si $x_0 = 0$, la solution maximale est $(\mathbb{R}, 0)$

Si $x_0 = \pi$, la solution maximale est (\mathbb{R}, π)

Si $x_0 \in]0, \pi[$, alors $t \mapsto \sin(\varphi(t))$ ne s'annule pas sur I .

$$\text{Donc } \forall t \in I, \frac{\varphi'(t)}{\sin(\varphi(t))} = 1$$

$$\text{Sur }]0, \pi[, \int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left(\tan \frac{x}{2}\right)$$

On intègre sur $[t_0, t]$:

$$\ln\left(\frac{\tan \frac{\varphi(t)}{2}}{\tan \frac{x_0}{2}}\right) = t - t_0$$

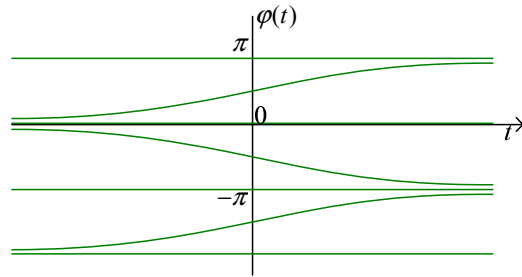
$$\text{Donc } \tan \frac{\varphi(t)}{2} = \tan\left(\frac{x_0}{2}\right) e^{t-t_0}$$

$$\text{Or, } \forall t \in I, 0 < \varphi(t) < \pi$$

(Car s'il existe t tel que $\varphi(t) \geq \pi$, alors il existe t_1 tel que $\varphi(t_1) = \pi$ donc par unicité de la solution, $\varphi = \pi$; de même pour 0)

$$\text{Donc } \forall t \in I, \frac{\varphi(t)}{2} \in]0, \frac{\pi}{2}[$$

$$\text{Donc } \forall t \in I, \varphi(t) = 2 \operatorname{Arctan}\left(\tan\left(\frac{x_0}{2}\right) e^{t-t_0}\right)$$

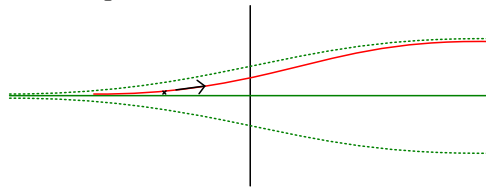


Remarque :

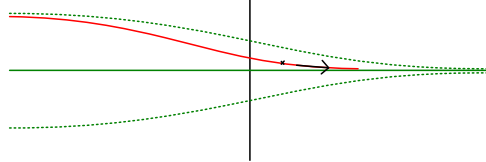
Stabilité des équilibres :

Les équilibres sont les conditions initiales pour lesquelles $x_0 = n\pi, n \in \mathbb{Z}$

Si n est pair, l'équilibre est instable : un petit écart à l'équilibre fera tendre $\varphi(t)$ vers $n\pi \pm \pi$ quand t tend vers $+\infty$:



Si n est impair, l'équilibre est stable :



• Cas des systèmes autonomes d'ordre 2 scalaires :

On considère le système $(S) : \begin{cases} x'(t) = F(x(t), y(t)) \\ y'(t) = G(x(t), y(t)) \end{cases}$, où $F, G : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues.

Théorème :

Si F et G sont de classe C^1 , tout problème de Cauchy a une unique solution maximale (I, φ) et les autres solutions en sont restriction.

Champ de vecteurs associé :

On note (\vec{i}, \vec{j}) la base canonique de \mathbb{R}^2 , $\vec{V} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $M=(x,y) \mapsto \vec{V}(M)=F(x,y)\vec{i}+G(x,y)\vec{j}$

La représentation graphique de \vec{V} permet une construction approchée par la méthode d'Euler point par point des trajectoires et détermine l'allure des trajectoires.

Exemple : Lottka-Volterra (proies-prédateurs)

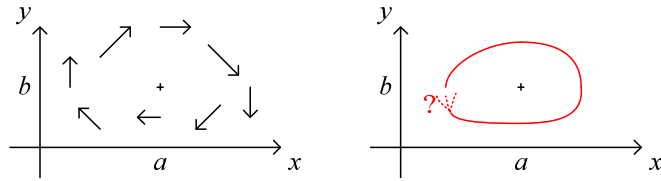
On considère le système $(S) : \begin{cases} x'(t) = x(t)(y(t) - b) \\ y'(t) = y(t)(a - x(t)) \end{cases}$ où a, b sont positifs.

