Chapitre 21 : Formes différentielles de degré 1, intégrales curvilignes

I Formes différentielles de degré 1 de classe C^k, $k \in [\![0,+\infty]\!]$.

- Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On appelle forme différentielle de degré 1 de classe C^k toute application $\omega : U \to (\mathbb{R}^n)^*$ de classe C^k.
- Soit $(\varepsilon_1,\dots\varepsilon_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, $(\varepsilon_1^*,\dots\varepsilon_n^*)$ sa base duale.

Ainsi, toute application $\omega : U \to (\mathbb{R}^n)^*$ s'écrit de manière unique :

$\omega : M \in U \mapsto \sum_{j=1}^{n} P_j(M)\varepsilon_j^*$ où $P_j : U \to \mathbb{R}$ sont les fonctions coordonnées.

Proposition :

ω est une forme différentielle de classe C^k si et seulement si pour tout $j \in [\![0,n]\!]$, P_j est de classe C^k.

II Formes différentielles exactes (de degré 1)

- Théorème :

Pour toute application $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^k $(k \geq 1)$, $df : U \to (\mathbb{R}^n)^*$ est une forme différentielle de degré 1 et de classe C^{k-1}.

De plus, pour $M \in U$, on a $df_M = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(M)\varepsilon_j^*$.

Définition :

Une forme différentielle de classe C^k $\omega : U \to (\mathbb{R}^n)^*$ est dite exacte (ou totale) lorsqu'il existe $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^{k+1} telle que $\omega = df$, c'est-à-dire :

Si $\omega : M \in U \mapsto \sum_{j=1}^{n} P_j(M)\varepsilon_j^*$, alors ω est exacte si et seulement si il existe f de classe C^{k+1} telle que $\forall j \in [\![0,n]\!], P_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}$. Dans ce cas, f est appelée primitive de ω.

- Proposition :

Si U est convexe et si f, g sont deux primitives de la même forme différentielle ω sur U, alors $f - g$ est constante.

Remarque :

C'est vrai pour U connexe par arcs.

Démonstration :

Si $\omega = df = dg$, alors $\forall M \in U, d(f-g)_M = 0$

- Cas particulier et nouvelle notation :

Soit $f: \begin{array}{l}\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ (x_1,\dots x_n) \mapsto x_i\end{array}$. Alors f est de classe C^∞, et la différentielle de f est $df: \begin{array}{l}\mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)^* \\ M \mapsto df_M = f\end{array}$

En utilisant $(\varepsilon_1^*,\dots\varepsilon_n^*)$, base duale de la base canonique, on a $df = \varepsilon_i^*$, fonction constante (de $(\mathbb{R}^n)^*$)

Notation :

On pose $\varepsilon_i^* = dx_i$

Ainsi, toute forme différentielle de classe C^k s'écrit de manière unique $\omega : M \mapsto \sum_{j=1}^{n} P_j(M)dx_j$ où $P_j : U \to \mathbb{R}$ est de classe C^k.

En particulier, si $f : U \to \mathbb{R}$ est de classe C^{k+1}, on aura $df = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j$.

III Formes différentielles de degré 1 fermées, théorème de Schwarz, théorème de Poincaré

- Théorème (Schwarz) :

Soit $\omega : \begin{array}{l}U \subset \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)^* \\ M \mapsto \sum_{j=1}^{n} P_j(M)dx_j\end{array}$ une forme différentielle de classe C^k, $k \geq 1$.

Si ω est exacte, alors $\forall i, j \in [\![1,n]\!], \forall M \in U, \frac{\partial P_j}{\partial x_i}(M) = \frac{\partial P_i}{\partial x_j}(M)$

Démonstration :

Si $\omega = df$, où $f : U \to \mathbb{R}$ est de classe C^{k+1} ($k \geq 1$), alors $\forall i \in [\![1,n]\!], P_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$

Comme f est de classe C^2, on a

$$\forall M \in U, \frac{\partial P_j}{\partial x_i}(M) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(M) = \frac{\partial P_i}{\partial x_j}(M)$$

- Définition :

Une forme différentielle $\omega = \sum_{j=1}^{n} P_j dx_j$ de classe C^k ($k \geq 1$) telle que $\forall i, j \in [\![1,n]\!], \frac{\partial P_j}{\partial x_i} = \frac{\partial P_i}{\partial x_j}$ est dite fermée.

