Chapitre 20 : Fonctions de plusieurs variables réelles, calcul différentiel

Cadre :
On étudie les fonctions $f:\Omega\to F$ où Ω est un ouvert de *E*, *E* et *F* étant des espaces normés sur $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de dimension finie (certaines parties s'appliquent aux espaces de Banach)

I Topologie et continuité (rappel)

A) Connexité, connexité par arcs

Théorème :
Soit *A* une partie connexe par arcs de l'espace normé *E*. Alors les seules parties de *A* qui sont à la fois ouvertes et fermées dans *A* sont $\varnothing$ et *A*.
Autrement dit, une partie connexe par arcs est connexe.

B) Fonctions coordonnées et fonctions partielles

On suppose *E* et *F* de dimension finie :
Soit $(\vec{e}_1,...\vec{e}_p)$ une base de *E*, $(\vec{f}_1,...\vec{f}_n)$ une base de *F*.

Alors $f:\Omega\to F$ peut s'écrire de manière unique $f=\sum_{k=1}^{n}F_k\vec{f}_k$ où les F_k sont des applications $F_k:\Omega\to\mathbb{K}$.

Les F_k s'appellent les applications coordonnées de *f* dans la base $(\vec{f}_1,...\vec{f}_n)$ de *f*.
Remarque :
On verra que *f* a une propriété analytique *P* si et seulement si toutes les F_k l'ont.

Soit $M_0\in\Omega$, disons $M_0=\sum_{j=1}^{p}a_j\vec{e}_j$.

Pour x voisin de a_j ($j\in[\![1,p]\!]$), $a_1\vec{e}_1+...+x\vec{e}_j+...+a_p\vec{e}_p\in\Omega$, et l'application $g_{M_0,j}:x\mapsto f(a_1\vec{e}_1+...+x\vec{e}_j+...+a_p\vec{e}_p)$ définie au voisinage de a_j s'appelle *j*-ème application partielle de *f* en M_0 (relativement à la base $(\vec{e}_1,...\vec{e}_p)$ de *E*)

Remarque :
Cette application partielle $g_{M_0,j}$ peut être identifiée à la restriction de *f* à $M_0+\mathbb{K}\vec{e}_j$

On verra que si *f* a une propriété analytique, alors toutes les $g_{M_0,j}$ ont cette propriété, mais que la réciproque est souvent fausse.

Théorème :

Soit $f:\Omega \to F$. Alors :

(1) *f* est continue si et seulement si toutes ses fonctions coordonnées le sont (dans une base quelconque de *F*)

(2) Si *f* est continue, alors toutes les fonctions partielles sont continues, mais la réciproque est fausse.

Démonstration :

(1) Déjà connu

(2) Si *f* est continue, alors pour tout $M_0 \in \Omega$ et $j \in [\![1,p]\!]$, $g_{M_0,j}$ est la composée de l'application $x \mapsto a_1\vec{e}_1 + \ldots + x\vec{e}_j + \ldots + a_p\vec{e}_p$ qui est continue et de *f*, aussi continue. Donc $g_{M_0,j}$ est continue.

Remarque :

Pour montrer qu'une fonction n'est pas continue, on prend le plus souvent des suites…

C) Cas de la dimension 2 : passage en polaire

Pour étudier $f:\Omega \subset \mathbb{R}^2 \to F$ au voisinage de $(a,b) \in \Omega$, on passe en polaire en posant $x = a + r\cos t$ et $y = b + r\sin t$.

Proposition :

f est continue en (a,b) si et seulement si $f(a+r\cos t, b+r\sin t)$ tend vers $f(a,b)$ quand *r* tend vers 0, uniformément par rapport à *t*, c'est-à-dire :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall r \in [0,\alpha[, \forall t \in \mathbb{R}, \|f(a+r\cos t, b+r\sin t) - f(a,b)\| \leq \varepsilon$

Démonstration :

On a en effet $r = \|(a+r\cos t, b+r\sin t) - (a,b)\|_2$ …

Exemple :

Soient $\alpha, \beta > 0$.

On pose $f(x,y) = \dfrac{|x|^\alpha |y|^\beta}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, et $f(0,0) = 0$.

On cherche une condition nécessaire et suffisante pour que *f* soit continue en 0 :

On a pour $r > 0$ et $t \in \mathbb{R}$, $f(r\cos t, r\sin t) - f(0,0) = r^{\alpha+\beta-2}|\cos t|^\alpha |\sin t|^\beta$

Donc si $\alpha + \beta > 2$, $|f(r\cos t, r\sin t) - f(0,0)|$ tend uniformément vers 0 par rapport à *t*, donc *f* est continue en $(0,0)$.

Si $\alpha + \beta \leq 2$, $|f(r\cos t, r\sin t) - f(0,0)|$ ne tend pas uniformément vers 0, donc *f* n'est pas continue en $(0,0)$.

II Dérivée selon un vecteur, dérivée partielle

A) Dérivée de *f* en $A \in \Omega$ selon $\vec{u} \in E$.

On suppose ici que *F* et *E* sont des espaces de Banach, Ω un ouvert de *E*.

Définition :

Soit $f : \Omega \to F$.

On appelle dérivée de *f* en *A* selon $\vec{u} \in E$ le vecteur de *F*, s'il existe, défini par :

$$D_{\vec{u}} f(A) = \lim_{h \to 0} \frac{f(A + h\vec{u}) - f(A)}{h} \in F$$

NB : comme Ω est ouvert, il existe $\alpha > 0$ tel que $B_O(A, \alpha) \subset \Omega$ donc pour $|h| \|\vec{u}\| < \alpha$, on a $A + h\vec{u} \in \Omega$

Autrement dit, *f* a une dérivée selon $\vec{u}$ en *A* si la fonction de variable réelle $h \mapsto f(A + h\vec{u})$ est dérivable en 0.

B) Cas de la dimension finie : dérivée partielle par rapport à une base

Définition :

On note $\mathfrak{B} = (e_1, \ldots e_p)$ une base de *E*.

On appelle *j*-ème dérivée partielle de *f* en *A* (pour $j \in [\![1, p]\!]$) la dérivée $D_{\vec{e}_j} f(A)$, lorsqu'elle existe.

Notation :

On note plutôt cette dérivée $(\partial_{j,\mathfrak{B}} f)(A)$ ou $(\partial_j f)(A)$

Si $E = \mathbb{R}^p$ et $\mathfrak{B}$ est la base canonique de *E*, $(\partial_{j,\mathfrak{B}} f)(A)$ est aussi notée $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(A)$.

Remarque :

Lorsqu'elle existe, $(\partial_{j,\mathfrak{B}} f)(A)$ est la dérivée en a_j de la *j*-ème fonction partielle de *f* en *A*, $g_{A,j} : x \mapsto f(a_1 e_1 + \ldots + x e_j + \ldots + a_p e_p)$ où $A = \sum_{k=1}^{p} a_k e_k$.

Conséquence :

Le calcul des dérivées partielles se ramène à celui de la dérivée d'une fonction d'une variable réelle.

Exemple :

On pose pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = e^{x-y} \cos(xy)$

Alors *f* admet des dérivées partielles par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^2$ (on dit aussi par rapport à *x* et *y*) en tout point et :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^{x-y} \cos(xy) + e^{x-y}(-y \sin(xy)).$$

Lorsque $(\partial_{j,\mathfrak{B}} f)(A)$ existe pour tout $A \in \Omega$, on note $\partial_{j,\mathfrak{B}} f$ l'application $\begin{array}{l} \Omega \to F \\ A \mapsto (\partial_{j,\mathfrak{B}} f)(A) \end{array}$. $\partial_{j,\mathfrak{B}} f$ s'appelle la *j*-ème dérivée partielle de *f* (par rapport à $\mathfrak{B}$)

Théorème :

Soient $f, g : \Omega \to F$ admettant des dérivées partielles en A (par rapport à $\mathfrak{B}$) et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $\lambda f + g$ admet des dérivées partielles en A et :

$$(\partial_{j,\mathfrak{B}}(\lambda f + g))(A) = \lambda(\partial_{j,\mathfrak{B}} f)(A) + (\partial_{j,\mathfrak{B}} g)(A)$$

Démonstration :

On se ramène à des fonctions d'une variable.

III Applications différentiables et différentielles

A) Définition

Soient E, F deux espaces de Banach, Ω un ouvert de E.

$f : \Omega \to F$ est dite différentiable en $A \in \Omega$ lorsqu'elle admet un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de A, c'est-à-dire qu'il existe $l \in L_C(E, F)$ tel que

$$f(A + \vec{v}) \underset{\vec{v}\to\vec{0}}{=} f(A) + l(\vec{v}) + o(\|\vec{v}\|)$$

Ou encore $\lim\limits_{\vec{v}\to 0} \dfrac{f(A+\vec{v}) - f(A) - l(\vec{v})}{\|\vec{v}\|} = \vec{0}$

Théorème :

Soit $f : \Omega \to F$. Si f est différentiable en A, alors elle est continue en A et admet en A une dérivée selon tout vecteur $\vec{u} \in E$, et $(D_{\vec{u}} f)(A) = l(\vec{u})$.

Démonstration :

(1) Soit $\varepsilon > 0$.

Il existe $r > 0$ tel que $\forall \vec{v} \in E, \|\vec{v}\| < r \Rightarrow \|f(A+\vec{v}) - f(A) - l(\vec{v})\|_F \leq \|\vec{v}\|_E$

Donc si $\|\vec{v}\| < r$, $\|f(A+\vec{v}) - f(A)\|_F \leq \|\vec{v}\|_E + \|l(\vec{v})\|_F \leq (1 + \|\!|l|\!\|)\|\vec{v}\|_E$

Donc pour $\|\vec{v}\|_E < \min\left(r, \dfrac{\varepsilon}{1+\|\!|l|\!\|}\right)$, on a $\|f(A+\vec{v}) - f(A)\|_F \leq \varepsilon$.

(2) Soit $\vec{v} \in E$. Pour $t \neq 0$ au voisinage de 0, on note

$\alpha(t) = \dfrac{f(A+t\vec{v}) - f(A)}{t} - l(\vec{v})$.

Ainsi, $\alpha(t) = \dfrac{f(A+t\vec{v}) - f(A) - l(t\vec{v})}{t}$

Si $\vec{v} = \vec{0}$, $\lim\limits_{t\to 0} \alpha(t) = 0$, c'est-à-dire que $(D_{\vec{0}} f)(A)$ existe et vaut $\vec{0} = l(\vec{0})$.

Sinon, pour $t \neq 0$, $\|\alpha(t)\| = \dfrac{\|f(A+t\vec{v}) - f(A) - l(t\vec{v})\|}{\|t\vec{v}\|} \|\vec{v}\|$

Comme $\lim\limits_{t\to 0} t\vec{v} = \vec{0}$, par définition de la différentiabilité, on a $\lim\limits_{t\to 0} \alpha(t) = \vec{0}$

Donc $(D_{\vec{v}} f)(A)$ existe et vaut $l(\vec{v})$.

B) Différentielle d'une fonction différentiable

Théorème :

Si f est différentiable en A, alors il existe une unique application linéaire continue $l\in L_C(E,F)$ telle que $f(A+\vec{v})\underset{\vec{v}\to\vec{0}}{=}f(A)+l(\vec{v})+o(\|\vec{v}\|)$

Définition :

Cette application s'appelle différentielle de f en A, notée $df_A\in L_C(E,F)$

(Ainsi, $\forall\vec{v}\in E,(df_A)(\vec{v})=(D_{\vec{v}}f)(A)$)

Démonstration :

l est en effet l'application $\vec{v}\in E\mapsto(D_{\vec{v}}f)(A)\in F$ d'après le théorème précédent.

C) Exemples

- Applications linéaires :

Théorème :

Une application linéaire f est différentiable si et seulement si elle est continue et dans ce cas, pour tout $A\in\Omega$, $df_A=f$.