$y(t)$: effectif des lapins à l'instant t .

$x(t)$: effectif des renards à l'instant t .

On a $\vec{V}(x, y) = x(y - b)\vec{i} + y(a - x)\vec{j}$

Points d'équilibre : $(0,0)$ et (a,b)



Remarque :

On a une intégrale première, c'est-à-dire une fonction $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, constante sur la trajectoire.

En effet, $H(x, y) = y + x - b \ln y - a \ln x$ convient.

« Méthode » pour trouver H :

$$\text{On a avec les équations } dt = \frac{dx}{x(y-b)}, dt = \frac{dy}{y(a-x)}.$$

$$\text{On doit résoudre } \frac{dy}{y(a-x)} = \frac{dx}{x(y-b)}, \text{ c'est-à-dire } \frac{(y-b)dy}{y} = \frac{(a-x)dx}{x}$$

$$\text{Donc } y - b \ln y = a \ln x - x + \text{cte}$$

En effet, si $(I, (x, y))$ est une solution telle que x et y sont positives, alors

$$\begin{aligned} \frac{dH(x(t), y(t))}{dt} &= x'(t) \frac{\partial H}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t) \frac{\partial H}{\partial y}(x(t), y(t)) \\ &= x(y-b)(1 - \frac{a}{x}) + y(a-x)(1 - \frac{b}{y}) = 0 \end{aligned}$$

Etude rigoureuse :

$$\text{Pour une condition initiale } \begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

1^{er} cas : $x_0 = 0$: la solution maximale est (\mathbb{R}, φ) où $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t) = (0, y_0 e^{at})$

2^{ème} cas : $y_0 = 0$: la solution maximale est (\mathbb{R}, φ) où $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t) = (x_0 e^{-bt}, 0)$

3^{ème} cas : si $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$:

Soit (I, φ) la solution maximale, $\varphi(t) = (x(t), y(t))$

On a $\forall t \in I, x(t) > 0, y(t) > 0$

(Si x s'annule en un point, par unicité de la solution, on trouvera que x est nul)

On a donc $\forall t \in I, H(x(t), y(t)) = \text{cte} = H(x_0, y_0)$

Or, $C_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^{*2}, x + y - a \ln x - b \ln y = k\}$ est compact. En effet :

Il est borné :

On pose $\alpha(x) = x - a \ln x$, $\beta(y) = y - b \ln y$

Alors $\alpha'(x) = 1 - \frac{a}{x}$

0	a	$+\infty$
α'	-	+
α	$+\infty$	$+\infty$

$\alpha(a)$

Supposons C_k non borné.

Soit alors $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C_k^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \rightarrow +\infty$ ou $y_n \rightarrow +\infty$; supposons par exemple que c'est $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Alors $\alpha(x_n) \rightarrow +\infty$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha(x_n) + \beta(y_n) \geq \alpha(x_n) + \beta(b) \rightarrow +\infty$, ce qui est impossible car $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha(x_n) + \beta(y_n) = k$

C_k est fermé : $H : \mathbb{R}_+^{*2} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue donc $C_k = H^{-1}\{k\}$ est un fermé de \mathbb{R}_+^{*2}

Attention : ce n'est pas forcément pour autant un fermé de \mathbb{R}^2 (\mathbb{R}_+^{*2} est un fermé de lui-même mais pas de \mathbb{R}^2 par exemple)

Soit $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C_k^{\mathbb{N}}$ tendant vers $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$

Alors $\bar{x} > 0$ et $\bar{y} > 0$

(Car si $x_n \rightarrow 0$, alors $\alpha(x_n) \rightarrow +\infty$ et $\alpha(x_n) + \beta(y_n) \rightarrow +\infty$)

Comme H est continue en $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}_+^{*2}$, on a $H(\bar{x}, \bar{y}) = k$

Donc C_k est fermé, donc compact.

Ainsi, la solution maximale est définie sur \mathbb{R} , c'est-à-dire $I = \mathbb{R}$.

En effet, supposons que $I =]\mu, \nu[$ où ν est fini (I est ouvert d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz)

Comme la trajectoire est incluse dans C_k compact, x et y sont bornées sur I .