Corollaire :

Toute forme différentielle exacte est fermée.

- Exemple :

Il existe des fonctions fermées non exactes :

On pose $d\theta = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Ainsi, $d\theta = \dfrac{-y}{x^2+y^2}dx + \dfrac{x}{x^2+y^2}dy = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$

$d\theta$ est de classe C^∞ et fermée sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, mais non exacte.

En effet, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \dfrac{-(x^2+y^2)+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$

Et $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \dfrac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$

Donc $d\theta$ est fermée.

Mais $d\theta$ n'est pas exacte, car on verra que si elle l'était, l'intégrale curviligne de $d\theta$ sur le cercle unité serait nulle ce qui n'est pas le cas.

Remarque :

$d\theta$ est exacte sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ car en posant $f(x,y) = \operatorname{Arctan}\dfrac{y}{x}$, on a $d\theta = df$

- Théorème de Poincaré :

Rappel :

Une partie A de $\mathbb{R}^n$ est dite étoilée par rapport à $M_0 \in A$ si $\forall M \in A, [M_0, M] \subset A$

Proposition :

Un convexe est étoilé par rapport à chacun de ses points.

Une partie étoilée est connexe par arcs ; la réciproque est fausse.

Remarque :

$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ n'est pas étoilé mais est connexe par arcs.

Théorème (Poincaré) :

Soit U un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^n$, $\omega : U \to (\mathbb{R}^n)^*$ une forme différentielle de degré 1 et de classe C^k $(k \geq 1)$

Alors ω est exacte sur U si et seulement si elle est fermée sur U.

Démonstration :

Le sens direct est déjà vu.

Pour l'autre :

On se place dans le cas $n = 2$ (pour simplifier les notations) :

Soit $M_0 \in U$ de sorte que U soit étoilé par rapport à $M_0 = (x_0, y_0)$

Soit $\omega : \begin{array}{l} U \subset \mathbb{R}^2 \to (\mathbb{R}^2)^* \\ (x,y) \mapsto P(x,y)dx + Q(x,y)dy \end{array}$ une forme différentielle fermée de classe C^1.

Pour $M \in U$, on pose $f(M) = \int_0^1 xP(tM + (1-t)M_0) + yQ(tM + (1-t)M_0)dt$

On va montrer que f est de classe C^2 et que $df = \omega$.

On suppose pour simplifier que $M_0 = (0,0)$.

On fixe x au voisinage de 0 et on considère l'application $y \mapsto \int_0^1 xP(tx,ty) + yQ(tx,ty)dt$

On pose $\varphi(t,y) = xP(tx,ty) + yQ(tx,ty)$ pour $t \in [0,1]$ et y au voisinage de 0.

Alors φ est continue sur $[0,1] \times I$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0, admet une dérivée selon y $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(t,y) = tx\dfrac{\partial P}{\partial y}(tx,ty) + Q(tx,ty) + ty\dfrac{\partial Q}{\partial y}(tx,ty)$ pour tout $t \in [0,1]$, qui est aussi continue.