Démonstration :…

- Application bilinéaire :

Proposition :

Soit $B:E_1\times E_2\to F$ bilinéaire continue (on munit $E=E_1\times E_2$ de la norme produit $\|(x,y)\|_E=\|x\|_{E_1}+\|y\|_{E_2}$)

Alors B est différentiable en tout $(a,b)\in E$ et :

$$\begin{aligned} dB_{(a,b)} : E_1\times E_2 &\to F \\ (x,y) &\mapsto B(a,y)+B(x,b)\end{aligned}$$

En effet, pour tout $(x,y)\in E$,

$B(a+x,b+y)=B(a,b)+B(a,y)+B(x,b)+B(x,y)$

Or, $(x,y)\mapsto B(a,y)+B(x,b)$ est linéaire continue, et il existe $M\geq 0$ tel que $\forall(x,y)\in E,\|B(x,y)\|_F\leq M\|x\|_{E_1}\|y\|_{E_2}$

Donc $\forall(x,y)\in E,\|B(x,y)\|_F\leq\frac{M}{2}\left(\|x\|_{E_1}^2+\|y\|_{E_2}^2\right)\underset{(x,y)\to(0,0)}{=}o(\|(x,y)\|_E)$

- Si $E=\mathbb{R}$:

Théorème :

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$, $f:\Omega\to F$.

Alors f est différentiable en $a\in\Omega$ si et seulement si elle est dérivable en a et dans ce cas $f'(a)=df_a(1)$ et $df_a:x\mapsto xf'(a)$

Démonstration :

On suppose f différentiable en a. Alors $f(a+x)=f(a)+l(x)+o(|x|)$, où l est linéaire continue. Comme l est linéaire, on a $f(a+x)=f(a)+xl(1)+o(|x|)$

Donc f est dérivable en a et $f'(a)=l(1)=df_a(1)$

Si f est dérivable en a, alors $f(a+x)=f(a)+xf'(a)+o(x)$, donc comme $x\mapsto xf'(a)$ est linéaire continue, *f* est différentiable en *a* et $df_a : x\mapsto xf'(a)$.

- Exercices :

On note $E=M_n(\mathbb{K})$

On cherche les différentielles de $A\mapsto A^2$ (puis $A\mapsto A^m$ pour $m\in\mathbb{N}$), $A\mapsto A^{-1}$ sur $GL_n(\mathbb{K})$.

On note $f : A\mapsto A^2$. Soit $A\in M_n(\mathbb{K})$.

Alors pour $H\in M_n(\mathbb{K})$,

$$f(A+H)=(A+H)^2=A^2+AH+HA+H^2$$
$$=f(A)+l(H)+H^2$$

Où *l* est linéaire continue.

On munit *E* d'une norme d'algèbre (par exemple une norme triple associée à une norme quelconque)

Alors $\forall H\in M_n(\mathbb{K}), \|H^2\|\leq\|H\|^2$

Donc pour $\|H\|\leq\varepsilon$, on a $\|H^2\|\leq\varepsilon\|H\|$

Donc $H^2 \underset{H\to 0}{=} o(\|H\|)$.

Donc *f* est différentiable en *A* et $df_A : H\mapsto AH+HA$

Pour $f : A\mapsto A^m$:

On a pour $H\in M_n(\mathbb{K})$,

$$f(A+H)=(A+H)^m=A^m+A^{n-1}H+...+AHA^{n-2}+HA^{n-1}+R(H)$$

Où H apparaît au moins deux fois dans chaque terme de $R(H)$, et $R(H)$ a 2^n-n-1 termes.

Ainsi, si $A\neq 0$ (pour $A=0$ on a $df_A=0$),

On a pour $\|H\|\leq\|A\|$, $\|R(H)\|\leq(2^n-n-1)\|H\|^2\|A\|^{n-2}=o(\|H\|)$.

Pour $f : A\to A^{-1}$ sur $GL_n(\mathbb{K})$ (ouvert)

Différentiabilité en I_n : on note $\|\ \|$ une norme d'algèbre.

Pour $\|H\|<1$, $-1\notin \mathrm{sp}(H)$ donc I_n+H est inversible.

On a de plus $(I_n+H)^{-1}=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k H^k = I_n - H + H^2\underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k H^k}_{\varepsilon(H)}$

Et $\|\varepsilon(H)\|\leq\sum_{k=0}^{+\infty}\|H\|^k=\dfrac{1}{1-\|H\|}$

Donc *f* est différentiable en I_n et $df_{I_n}=-\mathrm{Id}_{M_n(\mathbb{K})}$.

Soit $A\in GL_n(\mathbb{K})$.

Alors $A+H=A(I_n+A^{-1}H)$. Donc si $\|A^{-1}H\|<1$, alors $A+H$ est inversible.

On peut prendre $\|H\|<\dfrac{1}{\|A^{-1}\|}$

On a alors :

$$(A+H)^{-1} = (I_n + A^{-1}H)^{-1}A^{-1}$$
$$= (I_n - A^{-1}H + o(\|A^{-1}H\|))A^{-1}$$
$$= A^{-1} - A^{-1}HA^{-1} + o(\|H\|)$$

Donc *f* est différentiable en tout $A \in GL_n(\mathbb{K})$ et $df_A : H \mapsto -A^{-1}HA^{-1}$.

D) Opérations sur les différentielles

Théorème :

(1) Soit $\Omega \subset E$ ouvert, $A \in \Omega$.

Alors l'ensemble des fonctions $f : \Omega \to F$ différentiables en *A* est un sous-espace vectoriel de F^{Ω}. De plus, l'application $f \mapsto df_A$ est linéaire, c'est-à-dire :

Si *f* et *g* sont différentiables en *A* et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $f + \lambda g$ est différentiable en *A* et :

$d(f+\lambda g)_A = df_A + \lambda dg_A$

(2) Composition :

Soient $\Omega \subset E$, $\Omega' \subset F$ ouverts, où *E*, *F*, *G* sont des espaces de Banach.

Soient $f : \Omega \to F$, $g : \Omega' \to G$ tels que $f(\Omega) \subset \Omega'$.

On suppose que *f* est différentiable en $A \in \Omega$, *g* en $B = f(A)$.

Alors $g \circ f : \Omega \to G$ est différentiable en *A*, et $d(g \circ f)_A = dg_{f(A)} \circ df_A$

Démonstration :

(1) Si *f*, *g* sont différentiables en *A*, on a :

$f(A+x) \underset{x\to 0}{=} f(A) + l(x) + o_1(\|x\|)$ et $g(A+x) \underset{x\to 0}{=} g(A) + m(x) + o_2(\|x\|)$

où $l = df_A$, $m = dg_A$.

Ainsi, pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $(f+\lambda g)(A+x) \underset{x\to 0}{=} (f+\lambda g)(A) + (l+\lambda m)(x) + o(\|x\|)$

Et $l + \lambda m \in L_C(E,F)$

(2) On a : $f(A+x) \underset{x\to 0}{=} f(A) + l(x) + o_1(\|x\|)$, $g(B+y) \underset{y\to 0}{=} g(B) + m(y) + o_2(\|y\|)$

Où *l*, *m* sont linéaires continues.

Donc $g \circ f(A+x) = g(B+y)$ où $y = l(x) + o_1(\|x\|)$

Soit $g \circ f(A+x) = g(B) + m \circ l(x) + m(o_1(\|x\|)) + o_2(\|l(x) + o_1(\|x\|)\|)$

En effet, quand *x* tend vers 0, *y* tend aussi vers 0 car *l* est continue.

Reste à montrer que $\varepsilon(x) = m(o_1(\|x\|)) + o_2(\|l(x) + o_1(\|x\|)\|)$ est négligeable devant $\|x\|$ quand *x* tend vers 0.

Pour $m(o_1(\|x\|))$: on a $\|m(o_1(\|x\|))\|_G \leq \|m\| \times \|o_1(\|x\|)\|_F = o(\|x\|)$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$. Il existe alors $r > 0$ tel que $\|x\| < r \Rightarrow \|o_1(\|x\|)\|_F \leq \|x\|$

Donc pour $\|x\| < r$, $\|l(x) + o_1(\|x\|)\|_F \leq (\|l\|+1)\|x\|$

Or, par définition de o_2, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall y \in F, \|y\| < \alpha \Rightarrow \|o_2(\|y\|)\| \leq \frac{\varepsilon}{\|l\|+1}\|y\|$$

Donc pour $\|x\| < \max\left(\dfrac{\alpha}{1+\|l\|}, r\right)$,

$$\|o_2(\|l(x)+o_1(\|x\|)\|)\| \leq \frac{\varepsilon}{1+\|l\|}\|l(x)+o_1(\|x\|)\| \leq \varepsilon\|x\|.$$

Donc $g\circ f$ est différentiable en A, et $d(g\circ f) = m\circ l = dg_{f(A)}\circ df_A$

Corollaire (théorème de la chaîne) :

Soient E, F deux espaces de Banach, $\Omega\subset E$ un ouvert, et $f:\Omega\to F$.

On suppose que f est différentiable en $A\in\Omega$.

Soit $\varphi: \begin{array}{l} I\to\Omega \\ t\mapsto\varphi(t)\end{array}$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, tel que $\varphi(t_0)=A$ pour $t_0\in\mathring{I}$.

On suppose φ dérivable en t_0.

Alors $f\circ\varphi: I\to F$ est dérivable en t_0, et :

$(f\circ\varphi)'(t_0) = df_{\varphi(t_0)}(\varphi'(t_0))\in F$

Démonstration :

Comme φ est dérivable en t_0, elle est aussi différentiable en t_0, et $d\varphi_{t_0}: \begin{array}{l}\mathbb{R}\to E \\ h\mapsto h\varphi'(t_0)\end{array}$. De plus, f est différentiable en $\varphi(t_0)=A$.

Donc $f\circ\varphi$ est différentiable en t_0, donc dérivable et :

$$\begin{aligned}(f\circ\varphi)'(t_0) &= d(f\circ\varphi)_{t_0}(1) = (df_{\varphi(t_0)}\circ d\varphi_{t_0})(1))\\ &= df_{\varphi(t_0)}(d\varphi_{t_0}(1)) = df_{\varphi(t_0)}(\varphi'(t_0))\end{aligned}$$

E) En dimension finie : matrices Jacobiennes, calcul des dérivées partielles d'un composé

Soient $\mathfrak{B}=(\vec{\varepsilon}_1,...\vec{\varepsilon}_p)$ une base de E, $\mathfrak{C}=(\vec{\eta}_1,...\vec{\eta}_n)$ une base de F.

Soit $f:\Omega\subset E\to F$.

On note $f_1,...f_n$ les applications coordonnées de f dans $\mathfrak{C}$:

$$\forall M\in\Omega, f(M)=\sum_{j=1}^{n} f_j(M)\vec{\eta}_j$$

Théorème :

f est différentiable en $A\in\Omega$ si et seulement si toutes les f_j sont différentiables en A.

Démonstration :

Si f est différentiable en $A\in\Omega$, on a $\forall j\in[\![1,n]\!], \forall M\in\Omega, f_j(M)=(\vec{\eta}_j^*\circ f)(M)$

Où $(\vec{\eta}_1^*,...\vec{\eta}_n^*)$ est la base duale de $\mathfrak{C}$. Donc pour $j\in[\![1,n]\!]$, comme $\vec{\eta}_j^*$ et linéaire continue, elle est différentiable et donc f_j aussi.

Réciproquement, pour $j\in[\![1,n]\!]$, on aura $l_j\in L_C(E,F)$ tel que

$$f_j(A+\vec{v}) \underset{\vec{v}\to\vec{0}}{=} f_j(A)+l_j(\vec{v})+o_j(\|\vec{v}\|)$$

Alors $f(A+\vec{v}) \underset{\vec{v}\to\vec{0}}{=} f(A)+\sum_{j=1}^{n} l_j(\vec{v})\vec{\eta}_j+\sum_{j=1}^{n} o_j(\|\vec{v}\|)\vec{\eta}_j$, et $\sum_{j=1}^{n} o_j(\|\vec{v}\|)\vec{\eta}_j$ est toujours négligeable devant $\|\vec{v}\|$ quand $\vec{v}$ tend vers 0, et $\vec{v}\mapsto\sum_{j=1}^{n} l_j(\vec{v})\vec{\eta}_j$ est linéaire continue.