Donc x' et y' aussi. Comme ν est fini, x' et y' sont donc intégrables sur $]0, \nu[$, donc $x(t) = x_0 + \int_0^t x'(s) ds$ a une limite finie l quand t tend vers ν . De même, y a une limite m .

D'après le théorème de prolongement en une borne, en posant $x(\nu) = l$, $y(\nu) = m$, on obtient une solution de S sur $[\mu, \nu]$ ce qui contredit le caractère maximal de (I, φ) .

On a la même chose pour u .

Donc $I = \mathbb{R}$

Montrons maintenant que la solution maximale est périodique :

On a $\forall t \in \mathbb{R}, \alpha(x(t)) + \beta(y(t)) = k$

On suppose que $x_0 \in]0, a[$, $y_0 \in]0, b[$

Alors il existe $t_1 > 0$ tel que $y(t_1) > b$

En effet, sinon on a $\forall t > 0, y(t) \in]0, b[$, donc $x'(t) = x(t)(y(t) - b) < 0$

Donc x est décroissant, et $\forall t \geq 0, x(t) < a$, donc $\forall t \geq 0, y'(t) = y(t)(a - x(t)) > 0$

Donc x est décroissant minoré, y croissant majoré. Donc $x(t)$, $y(t)$ tendent vers des limites finies $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ quand t tend vers $+\infty$.

Donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} x'(t) = \tilde{\alpha}(\tilde{\beta} - b)$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} y'(t) = \tilde{\beta}(a - \tilde{\alpha})$.

Comme x et x' ont des limites finies, celle de x' est donc nulle, et pareil pour y' .

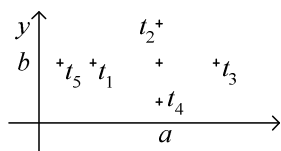
Donc $\tilde{\alpha}(\tilde{\beta} - b) = 0$ et $\tilde{\beta}(a - \tilde{\alpha}) = 0$

Mais $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \in C_k$, donc $\tilde{\alpha} > 0$, $\tilde{\beta} > 0$. Donc $\tilde{\alpha} = a$ et $\tilde{\beta} = b$

Mais alors $k = \alpha(a) + \beta(b) = \alpha(\tilde{\alpha}) + \beta(\tilde{\beta})$

Or, $\alpha(a) = \min_{x>0} \alpha(x)$ atteint seulement en $x = a$, $\beta(b) = \min_{y>0} \beta(y)$, atteint uniquement en $y = b$. Donc C_k est réduit à (a, b) , ce qui est impossible car $(x_0, y_0) \in C_k$.

De même, il existe $t_2 > t_1$ tel que $x(t_2) = a, \dots$



On a ainsi $t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < t_5$

Or, $\forall t, \alpha(x(t)) + \beta(y(t)) = k$

En particulier, $\alpha(x(t_j)) = k - \beta(b)$ pour $j = 1, 3, 5$

Or, l'équation $\alpha(x) = \lambda$ a au plus deux solutions.

Donc deux des nombres $x(t_1), x(t_3), x(t_5)$ sont égaux.

Si par exemple $x(t_1) = x(t_5)$, alors $\varphi(t_1) = \varphi(t_5)$ donc φ est $t_5 - t_1$ périodique.

• Systèmes autonomes linéaires :

Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

On considère le système $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.

Le théorème de Cauchy–Lipschitz s'applique.

Allure des trajectoires :

- Si $A = PDP^{-1}$ est diagonalisable, en posant $Y = P^{-1}X$, on est ramené à $Y' = DY$

Avec $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, c'est-à-dire si $Y = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, alors $\begin{cases} x_1'(t) = \lambda x_1(t) \\ y_1'(t) = \mu y_1(t) \end{cases}$

Donc $x_1(t) = Ae^{\lambda t}$, $y_1(t) = Be^{\mu t}$

Si $A = B = 0$, la trajectoire est réduite à un point.

Si $A = 0$ et $B \neq 0$ ou $A \neq 0$ et $B = 0$: on a une $\frac{1}{2}$ droite ouverte.