Comme on intègre sur un segment, pour tout compact $K \subset I$, on a domination par des constantes sur le compact $[0,1] \times K$, donc le théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre s'applique et on a, d'après la formule de Leibniz :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \int_0^1 tx\frac{\partial P}{\partial y}(tx,ty) + Q(tx,ty) + ty\frac{\partial Q}{\partial y}(tx,ty)dt \\ &= \int_0^1 tx\frac{\partial Q}{\partial x}(tx,ty) + Q(tx,ty) + ty\frac{\partial Q}{\partial y}(tx,ty)dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt}(tQ(tx,ty))dt = Q(x,y)\end{aligned}$$

De même, $\dfrac{\partial f}{\partial x} = P$

IV Intégrales curvilignes

- Chemin C^1 par morceaux et continu :

On appelle chemin C^1 par morceaux toute application $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ continue et de classe C^1 par morceaux. Il sera dit fermé si $\varphi(a) = \varphi(b)$

- Intégrales curvilignes :

Définition :

Soit $\omega : U \to (\mathbb{R}^n)^*$ une forme différentielle continue ; on note $P_1,\dots P_n$ tels que $\forall M \in U, \omega(M) = \sum_{j=1}^{n} P_j(M)dx_j$.

Soit aussi $\varphi : [a,b] \to U$ un chemin continu C^1 par morceaux, on note $\varphi_i, i = 1..n$ les applications coordonnées ($\forall t \in [a,b], \varphi(t) = (\varphi_1(t),\dots\varphi_n(t))$)

On appelle intégrale de ω sur φ la quantité :

$$\int_\varphi \omega = \sum_{i=0}^{p-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \sum_{j=1}^{n} P_j(\varphi(t))\varphi'_j(t)dt$$

Où $a_0 = a < a_1 \dots < a_p = b$ sont tels que pour tout $j \in [\![0, p-1]\!]$, $\varphi_{/[a_j,a_{j+1}]}$ est de classe C^1.

NB : si φ est de classe C^1, $\int_\varphi \omega = \int_a^b \sum_{j=1}^{n} P_j(\varphi(t))\varphi'_j(t)dt$.

Théorème (invariance par changement de paramètre croissant) :

Soit $\varphi : [a,b] \to U$ un chemin continu C^1 par morceaux, $\omega = \sum_{j=1}^{n} P_j dx_j$ une forme différentielle continue sur U, et $\theta : [c,d] \to [a,b]$ un C^1–difféomorphisme croissant.

Ainsi, $\psi = \varphi \circ \theta$ est une représentation paramétrique admissible de la même courbe orientée que φ.

Alors $\int_\varphi \omega = \int_\psi \omega$

Autrement dit, $\int_\varphi \omega$ ne dépend pas de φ mais seulement de la courbe paramétrée par φ.

Définition :

Soit $\vec{\Gamma}$ une courbe orientée continue et C^1 par morceaux incluse dans U.

On pose $\int_{\vec{\Gamma}} \omega = \int_{\varphi} \omega$ où φ est une représentation paramétrique admissible quelconque de $\vec{\Gamma}$.

Démonstration :

Pour φ de classe C^1 (pour C^1 par morceaux, il suffit de couper le segment) :

On note $\varphi_i, i = 1..n$ les applications coordonnées de φ, $\psi_i, i = 1..n$ celles de ψ.

Ainsi, $\forall j \in [\![1,n]\!], \psi_j = \varphi_j \circ \theta$. On a alors :

$$\int_{\psi} \omega = \int_c^d \sum_{j=1}^n P_j(\psi(t))\psi'_j(t)dt$$

$$= \int_c^d \sum_{j=1}^n P_j(\varphi(\theta(t)))\varphi'_j(\theta(t))\theta'(t)dt$$

$$= \int_a^b \sum_{j=1}^n P_j(\varphi(u))\varphi'_j(u)du = \int_{\varphi} \omega$$

Où on a fait à l'avant-dernière égalité le changement de variables $u = \theta(t)$.

- Cas d'une forme exacte :

Théorème :

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1, $\vec{\Gamma}$ un chemin continu, C^1 par morceaux inclus dans U, d'origine A et d'extrémité B.

Alors $\int_{\vec{\Gamma}} df = f(B) - f(A)$

En particulier, l'intégrale curviligne d'une forme différentielle exacte sur un chemin fermé est nulle.

Démonstration :

Soit $\varphi : [a,b] \to U$ un paramétrage admissible de $\vec{\Gamma}$.