Théorème :

On suppose $f:\Omega\to F$ différentiable en $A\in\Omega$. Alors pour $j\in[\![1,p]\!]$, f admet en A une j-ème dérivée partielle par rapport à $\mathfrak{B}$ qui vaut :

$$(\partial_{j,\mathfrak{B}}f)(A)=(df_A)(\vec{\varepsilon}_j)$$

De plus, $\mathrm{mat}_{\mathfrak{B},\mathfrak{C}}(df_A)=((\partial_{j,\mathfrak{B}}f_i)(A))_{\substack{i\in[\![1,n]\!]\\ j\in[\![1,p]\!]}}$

(La j-ème colonne de la matrice est la matrice de $\partial_{j,\mathfrak{B}}f$ dans $\mathfrak{C}$)

Définition :

$\mathrm{mat}_{\mathfrak{B},\mathfrak{C}}(df_A)$ s'appelle la matrice Jacobienne de f en A, notée $\mathrm{Jac}(f)_A$.

Exemple :

Soit $f:\begin{array}{c}\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2\\ (x,y,x)\mapsto(u(x,y,z),v(x,y,z))\end{array}$. Si f est différentiable en $M_0=(x_0,y_0,z_0)$, alors sa matrice Jacobienne est :

$$\begin{pmatrix}\dfrac{du}{dx} & \dfrac{du}{dy} & \dfrac{du}{dz}\\ \dfrac{dv}{dx} & \dfrac{dv}{dy} & \dfrac{dv}{dz}\end{pmatrix}\in M_{2,3}(\mathbb{K})$$

Démonstration :

(1) Si f est différentiable en A, alors elle admet une dérivée en A selon tout vecteur, et $(D_{\vec{v}}f)(A)=df_A(\vec{v})$

Donc en particulier sur la base, $(\partial_{j,\mathfrak{B}}f)(A)=df_A(\vec{\varepsilon}_j)$

(2) Par définition de la matrice de df_A dans les bases $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{C}$, la j-ème colonne de cette matrice est constituée des coordonnées de $df_A(\vec{\varepsilon}_j)$ dans $\mathfrak{C}$, c'est-à-dire des coordonnées de $(\partial_{j,\mathfrak{B}}f)(A)$ dans $\mathfrak{C}$.

Or, $f=\sum_{i=1}^{n} f_i\vec{\eta}_i$. Donc $(\partial_{j,\mathfrak{B}}f)(A)=\sum_{i=1}^{n}(\partial_{j,\mathfrak{B}}f_i)(A)\vec{\eta}_i$.

Théorème (propriétés des matrices Jacobiennes) :

(1) Linéarité : soient $f,g:\Omega\subset E\to F$ différentiables en $a\in\Omega$, $\lambda\in\mathbb{K}$.

Alors $f+\lambda g$ est différentiable en a et $\mathrm{Jac}(f+\lambda g)_a=\mathrm{Jac}(f)_a+\lambda.\mathrm{Jac}(g)_a$

(2) Composition :

Soient $f:\Omega\subset E\to\Omega'\subset F$, $g:\Omega'\to G$.

On suppose f différentiable en $a\in\Omega$, g en $f(a)$.

On note $\mathfrak{B}$ une base de E, $\mathfrak{C}$ de F, $\mathfrak{D}$ de G. Alors $g\circ f$ est différentiable en a et $\underset{\mathfrak{B},\mathfrak{D}}{\mathrm{Jac}}(g\circ f)_a=\underset{\mathfrak{C},\mathfrak{D}}{\mathrm{Jac}}(g)_{f(a)}\times\underset{\mathfrak{B},\mathfrak{C}}{\mathrm{Jac}}(f)_a$.

Démonstration :

Découle des propriétés de la différentielle.

Exemple :

Soit $f:\Omega\subset\mathbb{R}^2\to\Omega'\subset\mathbb{R}^2$, $(x,y)\mapsto(\alpha(x,y),\beta(x,y))$, où α, β sont les fonctions coordonnées de *f*.

Et $g:\Omega'\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $(u,v)\mapsto g(u,v)$

On note $h=g\circ f:(x,y)\mapsto g(\alpha(x,y),\beta(x,y))$

On suppose que *f* est différentiable en (a,b) et *g* en $f(a,b)$.

Alors *h* est différentiable en (a,b) et :

$$\mathrm{Jac}(h)_{(a,b)}=\begin{pmatrix}\frac{\partial h}{\partial x}(a,b) & \frac{\partial h}{\partial y}(a,b)\end{pmatrix}=\mathrm{Jac}(g)_{f(a,b)}\times\mathrm{Jac}(f)_{(a,b)}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{\partial g}{\partial u}(f(a,b)) & \frac{\partial g}{\partial v}(f(a,b))\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\frac{\partial \alpha}{\partial x}(a,b) & \frac{\partial \alpha}{\partial y}(a,b)\\ \frac{\partial \beta}{\partial x}(a,b) & \frac{\partial \beta}{\partial y}(a,b)\end{pmatrix}$$

D'où $\frac{\partial h}{\partial x}(a,b)=\frac{\partial g}{\partial u}(f(a,b))\frac{\partial \alpha}{\partial x}(a,b)+\frac{\partial g}{\partial v}(f(a,b))\frac{\partial \beta}{\partial x}(a,b)$

Théorème (formule de la chaîne) :

Soient $f:\Omega\subset E\to\Omega'\subset F$, $g:\Omega'\to G$

On note $\mathfrak{B}=(\vec{\varepsilon}_1,\dots\vec{\varepsilon}_p)$ une base de *E*, $\mathfrak{C}=(\vec{\eta}_1,\dots\vec{\eta}_n)$ une base de *F*.

On peut donc noter, pour $j\in[\![1,p]\!]$, $f_j:\Omega\to\mathbb{K}$ tels que $f=\sum_{j=1}^{p}f_j\vec{\eta}_j$.

On suppose que *f* admet une dérivée partielle $(\partial_{j,\mathfrak{B}}f)(A)$ en $A\in\Omega$, et que *g* est différentiable en $f(A)$.

Alors $g\circ f$ admet une dérivée partielle $\partial_{j,\mathfrak{B}}(g\circ f)$ en *A*, et :

$$(\partial_{j,\mathfrak{B}}g\circ f)(A)=\sum_{i=1}^{n}(\partial_{j,\mathfrak{B}}f_i)(A).(\partial_{i,\mathfrak{C}}g)(f(A))$$

Démonstration :

On étudie $\psi:x\in I\mapsto g\circ f(A+x\vec{\eta}_j)$ pour *x* proche de 0 dans $\mathbb{R}$.

Les fonctions *g* et $\varphi:x\mapsto f(A+x\vec{\eta}_j)$ sont différentiables (*g* en $f(A)$, φ en 0)

Donc ψ est différentiable en 0, donc dérivable et :

$\psi'(0)=dg_{f(A)}(\varphi'(0))=dg_{f(A)}((\partial_{j,\mathfrak{B}}f)(A))$

Mais la matrice de ce vecteur est :

$\underset{\mathfrak{B},\mathfrak{C}}{\mathrm{Jac}}(g)_{f(A)}\times\mathrm{mat}_{\mathfrak{C}}(\partial_{j,\mathfrak{B}}f(A))$ $\underset{\mathfrak{B},\mathfrak{C}}{\mathrm{Jac}}(g)_{f(A)}\times\mathrm{mat}_{\mathfrak{C}}(\partial_{j,\mathfrak{B}}f(A))$

Où $\mathrm{mat}_{\mathfrak{C}}(\partial_{j,\mathfrak{B}}f(A))=\begin{pmatrix}(\partial_{j,\mathfrak{B}}f_1)(A)\\ \vdots\\ (\partial_{j,\mathfrak{B}}f_n)(A)\end{pmatrix}$

En faisant le produit, on obtient ainsi $(\partial_{j,\mathfrak{B}}g\circ f)(A)=\sum_{i=1}^{n}(\partial_{j,\mathfrak{B}}f_i)(A).(\partial_{i,\mathfrak{C}}g)(f(A))$

Déterminant Jacobien :

On suppose E et F de dimension finie n.

Soit $f:\Omega\subset E\to F$, différentiable en $A\in\Omega$, $\mathfrak{B}$ une base de E, $\mathfrak{C}$ de F.

On appelle Jacobien de f en A relativement aux bases $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ le scalaire $\mathrm{jac}_{\mathfrak{B},\mathfrak{C}}(f)_A=\det(\underset{\mathfrak{B},\mathfrak{C}}{\mathrm{Jac}}(f)_A)$

Remarque :

$df_A\in L_C(E,F)$ est un isomorphisme si et seulement si $\mathrm{jac}_{\mathfrak{B},\mathfrak{C}}(f)_A\neq 0$

F) Application de classe C^1.

Cas de la dimension finie :

Soit $f:\Omega\subset E\to F$ où E est de dimension finie, $\mathfrak{B}=(\vec{\varepsilon}_1,\dots\vec{\varepsilon}_p)$ est une base de E.

On dit que f est de classe C^1 par rapport à $\mathfrak{B}$ lorsque pour tout $j\in[\![1,p]\!]$ et $A\in\Omega$, f admet une j-ème dérivée partielle $(\partial_{j,\mathfrak{B}}f)(A)$ et si les applications dérivées partielles $\partial_{j,\mathfrak{B}}f$ sont toutes continues sur Ω.

Remarque :

Il semble que la définition dépend de $\mathfrak{B}$; on va voir que ce n'est pas le cas :

Théorème :

Soit $f:\Omega\subset E\to F$, $\mathfrak{B}$ une base de E. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) f est de classe C^1 par rapport à $\mathfrak{B}$.

(2) Pour tout $\vec{u}\in E$ et $A\in\Omega$, f a une dérivée selon $\vec{u}$ en A $(D_{\vec{u}}f)(A)\in F$ et l'application $\begin{array}{l}\Omega\to F\\ A\mapsto(D_{\vec{u}}f)(A)\end{array}$ est continue sur Ω (pour tout $\vec{u}\in E$)

(3) f est différentiable en tout $A\in\Omega$ et $\begin{array}{l}\Omega\to(L_C(E,F),\|\|\ \|\|)\\ A\mapsto df_A\end{array}$ est continue.

Conséquence, remarque :

L'équivalence $(2)\Leftrightarrow(1)$ montre que la caractérisation C^1 ne dépend pas de $\mathfrak{B}$.

La condition (3) est la vraie définition du caractère C^1, valable pour des espaces de Banach E et F (pas nécessairement de dimension finie).

Démonstration :

- $(2)\Rightarrow(1)$: ok (il suffit de prendre les vecteurs de la base)

- Si f est différentiable en A, alors pour tout $\vec{u}\in E$, f admet des dérivées $(D_{\vec{u}}f)(A)$ et $(D_{\vec{u}}f)(A)=df_A(\vec{u})$.

Comme $A\mapsto df_A$ est continu, pour $\vec{u}\in E$ fixé, $A\mapsto df_A(\vec{u})$ est continu ($\|df_A(\vec{u})-df_{A_0}(\vec{u})\|\leq\|\|df_A-df_{A_0}\|\|\|\vec{u}\|$)

- $(1)\Rightarrow(3)$:

Lemme :

On note $\mathfrak{B}=(e_1,\dots e_p)$ une base de E.

On suppose que $f:\Omega\subset E\to F$ admet des dérivées partielles $(\partial_{j,\mathfrak{B}}f)(M)$ pour M voisin de A, et que les $M\mapsto(\partial_{j,\mathfrak{B}}f)(M)$ sont continus en A.

Alors *f* est différentiable en *A*, et $df_A : \vec{u} = \sum_{j=1}^{p} u_j e_j \mapsto \sum_{j=1}^{p} u_j (\partial_{j,\mathfrak{B}} f)(A)$

Démonstration :

On le fait dans le cas où $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \mathbb{R}$ (on peut généraliser le résultat mais les notations sont lourdes)

On peut supposer que $A = (0,0) \in \mathbb{R}^2$.

Par hypothèse, $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent au voisinage de $(0,0)$ et sont continus en $(0,0)$.