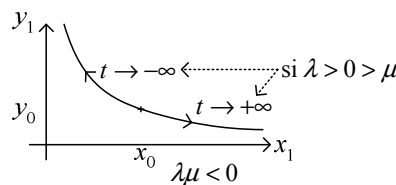
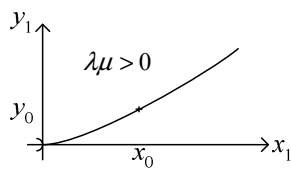
Si $A \neq 0$ et $B \neq 0$:

On a $\left(\frac{x_1(t)}{A}\right)^\mu = \left(\frac{y_1(t)}{B}\right)^\lambda$

Si $\lambda\mu > 0$: on a une courbe de type parabolique $y_1 = Cx_1^{\mu/\lambda}$, $\mu/\lambda > 0$

Si $\lambda\mu < 0$: on a une courbe de type hyperbolique $y_1 = Cx_1^{\mu/\lambda}$, $\mu/\lambda < 0$

Si $\mu = 0$: on a $y_1 = \text{cte}$, donc une demi-droite.



- Si A est trigonalisable, $A = PTP^{-1}$ où $T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ (χ_A est scindé, non à racines

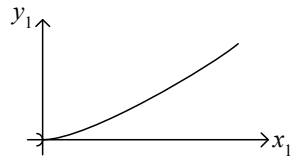
simple donc a une racine double)

$\begin{cases} x_1'(t) = \lambda x_1(t) + y_1(t) \\ y_1'(t) = \lambda y_1(t) \end{cases}$

Donc $\begin{cases} y_1(t) = \alpha e^{\lambda t} \\ x_1(t) = (\alpha t + \beta) e^{\lambda t} \end{cases}$

Si $\alpha = 0$, on a une demi-droite.

Sinon, $\lambda t = \ln \frac{y_1(t)}{\alpha}$ donc $x_1 = \left(\alpha \ln \frac{y_1}{\alpha} + \beta \right) \frac{y_1}{\alpha} = (\ln y_1 + c) y_1$



- Si A a deux valeurs propres $\lambda, \bar{\lambda}$:

On peut écrire $\lambda = re^{i\alpha}$ où $\alpha \in]0, \pi[$, $r > 0$;

Alors A est semblable à $r \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = R$ (car A et R sont \mathbb{C} -diagonalisables

avec les mêmes valeurs propres, donc sont \mathbb{C} -semblables, donc \mathbb{R} -semblables)

$$\begin{cases} x_1'(t) = r(\cos \alpha \cdot x_1(t) - \sin \alpha \cdot y_1(t)) \\ y_1'(t) = r(\sin \alpha \cdot x_1(t) + \cos \alpha \cdot y_1(t)) \end{cases}$$

On pose $z(t) = x_1(t) + iy_1(t)$.

Alors z est de classe C^1 , et

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, z'(t) &= x_1'(t) + iy_1'(t) = r(\cos \alpha + r \cdot i \sin \alpha)z(t) \\ &= re^{i\alpha} x_1(t) + iy_1(t)re^{i\alpha} = z \cdot re^{i\alpha} \end{aligned}$$

Donc $\forall t \in \mathbb{R}, z(t) = Ce^{r \cdot e^{i\alpha} t}$ où $C = z(0)$

Pour $C = 1$:

$$z = e^{r \cdot t \cos \alpha} e^{ir \cdot t \sin \alpha}$$

Pour $r \neq 0$, en polaires, $\begin{cases} \rho(t) = e^{r \cdot t \cos \alpha} \\ \theta(t) = r \cdot t \sin \alpha \end{cases}$

Donc si $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, $\rho = e^{\theta \cdot \cotan \alpha}$ et si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\rho = 1$.

On a donc une spirale logarithmique si $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$.

Remarque :

Si les valeurs propres de A sont imaginaires pures, les trajectoires sont des ellipses.

- Equation autonome d'ordre 2 scalaire $x''(t) = F(x(t), x'(t))$ où $F : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 .

On pose $y(t) = x'(t)$; on est ramené à $\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = F(x(t), y(t)) \end{cases}$

IV Exercices et compléments

A) Sur le domaine de définition des solutions maximales

Soit E un espace de Banach, $f : \mathbb{R} \times E \rightarrow E$ de classe C^1 ; on considère l'équation $(E) : x'(t) = f(t, x(t))$. Alors on a les résultats suivants :

(1) Si f est bornée, toute solution maximale est définie sur \mathbb{R} .