Alors :

$$\int_{\vec{\Gamma}} df = \int_{\varphi} df = \int_a^b \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\varphi(t))\varphi'_j(t)dt$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt}\big(f(\varphi_1(t),...\varphi_n(t)\big)dt = f(B) - f(A)$$

Exemple :

$d\theta = \dfrac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ n'est pas exacte sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

En effet, en prenant pour $\vec{\Gamma}$ le cercle unité orienté dans le sens trigonométrique paramétré par $P : \begin{array}{l}[0,2\pi] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ t \mapsto (\cos t, \sin t)\end{array}$, on a :

$$\int_{\vec{\Gamma}} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\cos t(\cos t.dt) - \sin t(\sin t.dt)}{\cos^2 t + \sin^2 t} = 2\pi$$

V Interprétation en termes de champs de vecteurs et de circulation

- Définition :

On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique.

Un champ de vecteurs sur U ouvert de $\mathbb{R}^n$ est une application $\begin{array}{l}\vec{V} : U \to (\mathbb{R}^n) \\ M \mapsto \vec{V}(M)\end{array}$.

A toute forme différentielle $\omega : U \to (\mathbb{R}^n)^*$, on peut associer un champ de vecteurs et vice-versa. En effet, à $\omega : U \to (\mathbb{R}^n)^*$, on peut associer $\vec{V} : U \to (\mathbb{R}^n)$ caractérisé par $\forall M \in U, \forall \vec{h} \in \mathbb{R}^n, \omega(M)(h) = <\vec{V}(M), \vec{h}>$

Théorème :

Si ω est la forme différentielle définie par $\forall M \in U, \omega(M) = \sum_{j=1}^{n} P_j(M) dx_j$, alors le champ de vecteurs associé est $\vec{V} : M \mapsto \sum_{j=1}^{n} P_j(M)\varepsilon_j$

- Intégrale curviligne, circulation :

Soit $\vec{\Gamma}$ un chemin continu et C^1 par morceaux inclus dans U.

Si $\vec{V}$ est le champ associé à ω, on pose :

$\int_{\vec{\Gamma}} <\vec{V}(M), d\vec{M}> = \int_{\vec{\Gamma}} \omega = \int_a^b \sum_{j=1}^{n} V_j(\varphi(t))\varphi'_j(t)dt$ où $\varphi : [a,b] \to U$ est un paramétrage admissible de $\vec{\Gamma}$ et $\vec{V} = \sum_{j=1}^{n} V_j \vec{\varepsilon}_j$.

- Forme exacte et potentiel (pour $n = 3$) :

Proposition :

(1) La forme différentielle ω est exacte si et seulement si $\vec{V}$ dérive d'un potentiel ; plus précisément, $\omega = df$ signifie $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} f$.

(2) ω est fermée si et seulement si le rotationnel de $\vec{V}$ est nul.

Corollaire (Poincaré) :

Soit $\vec{V}$ un champ de classe C^1 sur $U \subset \mathbb{R}^3$ étoilé.

Alors $\vec{V}$ dérive d'un potentiel si et seulement si son rotationnel est nul.

Exercices :

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ où U est un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^2$, et f de classe C^2 harmonique.

Alors il existe $g : U \to \mathbb{R}^3$ de classe C^2 harmonique telle que $(*) \begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial y} = -\dfrac{\partial f}{\partial x} \end{cases}$

Idée :

On pose $\omega(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx - \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy$ pour $(x,y) \in U$

Alors $\omega : U \to (\mathbb{R}^2)^*$ est une forme différentielle de classe C^1, elle est fermée car f est harmonique. Comme U est étoilé, ω est donc exacte d'après le théorème de Poincaré.

Ainsi, il existe g telle que (*)

De plus, g est harmonique car $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=0$

Remarque :

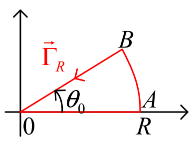
On peut en déduire que $f:U\to\mathbb{R}$ est harmonique si et seulement si il existe $\varphi:U\to\mathbb{C}$ holomorphe telle que $\forall (x,y)\in U, f(x,y)=\mathrm{Re}(\varphi(x+iy))$.