On veut montrer que *f* est différentiable en $(0,0)$ et que

$$df_{(0,0)} : (h,k) \mapsto h\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

On note, pour $(h,k) \in \mathbb{R}^2$, $\Delta(h,k) = f(h,k) - f(0,0) - h\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) - k\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

On doit donc montrer que $\Delta(h,k) \underset{(h,k)\to(0,0)}{=} o(\|(h,k)\|)$

(Pour F de dimension *n*, on le montre pour chaque Δ_j défini pour chaque coordonnée, à valeur dans $\mathbb{R}$; pour *E* de dimension supérieure à 2, on a plus de termes)

On a alors :

$$\forall (h,k) \in \mathbb{R}^2, \Delta(h,k) = f(h,k) - f(h,0) + f(h,0) - f(0,0) - h\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) - k\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

Soit (h,k) fixé au voisinage de $(0,0)$. D'après le théorème des accroissements finis appliqué à $y \mapsto f(h,y)$, il existe $k_1 \in \underset{\leftrightarrow}{[0,k]}$ tel que $f(h,k) - f(h,0) = k\frac{\partial f}{\partial y}(h,k_1)$

De même, le théorème des accroissements finis appliqué à $x \mapsto f(x,0)$ donne $h_1 \in \underset{\leftrightarrow}{[0,h]}$ tel que $f(h,0) - f(0,0) = h\frac{\partial f}{\partial x}(h_1,0)$

(Si *E* est de dimension plus grande, on aura une décomposition de Δ plus grande et il faudra appliquer le théorème des accroissements finis suffisamment)

Donc

$$|\Delta(h,k)| = \left| h\left(\frac{\partial f}{\partial x}(h_1,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right) + k\left(\frac{\partial f}{\partial y}(h,k_1) - \frac{\partial f}{\partial y}(h,0)\right)\right|$$

$$\leq \|(h,k)\|_\infty \left(\left|\frac{\partial f}{\partial x}(h_1,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}(h,k_1) - \frac{\partial f}{\partial y}(h,0)\right| \right)$$

($\|(h,k)\|_\infty = \max(|h|,|k|)$)

Et la quantité $\left(\left|\frac{\partial f}{\partial x}(h_1,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}(h,k_1) - \frac{\partial f}{\partial y}(h,0)\right| \right)$ tend vers $(0,0)$ quand (h,k) tend vers 0 par continuité des applications partielles en $(0,0)$

D'où le résultat.

Conséquence :

Si *f* admet sur Ω des dérivées $(\partial_{j,\mathfrak{B}} f)(A)$ en tout point *A*, et si les $(\partial_{j,\mathfrak{B}} f)$ sont toutes continues, d'après le lemme, *f* est différentiable en tout $A \in \Omega$.

Reste à montrer que $A \mapsto df_A$ est continue.

Soit $\mathfrak{C}$ une base de *F*. Il suffit de montrer que $A \mapsto \mathrm{Jac}(f)_A$ est continue, ce qui est vrai car la *j*-ème colonne de cette matrice est la matrice dans $\mathfrak{C}$ de $(\partial_{j,\mathfrak{B}} f)(A)$, donc dépend continûment de *A*.

Application :

- Pour $E = \mathbb{R}^n$: toute fonction polynomiale $E \to \mathbb{R}$ est de classe C^1 sur *E*.
- Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X_1, \dots X_n]$

Alors $\Omega = \{(x_1, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n, Q(x_1, \dots x_n) \neq 0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et :

$$f : \begin{array}{l} \Omega \to \mathbb{R} \\ (x_1, \dots x_n) \mapsto \dfrac{P(x_1, \dots x_n)}{Q(x_1, \dots x_n)} \end{array}$$ est de classe C^1 sur Ω.

En effet :

Déjà, Ω est ouvert car l'image réciproque d'un ouvert par une application continue (Q)

Pour une fraction rationnelle $f = \dfrac{P}{Q}$, *f* admet des dérivées partielles en tout point $A \in \Omega$, et $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(A) = \dfrac{\dfrac{\partial P}{\partial x_j}(A).Q(A) - P(A).\dfrac{\partial Q}{\partial x_j}(A)}{Q(A)^2}$, continue par rapport à *A* car rationnelle.

Exercice : étude de la fonction déterminant :

Déjà, $\det$ est de classe C^1 car polynomiale

Détermination de $d\det_A \in M_n(\mathbb{K})^*$

Si on pose $A = (a_{i,j})_{\substack{i \in [[1,n]] \\ j \in [[1,n]]}}$, $\det(A) = f(a_{i,j})_{\substack{i \in [[1,n]] \\ j \in [[1,n]]}}$, on a :

$$d\det_A(X) = \sum_{(i,j) \in [[1,n]] \times [[1,n]]} x_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x_{i,j}}(A) \text{ où } X = (x_{i,j})_{\substack{i \in [[1,n]] \\ j \in [[1,n]]}}$$

Pour $A = I_n$:

Calcul de $\dfrac{\partial \det}{\partial x_{i,j}}(I_n)$:

Pour $(i,j) \in [[1,n]] \times [[1,n]]$,

Si $i \neq j$, alors $\underbrace{\det(I_n + hE_{i,j})}_{\varphi_{i,j}(h)} = 1$

Donc $\dfrac{\partial \det}{\partial x_{i,j}}(I_n) = 0 = \varphi'_{i,j}(0)$

Si $i = j$, $\det(I_n + hE_{i,i}) = 1 + h$

Donc $\varphi'_{i,j}(0) = 1$

Donc $d\det_{I_n} : (x_{i,j})_{\substack{i \in [[1,n]] \\ j \in [[1,n]]}} \mapsto \displaystyle\sum_{(i,j) \in [[1,n]] \times [[1,n]]} x_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x_{i,j}}(I_n) = \mathrm{Tr}(x)$

Pour $A\in GL_n(\mathbb{K})$,

$$\det(A+H)=\det(A)\det(I_n+A^{-1}H)$$

$$=\det(A)(1+\operatorname{Tr}(A^{-1}H)+o(\|A^{-1}H\|))$$

$$=\det A+\det(A)\operatorname{Tr}(A^{-1}H)+o(\|H\|)$$

(où on a pris une norme d'algèbre quelconque)

Donc la différentielle de det en $A\in GL_n(\mathbb{K})$ est $H\mapsto\det(A)\operatorname{Tr}(A^{-1}H)$

Et pour A non inversible :

On remarque qu'en fait pour A inversible,

$d\det_A : H\mapsto\operatorname{Tr}((\det A).A^{-1}\times H)=\operatorname{Tr}({}^t\operatorname{com}(A)\times H)$

donc par continuité de l'application et densité de $GL_n(\mathbb{K})$ dans $M_n(\mathbb{K})$, c'est encore valable sur tout $M_n(\mathbb{K})$.

G) Caractère C^k et dérivées partielles d'ordre supérieur à 2.

(En dimension finie)

- Dérivées partielles d'ordre supérieur à 2 :

Si la fonction $f:\Omega\subset E\to F$ admet des fonctions dérivées partielles $\partial_{j,\mathfrak{B}}f:\Omega\to F$ définies sur Ω, on peut s'intéresser à l'existence de dérivées partielles pour ces nouvelles fonctions.

Lorsqu'elles existent, on les appelle dérivées partielles d'ordre 2 de *f*.

Plus généralement, on peut définir les dérivées partielles d'ordre k pour $k\geq 2$.

Cas particulier :

Si $E=\mathbb{R}^n$:

Soit $f:(x_1,\dots x_n)\mapsto f(x_1,\dots x_n)$. On note les dérivées partielles par rapport à une base canonique $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$. Les dérivées partielles d'ordre 2 sont les $\dfrac{\partial}{\partial x_k}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right)$, notées plutôt $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k\partial x_j}$.

- Théorème d'interversion de Schwarz :

Théorème :

Soit $f:\Omega\to F$, $\mathfrak{B}$ une base de E, $\mathfrak{B}=(e_1,\dots e_n)$

On suppose que $\partial_{j,\mathfrak{B}}(\partial_{k,\mathfrak{B}}f)$ et $\partial_{k,\mathfrak{B}}(\partial_{j,\mathfrak{B}}f)$ existent au voisinage de A et sont continues en A.

Alors $\partial_{j,\mathfrak{B}}(\partial_{k,\mathfrak{B}}f)(A)=\partial_{k,\mathfrak{B}}(\partial_{j,\mathfrak{B}}f)(A)$

Démonstration :

Comme on ne s'intéresse qu'à deux vecteurs de $\mathfrak{B}$, on peut supposer que $E=\mathbb{R}^2$, et par translation que $A=(0,0)$.

On suppose de plus $F=\mathbb{R}$ (pour alléger les notations)

Soit donc $f:\Omega\in V(0,0)\to\mathbb{R}$.

On va montrer que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ xy\neq 0}}\dfrac{f(x,y)-f(x,0)-f(0,y)+f(0,0)}{xy}$, qui est une limite symétrique en *x* et *y*.

(Si *F* est de dimension plus grande, on le montre pour chaque coordonnée de *f*)

Posons donc pour $(x,y)\in\Omega$, $\Delta(x,y)=f(x,y)-f(x,0)-f(0,y)+f(0,0)$

Pour *x* fixé, on pose $\varphi_x : y\mapsto f(x,y)-f(0,y)$

Ainsi, $\forall(x,y)\in\Omega, \Delta(x,y)=\varphi_x(y)-\varphi_x(0)$.

De plus, φ_x est dérivable (on est toujours à *x* fixé), et $\varphi'_x : y\mapsto \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)-\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,y)$

Soit donc $(x,y)\in\Omega$

D'après le théorème des accroissements finis appliqué à φ_x, il existe $y_1\in \underset{\leftrightarrow}{\left]0,y\right[}$ tel que $\Delta(x,y)=y\varphi'_x(y_1)=y(\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y_1)-\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,y_1))$

On applique alors le théorème des accroissements finis à $x\mapsto\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y_1)$, donc il existe $x_1\in \underset{\leftrightarrow}{\left]0,x\right[}$ tel que $\Delta(x,y)=xy\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_1,y_1)$

Donc pour $xy\neq 0$, $\dfrac{\Delta(x,y)}{xy}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_1,y_1)\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$

(Par continuité)

Et comme Δ est symétrique en *x* et *y*, c'est la même chose pour $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$, d'où l'égalité.

Attention :

Il existe des fonctions ayant des dérivées partielles d'ordre 2 différentes.

- Fonctions de classe C^k pour $k\geq 2$:

Définition :

$f:\Omega\subset E\to F$ est dite de classe C^k par rapport à $\mathfrak{B}$ si elle admet en tout *A* et pour tout ordre $p\leq k$ des dérivées d'ordre *p* $\partial_{j_p}\partial_{j_{p-1}}...\partial_{j_1}f$ toutes continues sur Ω.

Proposition :

Pour $k\geq 2$, *f* est de classe C^k par rapport à $\mathfrak{B}$ si et seulement si elle admet des dérivées partielles d'ordre 1 $\partial_j f$ qui sont toutes de classe C^{k-1}

Conséquence :

La caractérisation C^k est indépendante de la base choisie.

Remarque :

On sait que *f* est de classe C^1 si et seulement si elle est différentiable en tout $A\in\Omega$ et $A\in\Omega\mapsto df_A\in L_C(E,F)$ est continue.

On en déduit que *f* est de classe C^p pour $p\geq 2$ si et seulement si elle est différentiable en tout $A\in\Omega$ et $df : A\in\Omega\mapsto df_A\in L_C(E,F)$ est de classe C^{p-1}.

On appellera différentielle d'ordre 2 de *f* en *A* l'application :

$d^2f_A=d(df)_A\in L_C(E,L_C(E,F))$

Ainsi, f est de classe C^2 si et seulement si $d^2 f_A$ existe en tout point $A \in \Omega$ et $A \mapsto d^2 f_A$ est continue.

Interprétation de la formule de Schwarz :

On suppose que $d^2 f : \Omega \to L_C(E, L_C(E,F))$ est continue.

Pour tous $A \in \Omega$ et $\vec{u}, \vec{v} \in E$, $(d^2 f_A(\vec{u}))(\vec{v}) \in F$

Alors d'après le théorème de Schwarz, $(d^2 f_A(\vec{u}))(\vec{v}) = (d^2 f_A(\vec{v}))(\vec{u})$

En effet :

Posons $\varphi(x,y) = f(A + x\vec{u} + y\vec{v}) = (f \circ g)(x,y)$ pour (x,y) au voisinage de $(0,0)$.