En effet :

Comme f est de classe C^1 , d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, toute solution maximale est définie sur un intervalle ouvert $I =]a, b[$.

Supposons que b est fini.

Soit $t_0 \in I$. On a $\forall t \geq t_0, \varphi(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t \varphi'(t) dt$

Or, φ' est bornée sur $[t_0, b[$. Donc φ' est intégrable car b est fini. Donc φ admet une limite finie l en b .

En prolongeant φ en $\tilde{\varphi}$ par $\tilde{\varphi}(b) = l$, on a une solution $\tilde{\varphi}$ qui prolonge φ car $\lim_{t \rightarrow b^-} \varphi'(t) = \lim_{t \rightarrow b^-} f(t, \varphi(t)) = f(b, l)$, ce qui est impossible car φ est maximale.

Donc b est infini. De même pour a .

Donc la solution maximale est définie sur \mathbb{R} .

(2) Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et bornée. Alors toute solution maximale de $x''(t) = f(t, x(t), x'(t))$ est définie sur \mathbb{R} .

En effet :

D'après le théorème de Cauchy–Lipschitz, si (I, φ) est une solution maximale, alors $I =]a, b[$, ouvert.

On suppose que b est fini.

Soit alors $t_0 \in]a, b[$.

Alors φ'' est bornée sur $[t_0, b[$, donc intégrable.

Donc φ' a une limite finie l en b .

Comme b est fini, φ' est intégrable sur $[t_0, b[$, donc φ a une limite finie l' en b .

Donc $\psi = (\varphi, \varphi')$ est prolongeable de façon C^1 en $\tilde{\psi}$ sur $]a, b[$, avec $\tilde{\psi}(b) = (l, l') = (\tilde{\varphi}(b), \tilde{\varphi}'(b))$

Puis $\lim_{t \rightarrow b} \tilde{\varphi}(t) = f(b, l, l') = f(b, \psi(b))$ et $\tilde{\varphi}$ prolonge φ , ce qui est impossible.

Donc $b = +\infty$, et de même $a = -\infty$.

(3) On considère le système (S) : $\begin{cases} x'(t) = t - x(t)^2 \\ x(0) = x_0 > 0 \end{cases}$. Alors la solution maximale est définie sur $]a, +\infty[$ où $a \in \mathbb{R}$.

En effet :

Soit $f(t, x) = t - x^2$. Ainsi, f est de classe C^1 .

Ainsi, pour une solution maximale (I, x) , on a $I =]a, b[$.

Supposons que $a = -\infty$.

Alors $\forall t \leq -1, x'(t) \leq -1 - x(t)^2$

Donc $x(t)^2 + 1 \leq -x'(t)$

Donc $1 \leq \frac{-x'(t)}{1 + x(t)^2}$.

Soit $t_0 \in I$ tel que $t_0 < -1$.

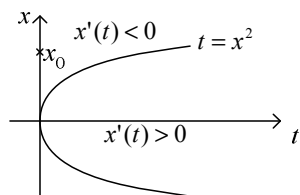
On intègre sur $[t, t_0]$: $t_0 - t \leq -[\text{Arctan } x(t)]_{t_0}^0 = \text{Arctan } x(t) - \text{Arctan } x(t_0) \leq \pi$

Donc $t \geq t_0 - \pi$. Donc $I \subset [t_0 - \pi, +\infty[$ ce qui est absurde vue l'hypothèse.

Donc a est infini.

Supposons que b est fini.

(i) Alors il existe $t_1 \geq 0$ tel que $x'(t_1) = 0$



(C'est-à-dire que la courbe va couper la parabole)

En effet, sinon comme $x'(0) < 0$, on a $\forall t \geq 0, x'(t) < 0$.

Donc x est décroissante sur $[0, b[$.

Comme $\forall t \geq 0, x(t) > \sqrt{t} \geq 0$ (car $\forall t \geq 0, x'(t) < 0$), x est bornée sur $[0, b[$:
 $\forall t \geq 0, x(0) \geq x(t) \geq 0$

Donc $t \mapsto x'(t) = t - x^2$ est bornée sur $[0, b[$, donc x' est intégrable et x admet une limite finie en b , ce qui est impossible car sinon x serait prolongeable en b .