Il suffit en effet de prendre $\varphi(x+iy)=f(x,y)+ig(x,y)$.

Comme une fonction holomorphe est de classe C^∞, il en résulte qu'une fonction harmonique est aussi de classe C^∞.

Etude de $\omega(x,y)=e^{-(x+iy)^2}(dx+idy)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$

Calculer $\int_{\vec{\Gamma}_R}\omega$ par deux méthodes, où $\vec{\Gamma}_R$ est la courbe fermée :



En déduire $\int_0^{+\infty}e^{ix^2}dx$.

Par la définition, $\overrightarrow{OA}:x\in[0,R]\mapsto(x,0)$, $\overset{\frown}{AB}:\theta\in[0,\theta_0]\mapsto(R\cos\theta,R\sin\theta)$ et $\overrightarrow{BO}:r\in[R,0]\mapsto(r\cos\theta_0,r\sin\theta_0)$

Donc

$$\int_{\vec{\Gamma}_R}\omega=\int_0^R e^{-x^2}dx+\int_0^{\theta_0}e^{-R^2e^{2i\theta}}R(-\sin\theta+i\cos\theta)d\theta+\int_R^0 e^{-r^2e^{2i\theta_0}}(\cos\theta_0+i\sin\theta_0)dr$$
$$=\int_0^R e^{-x^2}dx+Ri\int_0^{\theta_0}e^{-R^2e^{2i\theta}}e^{i\theta}d\theta-\int_0^R e^{i\theta_0}e^{-r^2e^{2i\theta_0}}dr$$

Deuxième méthode :

ω est fermée. En effet,

$\dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y)=-2i(x+iy)e^{-(x+iy)^2}$ et $\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y)=i(-2(x+iy)e^{-(x+iy)^2})$

Donc comme $\mathbb{R}^2$ est étoilé, $\int_{\vec{\Gamma}_R}\omega=0$

Donc $\int_0^R e^{-x^2}dx+\underbrace{Ri\int_0^{\theta_0}e^{-R^2e^{2i\theta}}e^{i\theta}d\theta}_{\varepsilon(R)}=e^{i\theta_0}\int_0^R e^{-r^2e^{2i\theta_0}}dr$

Si $\theta_0\leq\dfrac{\pi}{4}$: Pour $t\in[0,\theta_0]$, on a $2t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

Donc $\cos(2t)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-2t\right)\geq\dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{\pi}{2}-2t\right)$

Donc

$$|\varepsilon(R)|\leq\int_0^{\theta_0}R.e^{-R^2\cos(2\theta)}d\theta\leq\int_0^{\theta_0}R.e^{-R^2(1-\frac{4\theta}{\pi})}d\theta=R.e^{-R^2}\left[\frac{e^{R^2\frac{4\theta}{\pi}}}{\frac{4R^2}{\pi}}\right]_0^{\theta_0}$$
$$\leq\frac{\pi}{4R}e^{R^2(\frac{4\theta_0}{\pi}-1)}\xrightarrow[R\to+\infty]{}0$$

De plus, $\int_0^R e^{-x^2}dx \xrightarrow[R\to+\infty]{} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Donc l'intégrale est semi convergente, et : $\forall\theta_0\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right], e^{i\theta_0}\int_0^{+\infty} e^{-r^2e^{2i\theta_0}}dr=\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$

Donc $\int_0^{+\infty} e^{-r^2e^{2i\theta_0}}dr = e^{-i\theta_0}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Si $\theta_0=\frac{\pi}{4}$, $\int_0^{+\infty} e^{-ir^2}dr=\sqrt{\pi}(1-i)$

Et $\int_0^{+\infty}\cos(x^2)dx=\int_0^{+\infty}\sin(x^2)dx=\sqrt{\pi}$