Alors φ est de classe C^1, et on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) &= d\varphi_{(x,y)}(1,0) \\ &= d(f \circ g)_{(x,y)}(1,0) = (df_{g(x,y)} \circ dg_{(x,y)})(1,0) \\ &= df_{A+x\vec{u}+y\vec{v}}(dg_{(x,y)}(1,0)) = df_{A+x\vec{u}+y\vec{v}}(\vec{u})\end{aligned}$$

$\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}$ est dérivable par rapport à y, et $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}(x,y) = (d^2 f_{A+x\vec{u}+y\vec{v}}(\vec{v}))(\vec{u})$

En effet :

Posons $\psi(x,y) = df_{A+x\vec{u}+y\vec{v}} = (df \circ g)(x,y)$ pour (x,y) au voisinage de $(0,0)$.

On a alors :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi}{\partial y}(x,y) &= d\psi_{(x,y)}(0,1) = d(df)_{A+x\vec{u}+y\vec{v}} \circ dg_{(x,y)}(0,1) \\ &= d(df)_{A+x\vec{u}+y\vec{v}}(\vec{v}) = d^2 f_{A+x\vec{u}+y\vec{v}}(\vec{v})\end{aligned}$$

Et en posant $\varphi_1(x,y) = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = (\psi(x,y))(\vec{u})$,

φ_1 est le composé de $\psi : \begin{array}{l} V(0,0) \to L_C(E,F) \\ (x,y) \mapsto \psi(x,y) \end{array}$ et de $\mathrm{Ev}_{\vec{u}} : \begin{array}{l} L_C(E,F) \to F \\ l \mapsto l(\vec{u}) \end{array}$.

Or, $\mathrm{Ev}_{\vec{u}}$ est linéaire continu, donc différentiable et $\forall l \in L_C(E,F), d(\mathrm{Ev}_{\vec{u}})_l = \mathrm{Ev}_{\vec{u}}$

Donc $d\varphi_1 = d(\mathrm{Ev}_{\vec{u}})_{\psi(x,y)} \circ d\psi_{(x,y)}$

D'où $\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x,y) = \mathrm{Ev}_{\vec{u}} \circ d\psi_{(x,y)}(0,1) = \mathrm{Ev}_{\vec{u}}(\dfrac{\partial \psi}{\partial y}(x,y)) = (\dfrac{\partial \psi}{\partial y}(x,y))(\vec{u})$,

Soit $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}(x,y) = \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x,y) = (\dfrac{\partial \psi}{\partial y}(x,y))(\vec{u}) = (d^2 f_{A+x\vec{u}+y\vec{v}}(\vec{v}))(\vec{u})$

Et donc en $x = y = 0$, d'après le théorème de Schwarz :

$$(d^2 f_A(\vec{u}))(\vec{v}) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}(0,0) = (d^2 f_A(\vec{v}))(\vec{u})$$

- Opérations sur les fonctions C^k :

Théorème :

Une combinaison linéaire et un composé de fonctions de classe C^k sont de classe C^k.

Démonstration :

Par récurrence sur k (pour la composition) :

- Le résultat est déjà vrai pour $k = 0$.
- Supposons que l'énoncé est établi jusqu'à $k - 1$ pour $k \geq 1$.

Considérons alors $f:\Omega\subset E\to\Omega'\subset F$, $g:\Omega'\to G$ de classe C^k.

Donc *f* et *g* sont différentiables en tout point de Ω et Ω'.

Ainsi, $g\circ f$ est différentiable en tout point de Ω, et $d(g\circ f)_A=dg_{f(A)}\circ df_A$

Par hypothèse de récurrence, $A\in\Omega\mapsto dg_{f(A)}\in L_C(F,G)$, qui est composé des applications *f* et dg, toutes deux de classe C^{k-1}, est de classe C^{k-1}.

df est aussi de classe C^{k-1}.

De plus, l'application $\begin{array}{l}B:L_C(F,G)\times L_C(E,F)\to L_C(E,G)\\ \qquad(\alpha,\beta)\mapsto\alpha\circ\beta\end{array}$ est bilinéaire continue, donc de classe C^∞ :

> Si $B:E_1\times E_2\to F$ est bilinéaire continue, alors *B* est de classe C^∞.
>
> En effet :
>
> *B* est différentiable en tout point de $(a_1,a_2)\in E_1\times E_2$, et
>
> $\begin{array}{l}dB_{(a_1,a_2)}:E_1\times E_2\to F\\ \qquad(x_1,x_2)\mapsto B(a_1,x_2)+B(x_1,a_2)\end{array}$
>
> Donc $dB:E_1\times E_2\to L_C(E_1\times E_2,F)$ est linéaire continue.
>
> Donc dB est différentiable en tout point $(a_1,a_2)\in E_1\times E_2$ et :
>
> $\forall(a_1,a_2)\in E_1\times E_2, d^2B_{(a_1,a_2)}=dB$
>
> Donc d^2B est une application constante (qui prend la valeur dB sur $E_1\times E_2$)
>
> Donc d^2B est différentiable et $\forall(a_1,a_2)\in E_1\times E_2, d^3B_{(a_1,a_2)}=0$
>
> C'est-à-dire $d^3B=0$, qui est de classe C^∞.

Reprenons :

$\begin{array}{l}B:L_C(F,G)\times L_C(E,F)\to L_C(E,G)\\ \qquad(\alpha,\beta)\mapsto\alpha\circ\beta\end{array}$ est donc de classe C^∞, et

$d(g\circ f)$ est la composée de $\begin{array}{l}\Omega\to L_C(F,G)\times L_C(E,F)\\ A\mapsto(dg_{f(A)},df_A)\end{array}$ et de *B*, qui sont toutes deux de classe C^{k-1}

Donc $d(g\circ f)$ est de classe C^{k-1} par hypothèse de récurrence.

Donc $g\circ f$ est de classe C^k.

H) C^k–difféomorphisme

- Définition :

Soit Ω un ouvert de *E*, Ω' de *F*, et $f:\Omega\to\Omega'$.

On dit que *f* est un homomorphisme lorsqu'elle est bijective et bicontinue, c'est-à-dire que *f* et f^{-1} sont continues.

On dit que *f* est un C^k–difféomorphisme (pour $k\geq 1$) lorsqu'elle est bijective et *f*, f^{-1} sont de classe C^k

(Un homomorphisme serait ainsi un « C^0–difféomorphisme » – on n'emploie pas ce terme)

Proposition (lien entre df et $d(f^{-1})$) :

Soit $f:\Omega\to\Omega'$ un C^k–difféomorphisme.

Alors pour tout $A\in\Omega$, df_A est un isomorphisme bicontinu (c'est-à-dire un homomorphisme linéaire) entre *E* et *F*, et :

$d(f^{-1})_{f(A)}=(df_A)^{-1}\in L_C(F,E)$

Remarque :

Si $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\Omega'\subset\mathbb{R}^p$ où $\Omega\neq\varnothing$ est un C^k–difféomorphisme, alors $n=p$ car df_A est alors un isomorphisme entre $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$.

Démonstration :

On a $f^{-1}\circ f=Id_\Omega$ et $f\circ f^{-1}=Id_{\Omega'}$

Comme *f* et f^{-1} sont différentiables, on a :

$d(\mathrm{Id}_\Omega)_A=df^{-1}_{f(A)}\circ df_A$

Or, $\mathrm{Id}_\Omega=(\mathrm{Id}_E)_{/\Omega}$ et Id_E, donc $d(\mathrm{Id}_\Omega)_A=\mathrm{Id}_E$

Donc $df^{-1}_{f(A)}\circ df_A=\mathrm{Id}_E$

Et de même $df_A\circ df^{-1}_{f(A)}=\mathrm{Id}_F$

Donc df_A est un isomorphisme, et df_A, $df^{-1}_{f(A)}$ sont continues, donc c'est un homomorphisme, et on a bien l'égalité donnée.

- Cas de la dimension 1 : $E=F=\mathbb{R}$.

Rappel :

Soient *I*, *J* deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f:I\to J$, $k\geq 1$.

Alors *f* est un C^k–difféomorphisme lorsque *f* est bijective, de classe C^k et f^{-1} est de classe C^k.

Théorème (caractérisation des C^k–difféomorphismes) :

$f:I\to J$ est un C^k–difféomorphisme si et seulement si :

(1) *f* est de classe C^k.

(2) f' ne s'annule pas

(3) $f(I)=J$ (surjective)

NB : ce théorème permet de ne pas avoir à étudier f^{-1}.

Avec (1) et (2), on voit que *f* est injective et que $f^{-1}:J\to I$ est de classe C^k

- Théorème d'inversion locale (hors programme) :

Soit $f:\Omega\subset E\to F$ de classe C^k, $A\in\Omega$.

On suppose que df_A est un homéomorphisme de *E* dans *F* (c'est-à-dire que df_A est linéaire, bijective, bicontinue)

Alors $f(\Omega)$ est un voisinage de $f(A)$, et il existe un voisinage *U* de *A* dans Ω, un voisinage *U'* de $f(A)$ dans Ω' tels que $f_{/U}:U\to U'$ est un C^k–difféomorphisme.

Autrement dit, sous les hypothèses du théorème, *f* est un C^k–difféomorphisme au voisinage de *A*.

Démonstration :

(1) Réductions :

On pose $L=df_A$.

En remplaçant f par $x \mapsto L^{-1}(f(x+A)-f(x))$, on peut supposer que $E=F$, $A=f(A)=0$ et $df_A=\mathrm{Id}$.

Par continuité de df en A, il existe $\alpha>0$ tel que $\forall x\in\Omega, \|x\|\leq\alpha \Rightarrow \|\|df_x-\mathrm{Id}\|\|\leq\frac{1}{2}$

Soit B_1 la boule fermée de centre 0 et de rayon α, et g définie par

$\forall x\in\Omega, g(x)=x-f(x)$.

Ainsi, g est de classe C^1 sur l'intérieur de B_1, de différentielle nulle en $A=0$ et $\frac{1}{2}$-lipschitzienne sur B_1.

Le calcul de la dérivée de $t\mapsto g(t.N+(1-t).M)$ montre que pour tout $(N,M)\in B_1^2$, $g(N)-g(M)=\int_0^1 dg_{(tN+(1-t)M)}(\overrightarrow{NM})dt=\int_0^1(\mathrm{Id}-df_{(tN+(1-t)M)})(\overrightarrow{NM})dt$

Et donc $\|g(N)-g(M)\|\leq\dfrac{\|\overrightarrow{MN}\|}{2}$

(2) Maintenant :

Pour $x,x'\in B_1$, on a

$$\|f(x)-f(x')\|=\|(g(x')-g(x))-(x-x')\|\geq\|x-x'\|-\frac{\|x-x'\|}{2}\geq\frac{\|x-x'\|}{2}$$

Donc f est injective sur B_1.

Soit $y\in\overline{B}(f(A),\frac{\alpha}{2})$.

On note $h_y: x\mapsto x-f(x)+y$, définie sur B_1.

Alors :

B_1 est complète (car fermée dans un espace complet)

h_y stabilise B_1 car pour $\|x\|\leq\alpha$, on a

$$\|h_y(x)\|=\|g(x)+y\|\leq\|g(x)-g(0)\|+\|y\|\leq\frac{\|x\|}{2}+\|y\|\leq\alpha$$

Et g est 1/2–lipschitzienne sur B_1 donc $h_y=g+y$ aussi.

Donc d'après le théorème du point fixe, il existe un unique $x\in B_1$ tel que $h_y(x)=x$ c'est-à-dire tel que $f(x)=y$.

On pose $\omega=f^{-1}(B_o(0,\frac{\alpha}{2}))\cap B_o(0,\alpha)$. Comme f est continue, c'est un voisinage ouvert de 0, et on a de plus $f(\omega)=B_o(0,\frac{\alpha}{2})$.

En effet, on a déjà $f(\omega)\subset B_o(0,\frac{\alpha}{2})$ par définition de ω. Inversement, si $\|y\|<\frac{\alpha}{2}$, il existe $x\in B_1$ tel que $f(x)=y$, mais l'inégalité $\|y\|=\|f(x)\|=\|f(x)-f(0)\|\geq\frac{\|x\|}{2}$ montre que $\|x\|<\alpha$ et donc $x\in\omega$. Donc $y=f(x)\in f(\omega)$, d'où l'autre inclusion.