Donc il existe $t_1 \geq 0$ tel que $x'(t_1) = 0$

(ii) Alors $\forall t \in]t_1, b[, x'(t) > 0$. En effet, supposons que $X = \{t > t_1, x'(t) = 0\}$ n'est pas vide. Il admet alors une borne inférieure t_2 .

On a alors $t_2 > t_1$. En effet :

Posons $\varphi(t) = x(t) - \sqrt{t}$

Alors $\varphi'(t_1) = \underbrace{x'(t_1)}_{=0} - \frac{1}{2\sqrt{t_1}} < 0$

Comme $\varphi(t_1) = 0$, il existe donc $\alpha > 0$ tel que $\forall t \in]t_1, t_1 + \alpha[, \varphi(t) < 0$

Donc $t_2 \geq t_1 + \alpha$

Ainsi, $X = \{t \geq t_1 + \alpha, x'(t) = 0\}$. C'est donc un fermé, minoré non vide. Il admet donc un plus petit élément, qu'on note encore t_2 .

Ainsi, $\varphi'(t_2) = \underbrace{x'(t_2)}_{=0} - \frac{1}{2\sqrt{t_2}} < 0$. Or, $\varphi(t_2) = 0$

Donc il existe $\alpha' > 0$ tel que $t_2 - \alpha' > t_1$ et $\varphi(t_2 - \alpha') > 0$. Ainsi, $x'(t_2 - \alpha') < 0$, ce qui est impossible par définition de t_2 (car alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $t_1 < t < t_2$ tel que $x'(t) = 0$)

Donc $\forall t \in]t_1, b[, x'(t) > 0$

Donc $\forall t > t_1, x^2(t) < t < b$

Donc x est bornée, donc x' aussi, et x est prolongeable en b , ce qui est impossible.

Donc b est infini.

B) Barrières (HP)

Dans l'exemple précédent, $\alpha : t \mapsto \sqrt{t}$ vérifie sur $]0, +\infty[$:

$$\forall t > 0, \alpha'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} > f(t, \alpha(t)) = 0$$

Alors pour toute solution (I, φ) où $I \cap]0, +\infty[=]0, b[$, s'il existe $t_0 > 0$ tel que $\varphi(t_0) \leq \alpha(t_0)$, alors $\forall t > t_0, \varphi(t) < \alpha(t)$

Plus généralement :

Soit U un ouvert de \mathbb{R}^2 , $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et $(E) : x'(t) = f(t, x(t))$.

Une fonction $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 est appelée barrière supérieure (resp. barrière inférieure) lorsque

$$\forall t \in I, (t, \alpha(t)) \in U \text{ et } \alpha'(t) > f(t, \alpha(t)) \text{ (resp. } \alpha'(t) < f(t, \alpha(t)))$$

Remarque :

La définition donnée est en fait celle de barrière stricte ; la notion usuelle de barrière correspond à l'inégalité large.

Proposition :

Soit (I, φ) une solution de $(E) : x'(t) = f(t, x(t))$. Si α est une barrière supérieure sur I telle que $\varphi(t_0) \leq \alpha(t_0)$ pour $t_0 \in I$, alors $\forall t > t_0, \varphi(t) < \alpha(t)$.

Démonstration :

Supposons qu'il existe $t > t_0$ tel que $\varphi(t) \geq \alpha(t)$.

On pose alors $X = \{t > t_0, \varphi(t) = \alpha(t)\}$

Alors X est non vide :

Si $\varphi(t_0) < \alpha(t_0)$, X n'est pas vide par hypothèse (et par continuité de $\varphi - \alpha$), et il est minoré par $t_1 > t_0$ (car au voisinage de t_0 , $\varphi(t_0) \neq \alpha(t_0)$)

Si $\varphi(t_0) = \alpha(t_0)$, on note alors $h = \alpha - \varphi$.

$$\text{Alors } \forall t \geq t_0, h'(t) = \alpha'(t) - \varphi'(t) = \alpha'(t) - f(t, \varphi(t))$$

$$\text{Et donc } h'(t_0) = \alpha'(t_0) - f(t_0, \underbrace{\varphi(t_0)}_{=\alpha(t_0)}) > 0$$

Donc h est croissante au voisinage de t_0 , et $h(t_0) = 0$

Donc il existe $a > 0$ tel que $\forall t \in]t_0, t_0 + a], h(t) > 0$.

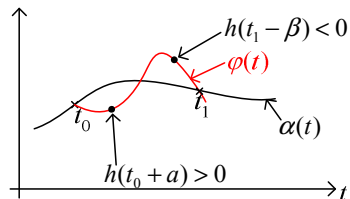
Donc $\forall t \in]t_0, t_0 + a], \varphi(t) < \alpha(t)$. Donc par continuité de $\varphi - \alpha$, X est non vide, et minoré par $t_0 + a > t_0$.

Donc dans les deux cas, X est fermé, non vide et minoré ; on note t_1 son plus petit élément : $t_1 > t_0$.

Au voisinage de t_1 , $h'(t_1) > 0$ car $\varphi(t_1) = \alpha(t_1)$.

Donc il existe $\beta > 0$ tel que $t_1 - \beta > t_0 + a$ et $h(t_1 - \beta) < 0$

Donc h s'annule sur $]t_0 + a, t_1 - \beta[$, ce qui contredit la définition de t_1 .



Exercice :

On considère l'équation $(E) : x'(t) = \cos(t) + \cos(x(t))$

(1) Toute solution maximale est définie sur \mathbb{R} car $f : (t, x) \mapsto \cos t + \cos x$ est de classe C^1 et bornée.

(2) φ est une solution maximale si et seulement si $\varphi + 2k\pi$ l'est ($k \in \mathbb{Z}$)

(3) φ est solution si et seulement si $\psi : t \mapsto \pi - \varphi(t + \pi)$ l'est.

En effet, si φ est solution, alors ψ est de classe C^1 , et :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \psi'(t) &= -\varphi'(t + \pi) = -(\cos(t + \pi) + \cos(\varphi(t + \pi))) \\ &= \cos t + \cos(\pi - \varphi(t + \pi)) = \cos t + \cos \psi(t) \end{aligned}$$

(4) Soit x une solution maximale. Montrer que s'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$x(t_0) \in [0, \pi], \text{ alors } \forall t \geq t_0, x(t) \in [0, \pi]$$

Déjà, x est de classe C^∞ sur \mathbb{R} (par récurrence)

Soit $X = \{t > t_0, x(t) = 0\}$. Supposons que X est non vide.

- Si $x(t_0) > 0$, alors X a un plus petit élément $t_1 > t_0$

Etude au voisinage de t_1 :

$$\text{On a } x'(t_1) = \cos t_1 + \underbrace{\cos(x(t_1))}_{=0} = 1 + \cos t_1 \geq 0$$

Si $t_1 \notin \pi + 2\pi\mathbb{Z}$, alors $t_1 \notin \pi + 2\pi\mathbb{Z}$, ce qui est impossible car on aurait au voisinage de t_1 un tableau de variation de la forme :

	$t_1 - \alpha$	t_1	$t_1 + \alpha$
x'		+	+
x	→ 0 →		

Et donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires x s'annulerait sur $[t_0, t_1 - \alpha]$, ce qui contredit la définition de t_1 .

Si $t_1 \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$, alors $\cos t_1 = -1$, $x'(t_1) = 0$, $x''(t_1) = 1$

On a donc le tableau de variation :

	$t_1 - \alpha$	t_1	$t_1 + \alpha$
x'''		+	+
x''	- → 0 → +		
x'	+ ↘ 0 ↗ +		
x	→ 0 →		

Et on aura donc encore une contradiction avec la définition de t_1 .

- Si $x(t_0) = 0$, alors $x'(t_0) = 1 + \cos t_0$

Si $t_0 \notin \pi + 2\pi\mathbb{Z}$, on a $x'(t_0) > 0$, donc x est croissante au voisinage de t_0 , et comme $x(t_0) = 0$, x est strictement positive au voisinage de t_0 , disons sur $]t_0, t_0 + \alpha[$.

Donc X vérifie $X \subset]t_0 + \alpha', +\infty[$. On a donc une borne inférieure $t_1 \geq t_0 + \alpha' > t_0$, et on trouvera encore une contradiction sur la définition de t_1

Si $t_0 \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$, x on aura de même une contradiction.