Ainsi, $f:\omega\to B_o(0,\frac{\alpha}{2})$ est continue, bijective. Sa réciproque est de plus aussi continue car lipschitzienne :

Pour $y=f(x)$, $y'=f(x')\in B_o(0,\frac{\alpha}{2})$, on a :

$\|y-y'\|=\|f(x)-f(x')\|\geq\frac{\|x'-x\|}{2}$, soit

$\forall(y,y')\in B_o(0,\frac{\alpha}{2}), \|f^{-1}(y)-f^{-1}(y')\|\leq 2\|y-y'\|$.

Donc $\hat{f}:\omega\to\omega'=B_o(0,\frac{\alpha}{2})$ est un homéomorphisme ; on pose alors $\hat{g}=\hat{f}^{-1}$. $\hat{g}$ est donc déjà continue.

(3) Montrons que $\hat{g}$ est différentiable sur ω'.

Déjà, pour $a \in \omega$, on a $\left\|df_a - \mathrm{Id}\right\| \leq \frac{1}{2}$, donc df_a est un automorphisme de *E*.

Soit $b = \hat{f}(a) \in \omega'$. Pour *k* tel que $b+k \in \omega'$, on pose $h = \hat{g}(b+k) - a$.

Par continuité de $\hat{g}$, *h* tend vers 0 quand *k* tend vers 0, et comme *f* est différentiable en *a*, on a le développement :

$b+k = f(a+h) = f(a) + df_a(h) + o(h)$, c'est-à-dire $k = df_a(h) + o(h)$.

On a donc au voisinage de 0 la majoration : $\|k\| \leq (\|df_a\| + \frac{1}{2})\|h\| \leq 2\|h\|$

Et on peut donc écrire $\hat{g}(b+k) = \hat{f}^{-1}(b) + h = \hat{f}^{-1}(b) + df_a^{-1}(k) + df_a^{-1}(o(k))$

Donc $\hat{g}$ est différentiable en $b = \hat{f}(a)$, de différentielle df_a^{-1}.

(4) Enfin, *g* est de classe C^k :

L'application $d\hat{g} : a \in \omega' \mapsto d\hat{g}_a \in L(E)$ est de classe C^{k-1} car composée de $df : a \mapsto df_a$ qui est C^{k-1} et de $\varphi \in GL(E) \mapsto \varphi^{-1}$ qui est de classe C^∞.

Corollaire (théorème de l'application ouverte) :

Soit $f : \Omega \subset E \to F$ de classe C^1. On suppose que pour tout $A \in \Omega$, $df_A : E \to F$ est un homéomorphisme (linéaire). Alors *f* est une application ouverte, c'est-à-dire que pour tout ouvert *U* de Ω, $f(U) \subset F$ est ouvert.

Démonstration :

Soit $U \subset \Omega$ un ouvert, et $A \in U$

Alors le théorème précédent s'applique à $f_{/U} : U \to F$, de classe C^1, en *A* et en particulier, $f(U) = f_{/U}(U)$ est un voisinage de $f(A)$ dans *F*.

Donc $f(U)$ est voisinage de chacun de ses points.

- Théorème d'inversion globale (caractérisation des difféomorphismes) :

Exemple :

L'exponentielle complexe :

On note $E : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (e^x \cos y, e^x \sin y) \end{array}$.

Alors *E* est de classe C^∞, et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$\mathrm{Jac}(E)_{(x,y)} = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$ (de déterminant $e^{2x} \neq 0$)

Donc $dE_{(x,y)} \in L(\mathbb{R}^2)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.

Mais *E* n'est pas injective, puisque $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 E(x,y) = E(x, y+2\pi)$

On peut appliquer le théorème d'inversion locale :

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, il existe *U* voisinage ouvert de (x,y) et *U'* voisinage ouvert de $E(x,y)$ tels que $E_{/U} : U \to U'$ est un C^∞–difféomorphisme. Donc *E* est un C^∞–difféomorphisme local (mais pas global, car non injectif)

On peut appliquer le théorème de l'application ouverte : $E(\mathbb{R}^2)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (c'est $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$)

Théorème d'inversion globale (caractérisation des difféomorphismes) :

Soit $f:\Omega\subset E\to\Omega'\subset F$, où Ω est ouvert, de classe C^k, avec $\Omega'=f(\Omega)$.

On suppose que :

(1) Pour tout $A\in\Omega$, df_A est un homéomorphisme de *E* dans *F*.

(2) *f* est injective.

Alors Ω' est un ouvert et $f:\Omega\to\Omega'$ est un C^k–difféomorphisme.

(La réciproque est vraie)

Démonstration :

Déjà, d'après le théorème de l'application ouverte, Ω' est un ouvert.

Comme *f* est supposée injective, $f:\Omega\to\Omega'$ est bijective et de classe C^k

On doit montrer que $f^{-1}:\Omega'\to\Omega$ est de classe C^k.

Soit $B\in\Omega'$, et $A=f^{-1}(B)$

On peut appliquer le théorème d'inversion locale en *A* : il existe un voisinage *U* ouvert de *A*, *U'* de *B* tels que $f_{/U}:U\to U'$ est un C^k–difféomorphisme.

Alors $(f^{-1})_{/U'}=(f_U)^{-1}$ est de classe C^k

Donc f^{-1} est de classe C^k au voisinage de *B*, et comme c'est valable pour tout $B\in\Omega$, $f^{-1}:\Omega'\to\Omega$ est de classe C^k.

Exemples :

- En reprenant l'exemple précédent, pour que *E* soit un C^∞–difféomorphisme, on peut prendre $U=\mathbb{R}\times]-\pi,\pi[$

Et $E(U)=\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-=\mathbb{R}^2\setminus\{(x,0),x\in\mathbb{R}_-\}$.

En effet :

E est de classe C^∞

Pour tout $(x,y)\in U$, $\mathrm{jac}(E)_{(x,y)}=e^{2x}\neq 0$

E est injective sur *U*.

En effet, si $E(x,y)=E(x',y')$ pour $(x,y),(x',y')\in U$, alors $e^{x+iy}=e^{x'+iy'}$

Donc $x+iy-(x'+iy)\in 2i\pi\mathbb{Z}$

Donc $x=x'$, et $y-y'\in 2\pi\mathbb{Z}$

Donc comme $y,y'\in]-\pi,\pi[$, on a bien $(x,y)=(x',y')$

Donc *E* est bien un C^∞–difféomorphisme.

- Passage en polaire :

On note *P* l'application $P:\begin{array}{l}\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\\(r,t)\mapsto(r\cos t,r\sin t)\end{array}$

On cherche un ouvert *U* maximal tel que $P_{/U}:U\to P(U)$ est un C^∞–difféomorphisme.

Déjà, *P* est de classe C^∞, et pour $(r,t)\in\mathbb{R}^2$.

Et $\mathrm{Jac}(P)(r,t)=\begin{pmatrix}\cos t & -r\sin t\\ \sin t & r\cos t\end{pmatrix}$. Donc $\mathrm{jac}(P)(r,t)=r$

On suppose $r>0$:

Prenons $U=]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[$.

Sur *U*, le théorème d'inversion globale s'applique.

En effet, *P* est de classe C^∞, le déterminant jacobien ne s'annule pas, et *P* est injectif.

Donc $P_{/U}: U \to P(U)$ est un C^∞–difféomorphisme et $U' = P(U)$ est ouvert.

On a $P(U) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0), x \leq 0\}$.

De plus, U est maximal, au sens que si on ajoute un ouvert ω à U, $P_{/\omega\cup U}$ n'est plus injectif.

Morale :

Les parties de $\mathbb{R}^2$ sur lesquelles on peut passer en polaire sont les complémentaires d'une ½ droite passant par O.

Etude de P^{-1} : $\begin{array}{l} U' \to U \\ (x,y) \mapsto (r,t) = P^{-1}(x,y) \end{array}$.

On pose $P^{-1}(x,y) = (\alpha(x,y), \beta(x,y))$. On cherche à calculer $\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}$, $\dfrac{\partial\alpha}{\partial y}$, $\dfrac{\partial\beta}{\partial x}$, $\dfrac{\partial\beta}{\partial y}$.

On a, pour $(x,y) \in U'$, $\mathrm{Jac}(P^{-1})_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\alpha}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial\alpha}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial\beta}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial\beta}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = (\mathrm{Jac}(P)_{P^{-1}(x,y)})^{-1}$

Or, $\mathrm{Jac}(P)_{(r,t)} = \begin{pmatrix} \cos t & -r\sin t \\ \sin t & r\cos t \end{pmatrix}$

Donc $(\mathrm{Jac}(P)_{(r,t)})^{-1} = \dfrac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos t & r\sin t \\ r\sin t & \cos t \end{pmatrix}$

Donc $\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}(x,y) = \cos t = \cos(\beta(x,y))$, $\dfrac{\partial\beta}{\partial x}(x,y) = -\dfrac{\sin t}{r} = \dfrac{-\sin(\beta(x,y))}{\alpha(x,y)}\dots$

Remarque :

On peut déterminer α, β en résolvant :

$\begin{cases} r\cos t = x \\ r\sin t = y \end{cases}$, c'est-à-dire $\begin{cases} \alpha(x,y) = r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \beta(x,y) = t = \mathrm{Arctan}(y/x) \end{cases}$ ($x > 0$)

- Composition :

Théorème :

Un composé de C^k–difféomorphismes est un C^k–difféomorphisme.

La réciproque d'un C^k–difféomorphisme aussi.

Démonstration :

Découle de la définition.

Exercice :

On cherche une condition nécessaire et suffisante sur $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ pour que $\varphi : (x,y) \mapsto (x + a\sin y, y + b\sin x)$ soit un C^∞–difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

On doit montrer que :

φ est de classe C^∞, son déterminant jacobien ne s'annule pas, que φ est injective et $\varphi(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$.

Déjà, φ est de classe C^∞.

On a pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\mathrm{Jac}(\varphi)_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 & a\cos y \\ b\cos x & 1 \end{pmatrix}$, de déterminant $1 - ab\cos y$

Il faut donc déjà que $|ab| < 1$.

Cette condition est suffisante : on suppose maintenant que $|ab|<1$:

On considère le système $(S)\begin{cases} x+a\sin y=u \\ y+b\sin x=v \end{cases}$, montrons que le système admet une unique solution pour tous $u,v\in\mathbb{R}$.

On a l'équivalence : $(S)\Leftrightarrow\begin{cases} x+a\sin y=u \\ y+b\sin(u-a\sin y)=v \end{cases}$

Et en notant $g_u : y\mapsto y+b\sin(u-a\sin y)$, on a :

$\forall y\in\mathbb{R}, g'_u(y)=1-ab\cos(u-a\sin y)>0$

Donc g_u est strictement croissante. Comme de plus $\lim_{y\to+\infty} g_u(y)=+\infty$ et $\lim_{y\to-\infty} g_u(y)=-\infty$, g_u est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Donc l'équation $g_u(y)=v$ a une unique solution $y\in\mathbb{R}$ pour tout $v\in\mathbb{R}$

Donc (*S*) a une unique solution.

Donc *f* est un C^∞–difféomorphisme si et seulement si $|ab|<1$

IV Cas des fonctions à valeurs réelles

Soit $f:\Omega\subset E\to\mathbb{R}$ où *E* est un espace de Banach.

On note, pour $A,B\in E$, $[A,B]=\{tB+(1-t)A, t\in[0;1]\}$

A) Cas où *E* est un espace euclidien : gradient

Si *f* est différentiable en *A*, alors $df_A\in E'$ est une forme linéaire.

Définition :

On appelle gradient de f en A l'unique vecteur $\overrightarrow{\mathrm{grad}}f(A)\in E$ tel que $\forall\vec{h}\in E, df_A(\vec{h})=<\overrightarrow{\mathrm{grad}}f(A),\vec{h}>$

Remarque :

On a vu que l'existence et l'unicité d'un tel vecteur est aussi valable dans un espace de Hilbert, donc on peut étendre la définition.