Donc X est vide, et $\forall t > t_0, x(t) > 0$

On fait le même raisonnement pour montrer que $\forall t > t_0, x(t) < \pi$

(5) Soit $P : a \in \mathbb{R} \mapsto P(a) = \varphi_a(2\pi)$ où φ_a est la solution maximale du problème

$$\text{de Cauchy } \begin{cases} x'(t) = \cos t + \cos(x(t)) \\ x(0) = a \end{cases}$$

Montrer que P est croissante, continue et $P([0, \pi]) \subset [0, \pi]$.

En déduire que $x'(t) = \cos t + \cos(x(t))$ a au moins une solution 2π -périodique.

- P est croissante :

Supposons qu'il existe a, b réels tels que $a > b$ et $P(a) < P(b)$.

Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [0, 2\pi]$ tel que

$$\varphi_a(c) = \varphi_b(c) = \lambda$$

Donc φ_a et φ_b sont solution du même problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = \cos t + \cos(x(t)) \\ x(c) = \lambda \end{cases}$$

Donc $\varphi_a = \varphi_b$, ce qui est impossible.

- Si $a \in [0, \pi]$, d'après (4), on a $\forall t \geq 0, \varphi_a(t) \in [0, \pi]$

Et en particulier $P(a) = \varphi_a(2\pi) \in [0, \pi]$

- Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Par définition de φ_a, φ_b , on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi_a(t) = a + \int_0^t f(s, \varphi_a(s)) ds \text{ et une formule analogue pour } \varphi_b$$

$$\text{Donc } \forall t \in \mathbb{R}, \varphi_a(t) - \varphi_b(t) = b - a + \int_0^t (f(s, \varphi_b(s)) - f(s, \varphi_a(s))) ds$$

$$\text{Pour } t \in [0, 2\pi], \text{ on a donc } |\varphi_b(t) - \varphi_a(t)| \leq |b - a| + \int_0^t |f(s, \varphi_b(s)) - f(s, \varphi_a(s))| ds$$

Or, f est 1-lipschitzienne par rapport à x car :

$\forall (t, x, y) \in \mathbb{R}^3, |f(t, x) - f(t, y)| = |\cos x - \cos y| \leq |x - y|$ (c'est l'inégalité des accroissements finis appliqué à la fonction cosinus)

$$\text{Donc } \forall t \in [0, 2\pi], |\varphi_b(t) - \varphi_a(t)| \leq |b - a| + \int_0^t |\varphi_b(s) - \varphi_a(s)| ds$$

Donc d'après le lemme de Gronwall :

$$\forall t \in [0, 2\pi], |\varphi_b(t) - \varphi_a(t)| \leq |b - a| e^{\int_0^t ds} \leq e^{2\pi} |b - a|$$

C'est-à-dire $|P(b) - P(a)| \leq e^{2\pi} |b - a|$. Donc P est lipschitzienne, donc continue.

- Ainsi, $P : [0, \pi] \rightarrow [0, \pi]$ est continue, donc admet au moins un point fixe $a_0 \in [0, \pi]$.

On note alors $\varphi = \varphi_{a_0}$.

Alors φ est solution de $x'(t) = \cos t + \cos(x(t))$, et φ est 2π -périodique.

En effet :

Considérons $\psi : t \mapsto \varphi(t + 2\pi)$.

Alors ψ est solution de l'équation différentielle, car

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \psi'(t) &= \varphi'(t + 2\pi) = \cos(t + 2\pi) + \cos(\varphi(t + 2\pi)) \\ &= \cos(t) + \cos(\psi(t)) \end{aligned}$$

Et $\varphi(0) = \psi(0)$ car $\psi(0) = \varphi(2\pi) = P(\varphi(0)) = a_0 = \varphi(0)$

Donc $\varphi = \psi$ et φ est 2π -périodique.

Remarque : la même démonstration que dans l'exercice montre que :

Si $f : \mathbb{R} \times E \rightarrow E$ est continue et lipschitzienne en x , alors :

$$(t, x) \mapsto f(t, x)$$

(1) Toute solution maximale de $(E) : x'(t) = f(t, x(t))$ est définie sur \mathbb{R} .

(2) Si on note $P_T : a \in \mathbb{R} \mapsto \varphi_a(T)$ où φ_a est solution du problème de Cauchy $C_{(E), (0, a)}$, alors P_T est continue.