Proposition (gradient en base orthonormée de *E*) :

Soit $\mathfrak{B}=(\varepsilon_1,...\varepsilon_p)$ une base orthonormée de $(E,<,>)$.

Si $f:\Omega\subset E\to\mathbb{R}$ est différentiable en *A*, on a alors $\overrightarrow{\mathrm{grad}}f(A)=\sum_{j=1}^{p}(\partial_{j,\mathfrak{B}}f)(A)\varepsilon_j$,

C'est-à-dire que pour tout $\vec{h}=\sum_{j=1}^{p}x_j\varepsilon_j\in E$, on a :

$df_A(\vec{h})=<\overrightarrow{\mathrm{grad}}f(A),\vec{h}>=\sum_{j=1}^{p}x_j(\partial_{j,\mathfrak{B}}f)(A)$

Démonstration :

Le vecteur convient effectivement.

Remarque :

A $\|\vec{h}\|$ fixé, $df_A(\vec{h})$ est maximal lorsque $\vec{h}$ est dans la direction de $\overrightarrow{\text{grad}}f(A)$

Donc $\overrightarrow{\text{grad}}f(A)$ indique la direction dans laquelle la variation de f est maximale.

Exemple :

(1) $f_i : \begin{array}{l}\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ \vec{x}=(x_1...x_n)\mapsto x_i\end{array}$ (Où $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique)

Alors f_i est linéaire, continue, donc différentiable et $\forall A \in \mathbb{R}^n, df_i(A) = f_i$

Donc $\overrightarrow{\text{grad}}f_i = \varepsilon_i$ (où ε_i est le i-ème vecteur de la base canonique)

(2) $\det : \begin{array}{l}M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ A \mapsto \det A\end{array}$ est de classe C^∞, et :

$\forall A \in M_n(\mathbb{R}), \forall H \in M_n(\mathbb{R}) d\det_A(H) = \text{Tr}({}^t\text{com}(A)H)$

Si on munit $M_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $< M, N >= \text{Tr}({}^tM \times N)$, on a alors :

$(\overrightarrow{\text{grad}}\det)(A) = \text{com}(A)$

Propriété (En dimension 2 : gradient en coordonnées polaires) :

On note E le plan euclidien orienté rapporté à $(\vec{i}, \vec{j})$ orthonormée.

Soit $f : \Omega \subset E \to \mathbb{R}$ de classe C^1. On pose, pour (r,t) tel que $(r\cos t, r\sin t) \in \Omega$, $F(r,t) = f(r\cos t, r\sin t)$.

Alors F est de classe C^1 et pour tout (r,t) tel que $r\cos t.\vec{i} + r\sin t.\vec{j} \in \Omega$, on a :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{\text{grad}}f)(r\cos t, r\sin t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos t, r\sin t)\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos t, r\sin t)\vec{j} \\ &= \frac{\partial F}{\partial r}(r,t)\vec{u}_t + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial t}(r,t)\vec{u}_{t+\pi/2}\end{aligned}$$

Où $\vec{u}_t = \cos t.\vec{i} + \sin t.\vec{j}$.

Démonstration :

On sait que $P : \begin{array}{l}]0,+\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ (r,t) \mapsto (r\cos t, r\sin t)\end{array}$ est un C^∞–difféomorphisme local.

Pour $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on note alors (r_0, t_0) tel que $\begin{cases} x_0 = r_0\cos t_0 \\ y_0 = r_0\sin t_0 \end{cases}$

Alors P réalise un C^∞–difféomorphisme d'un voisinage de (r_0, t_0) dans un voisinage de (x_0, y_0), et $\text{Jac}(P)_{(r,t)} = \begin{pmatrix} \cos t & -r\sin t \\ \sin t & r\cos t \end{pmatrix}$

On a $F(r,t) = f(r\cos t, r\sin t) = (f \circ P)(r,t)$

Donc : $\frac{\partial F}{\partial r}(r,t) = \frac{\partial f}{\partial x} \circ P(r,t).\cos t + \frac{\partial f}{\partial y} \circ P(r,t).\sin t$

Et $\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial t}(r,t) = \frac{\partial f}{\partial x} \circ P(r,t).(-\sin t) + \frac{\partial f}{\partial y} \circ P(r,t).\cos t$

Donc $\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} \circ P(r,t) = \cos t.\frac{\partial F}{\partial r}(r,t) - \frac{\sin t}{r}\frac{\partial F}{\partial t}(r,t) \\ \frac{\partial F}{\partial y} \circ P(r,t) = \sin t.\frac{\partial F}{\partial r}(r,t) + \frac{\cos t}{r}\frac{\partial F}{\partial t}(r,t) \end{cases}$

Ainsi, $\overrightarrow{\text{grad}} f \circ P(r,t) = \frac{\partial F}{\partial r}(r,t)(\cos t.\vec{i} + \sin t.\vec{j}) + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial t}(r,t)(-\sin t.\vec{i} + \cos t.\vec{j})$

B) Accroissements finis

- Théorème (formule intégrale) :

Soit Ω un ouvert de E, $A,B \in E$ tels que $[A,B] \subset \Omega$

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^1.

Alors $f(B) - f(A) = \int_0^1 df_{tB+(1-t)A}(B-A)dt$

Si l'espace est euclidien (ou de Hilbert),

$$f(B) - f(A) = \int_0^1 < \overrightarrow{\text{grad}} f(tB+(1-t)A), B-A > dt$$

$$= < \int_0^1 \overrightarrow{\text{grad}} f(tB+(1-t)A)dt, B-A >$$

Démonstration :

On pose $\varphi(t) = f(tB+(1-t)A) = f(A+t(B-A))$ pour $t \in [0,1]$

Alors φ est la composée de $\sigma : t \mapsto tB+(1-t)A$ et de f, qui sont de classe C^1 donc φ est C^1 et $\forall t \in [0,1], \varphi'(t) = (df)_{tB+(1-t)A}(\sigma'(t)) = (df)_{tB+(1-t)A}(B-A)$

Donc $f(B) - f(A) = \varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t)dt$

Remarque :

Soit $\alpha : [0;1] \to E$ continue par morceaux, où E est un espace de Hilbert, et $v \in E$.

Alors $\int_0^1 < \alpha(t), v > dt = < \int_0^1 \alpha(t)dt, v >$

Démonstration :

Si E est de dimension finie, il suffit d'en prendre une base et d'utiliser la linéarité de l'intégrale.

Cas général :

On suppose $v \neq 0$ (le cas $v = 0$ est évident).

Si α est en escalier sur $[0;1]$, on a bien le résultat.

Sinon, soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors φ en escalier sur $[0;1]$ tel que $\|\alpha - \varphi\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2\|v\|}$.

On a alors :

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^1 < \alpha(t), v > dt - < \int_0^1 \alpha(t)dt, v >\right| &\leq \left|\int_0^1 < \alpha(t)-\varphi(t), v > dt - < \int_0^1 \alpha(t)-\varphi(t)dt, v >\right| \\
&\quad + \underbrace{\left|\int_0^1 < \varphi(t), v > dt - < \int_0^1 \varphi(t)dt, v >\right|}_{=0} \\
&\leq \int_0^1 \left|< \alpha(t)-\varphi(t), v >\right| dt + \left|< \int_0^1 \alpha(t)-\varphi(t)dt, v >\right| \\
&\leq \int_0^1 \|\alpha(t)-\varphi(t)\| \|v\| dt + \left\|\int_0^1 \alpha(t)-\varphi(t)dt\right\| \|v\| \\
&\leq \|\alpha-\varphi\|_\infty \|v\| + \|\alpha-\varphi\|_\infty \|v\| \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

- Inégalité des accroissements finis :

Théorème :
Soit $\Omega \subset E$ ouvert convexe, $f : \Omega \subset E \to \mathbb{R}$ de classe C^1.
(1) On suppose qu'il existe M positif tel que pour tout $A \in \Omega$, $\left\|df_A\right\| \leq M$
Alors $\forall A, B \in \Omega, |f(B) - f(A)| \leq M\|B - A\|_E$
(2) Si E est un espace euclidien (ou de Hilbert) :
On suppose qu'il existe M positif tel que $\forall A \in \Omega, \left\|\overrightarrow{\text{grad}} f(A)\right\|_E \leq M$.
Alors $\forall A, B \in \Omega, |f(B) - f(A)| \leq M\|B - A\|_E$

Démonstration :
On a, pour tous $A, B \in \Omega$:

$$|f(B) - f(A)| = \left|\int_0^1 df_{tA+(1-t)B}(B - A)dt\right|$$

$$\leq \int_0^1 \left|df_{tA+(1-t)B}(B - A)\right|dt \leq \int_0^1 \left\|df_{tA+(1-t)B}\right\|\|B - A\|dt$$

Si E est un espace de Hilbert :
L'application $\varphi : \begin{array}{l} E \to \mathbb{R} \\ \vec{v} \mapsto <\vec{a}, \vec{v}> \end{array}$ est linéaire, continue et on a déjà vu que $\|\varphi\| = \|\vec{a}\|_E$.
Le résultat à montrer en découle.

Remarque :
Si Ω est connexe par arcs (non convexe) :
On admet que deux points de Ω peuvent être joints par un chemin de classe C^1 (on peut faire un chemin polygonal par morceaux, puis « affiner »… Ou C^1 par morceaux et continue suffit)
Soient $A, B \in \Omega$, $\sigma : [0,1] \to \Omega$ de classe C^1 tel que $\sigma(0) = A$, $\sigma(1) = B$.
Alors pour $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^1, on a

$$f(B) - f(A) = \int_0^1 \frac{d}{dt}(f \circ \sigma(t))dt = \int_0^1 df_{\sigma(t)}(\sigma'(t))dt$$

S'il existe M positif tel que $\forall H \in \Omega, \left\|df_H\right\| \leq M$, alors

$|f(B) - f(A)| \leq M\int_0^1 \|\sigma'(t)\|dt$, et $\int_0^1 \|\sigma'(t)\|dt$ correspond à la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}_\sigma$

Ainsi, $|f(B) - f(A)| \leq M.dg_\Omega(A, B)$

Où $dg_\Omega(A, B)$ est la distance géodésique de A à B dans Ω, c'est-à-dire la borne inférieure de l'ensemble des longueurs des arcs $\overset{\frown}{AB}_\sigma$ pour σ de classe C^1 reliant A et B.

- Application :

Théorème : caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert convexe.
Soit Ω un ouvert convexe, $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Alors f est constante si et seulement si elle est de classe C^1 et $\forall A \in \Omega, df_A = 0$
Complément : c'est valable si Ω est connexe.

Démonstration :
Si f est constante, alors elle a des dérivées partielles nulles donc de classe C^1.

Et pour tout $A \in \Omega$, on a $\forall \vec{u} \in E, df_A(\vec{u}) = D_{\vec{u}} f(A) = 0$ donc $df_A = 0 \in E'$

La réciproque, c'est l'inégalité des accroissements finis avec $M = 0$.

Si Ω et seulement connexe :

On suppose que $A \in \Omega, df_A = 0$

(Le sens direct est vrai pour la même raison que précédemment)

Soit $A_0 \in \Omega$, $X = \{B \in \Omega, f(A_0) = f(B)\}$

Comme *f* est de classe C^1, elle est continue donc *X* est fermé dans Ω.

De plus, $X \neq \varnothing$ car $A_0 \in X$.

Enfin, *X* est ouvert, car pour $B \in X$, il existe $r > 0$ tel que $B_0(B,r) \subset \Omega$, mais comme une boule est convexe, d'après le point précédent,

$\forall M \in B_0(B,r), f(M) = f(B) = f(A_0)$

Donc $B_0(B,r) \subset X$, ce qui montre que *X* est aussi ouvert, donc $X = \Omega$ puisque Ω est connexe.

- Fonctions convexes sur un ouvert convexe Ω :

Définition :

Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est dite convexe si

$\forall (A,B) \in \Omega^2, \forall t \in [0;1], f(t.A + (1-t)B) \leq t.f(A) + (1-t)f(B)$

Rappel :

$f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur l'intervalle *I* est convexe si et seulement si sa dérivée est croissante.

Remarque :

$f : \Omega \to \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si pour tous $A, B \in \Omega$, $f_{/[A,B]}$ est convexe, ou encore si et seulement si pour tous $A, B \in \Omega$, $t \mapsto f(t.A + (1-t).B)$ est convexe (définie sur $[0;1]$)

En effet :

Si f est convexe, alors $\psi_{A,B} : t \mapsto f(t.A + (1-t).B)$ est la composée de $t \mapsto t.A + (1-t).B$ qui est affine et de *f* qui est convexe, donc est convexe.

Réciproquement, si $\psi_{A,B}$ est convexe pour tous $A, B \in \Omega$, alors

$$\forall A, B \in \Omega, f(t.A + (1-t).B) = \psi_{A,B}(t) = \psi_{A,B}(t \times 1 + (1-t) \times 0)$$
$$\leq t\underbrace{\psi_{A,B}(1)}_{f(A)} + (1-t)\underbrace{\psi_{A,B}(0)}_{f(B)}$$

Proposition :

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^1, Ω un convexe.

Alors *f* est convexe si et seulement si $\forall (A,B) \in \Omega^2, (df_A - df_B)(A - B) \geq 0$

Démonstration :

On introduit comme précédemment $\psi_{A,B} : t \mapsto f(t.A + (1-t).B)$ définie sur $[0;1]$.

Alors $\psi_{A,B}$ est de classe C^1, et $\forall t \in [0;1], \psi'_{A,B}(t) = df_{tA+(1-t)B}(A - B)$

Si *f* est convexe, alors pour tous $A, B \in \Omega$, $\psi_{A,B}$ l'est c'est-à-dire que $\psi'_{A,B}$ est croissante donc $\psi'_{A,B}(1) - \psi'_{A,B}(0) = (df_A - df_B)(A - B) \geq 0$

Réciproquement, supposons que $\forall (A,B)\in\Omega^2, (df_A - df_B)(A-B)\geq 0$; Soient alors $A,B\in\Omega^2$. On a, pour $t,t'\in[0;1]$ avec $t'>t$,

$$\begin{aligned}\psi'_{A,B}(t')-\psi'_{A,B}(t) &= (df_{t'A+(1-t')B}-df_{tA+(1-t)B})(A-B)\\ &= (df_{t'A+(1-t')B}-df_{tA+(1-t)B})(\tfrac{1}{t'-t}(t'A+(1-t')B-tA-(1-t)B))\\ &= \frac{1}{t'-t}(df_{t'A+(1-t')B}-df_{tA+(1-t)B})(t'A+(1-t')B-tA-(1-t)B)\geq 0\end{aligned}$$

Donc $\psi'_{A,B}$ est croissante, donc $\psi_{A,B}$ est convexe et f aussi.

C) Développements limités et formule de Taylor

- A l'ordre 1 :

Voir différentiabilité.

Théorème :

Soit $f:\Omega\subset E\to\mathbb{R}$ de classe C^1

Alors pour tout $A\in\Omega$, f admet au voisinage de A le développement

$f(A+H)=f(A)+(df_A)(H)+o(\|H\|)$

Si E est de dimension finie, $\mathfrak{B}=(e_1,\dots e_p)$ une base de E, alors pour tout $H=\sum_{j=1}^{p}h_je_j\in E$, $f(A+H)=f(A)+\sum_{j=1}^{p}h_j(\partial_{j,\mathfrak{B}}f)(A)+o(\|H\|)$

Démonstration :

Si f est de classe C^1, elle est différentiable en tout point.

- Matrice hessienne et différentielle seconde pour E de dimension finie.

Soit $\mathfrak{B}=(\varepsilon_1,\dots\varepsilon_p)$ une base de E, $f:\Omega\to\mathbb{R}$ de classe C^2.

Pour tout $A\in\Omega, df_A\in E^*=E'$ est définie par

$$\forall H=\sum_{j=1}^{p}h_j\varepsilon_j\in E, df_A(H)=\sum_{j=1}^{p}h_j(\partial_jf)(A)$$

Comme f est de classe C^2, $df:\Omega\to E^*$ est de classe C^1, c'est-à-dire que les ∂_jf sont de classe C^1.

On note $(\varepsilon_1^*,\dots\varepsilon_n^*)$ la base duale de $\mathfrak{B}$.

Ainsi, $df_A=\sum_{j=1}^{p}(\partial_jf)(A)\varepsilon_j^*$

On cherche les dérivées par rapport à ε_k de $df:A\mapsto df_A$:

On a $\forall A\in\Omega, (\partial_k(df))(A)=\sum_{j=1}^{p}\partial_k(\partial_jf)(A)\varepsilon_j^*$

Pour $\vec{h}=\sum_{j=1}^{p}h_j\varepsilon_j$, $\vec{k}=\sum_{j=1}^{p}k_j\varepsilon_j$, on a ainsi :

$$d^2f_A(\vec{h})=\sum_{i=1}^{p}\partial_i(df)(A)h_i=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}(\partial_i\partial_jf)(A)h_i\varepsilon_j^*$$

Puis $d^2 f_A(\vec{h}) = \sum_{i=1}^{p} \partial_i (df)(A) h_i = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} (\partial_i \partial_j f)(A) h_i \varepsilon_j^*$

De plus, $(d^2 f_A(\vec{h}))(\vec{k})$ est symétrique en $(\vec{h},\vec{k})$ d'après le théorème de Schwarz.

Donc $B_A : (\vec{h},\vec{k}) \in E^2 \mapsto (d^2 f_A(\vec{h}))(\vec{k}) \in \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire symétrique.

La matrice de B_A dans la base $\mathfrak{B}$, $((\partial_i \partial_j f)(A))_{\substack{i=1..p \\ j=1..p}}$ s'appelle matrice hessienne de f en A relativement à $\mathfrak{B}$.

Exemple :

Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2. La matrice hessienne de f (relativement à la base canonique) est

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}$$

- Formule de Taylor à l'ordre 2 :

Théorème :

Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2, $A \in \Omega$.

Au voisinage de A, f admet le développement limité :

$$f(A+H) = f(A) + \underbrace{\sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(A)}_{df_A} + \frac{1}{2}\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(A)\right)}_{(d^2 f_A(H))(H)} + o(\|H\|^2)$$

Où $H = (h_1, \dots h_n)$.

Remarque :

Pour un espace E de Banach, $f : \Omega \subset E \to \mathbb{R}$ de classe C^2,

$$f(A+H) = f(A) + df_A(H) + \frac{1}{2}(d^2 f_A(H))(H) + o(\|H\|^2)$$

Démonstration :

Soit $r > 0$ tel que $B_0(A,r) \subset \Omega$.

Pour $\|H\| < r$, posons $\varphi(t) = f(A+tH)$, $t \in [0,1]$.

Alors φ est de classe C^2, et $\forall t \in [0;1], \varphi'(t) = df_{A+tH}(H) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(A+tH)$

Puis $\varphi''(t) = ((d^2 f_{A+tH})(H))(H) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(A+tH)$

D'après la formule de Taylor intégral à φ entre 0 et 1,

$$f(A+H) - f(A) - df_A(H) = \varphi(1) - \varphi(0) - \varphi'(0) = \int_0^1 (1-t)\varphi''(t)dt$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors $\alpha \in]0,r]$ tel que

$\forall H \in E, \|H\| < \alpha \Rightarrow |||d^2 f_{A+H} - d^2 f_A||| < \varepsilon$ (car $A \mapsto d^2 f_A$ est continue)

Ainsi, pour $\|H\| < \alpha$,

$$f(A+H) - f(A) - df_A(H) - \frac{1}{2}(d^2 f_A(H))(H) = \int_0^1 (1-t)(\varphi''(t) - (d^2 f_A(H))(H))dt$$

Soit :

$$\left|\ldots\right| \leq \int_0^1 \left|(d^2 f_{A+tH}(H))(H) - (d^2 f_A(H))(H)\right| dt$$

$$\leq \int_0^1 \left\|(d^2 f_{A+tH}(H)) - (d^2 f_A(H))\right\| \times \|H\| dt$$

$$\leq \int_0^1 \underbrace{\left|\left|\left|d^2 f_{A+tH} - d^2 f_A\right|\right|\right|}_{\leq \varepsilon \text{ car } \|tH\| \leq \alpha} \times \|H\|^2 dt \leq \varepsilon . \|H\|^2$$

D) Extremums

- Condition suffisante d'existence :

Théorème des bornes :
Soit K un compact de E, non vide, et $f : K \to F$ continue.
Alors f est bornée sur K et atteint ses bornes.

- Condition nécessaire d'extremum sur un ouvert pour une fonction de classe C^1

Théorème :
Soit Ω un ouvert de E, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^1
On suppose que f atteint en A un extremum local.
Alors $df_A = 0$.

Définition :
Un point A en lequel df_A est nulle est appelé point critique de f.
Si $E = \mathbb{R}^n$: A est un point critique si et seulement si $\forall i \in [\![1, n]\!], \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(A) = 0$ ou encore si et seulement si $\overrightarrow{\text{grad}} f(A) = \vec{0}$

Corollaire : le théorème s'énonce aussi ainsi :
Tout extremum sur un ouvert d'une fonction de classe C^1 est un point critique.

Démonstration (du théorème) :
Si A est un extremum local, alors pour tout $\vec{u} \in E$,
$\varphi_{\vec{u}} : t \mapsto f(A + t\vec{u}) \in \mathbb{R}$, définie au voisinage de 0, est de classe C^1, présente un extremum en $t = 0$.
Donc $\varphi'_{\vec{u}}(0) = 0$. Mais $\varphi'_{\vec{u}}(0) = df_A(\vec{u})$
Donc $\forall \vec{u} \in E, df_A(\vec{u}) = 0$, donc $df_A = 0$
Remarque :
Soit $K \neq \varnothing$ un compact de E, $U = \overset{\circ}{K}$, $f : K \to \mathbb{R}$.
On suppose que f est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur U.
Alors f présente un maximum et un minimum sur K, qui sont atteints :
- Soit en des points critiques de f
- Soit sur $\partial K = K \setminus U$

- Rappel sur la dimension 1 :

Soit $I = [a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^2, et on suppose qu'il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $f'(x_0) = 0$.
Si $f''(x_0) > 0$, alors $f(x_0)$ est un minimum local strict

Si $f''(x_0)<0$, alors $f(x_0)$ est un maximum local strict

Si $f''(x_0)=0$, on ne peut rien dire.

(Extremum strict :

Il existe $\alpha>0$ tel que $\forall x\in \left]x_0-\alpha, x_0+\alpha\right[\setminus\{x_0\}, f(x)>f(x_0)$)

- Etude au voisinage d'un point critique :

Théorème (hors programme) :

Soit $A\in\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $f:\Omega\to\mathbb{R}$ de classe C^2 tel que A est un point critique de f.

On note H la matrice hessienne de f en A relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Alors :

(1) Si $f(A)$ est un minimum local, alors H est symétrique positive

(2) Si $f(A)$ est un maximum local, alors H est symétrique négative.

(3) Si H est définie positive, alors $f(A)$ est un minimum local strict

(4) Si H est définie négative, alors $f(A)$ est un maximum local strict.

Rappel : H est positive si $\forall U\in M_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tUHU\geq 0$

Démonstration :

(1) Pour tout $\vec{u}\in\mathbb{R}$, posons $\varphi_{\vec{u}}(t)=f(A+t\vec{u})$ pour t au voisinage de 0.

Alors $\varphi_{\vec{u}}(0)$ est un minimum local de $\varphi_{\vec{u}}$

Comme $\varphi_{\vec{u}}$ est de classe C^2, $\varphi''_{\vec{u}}(0)\geq 0$.

Or, $\varphi''_{\vec{u}}(t)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}u_iu_j\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}$ où $\vec{u}=(u_1,\dots u_n)$

Donc $\varphi''_{\vec{u}}(0)={}^tUHU\geq 0$ où $U=\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_n\end{pmatrix}$

Donc comme c'est valable pour tout $\vec{u}\in E$, H est bien positive.

(3) On utilise la formule de Taylor à l'ordre 2 :

Prenons $\|\ \|$ définie sur $\mathbb{R}^n$ par $\|X\|=\sqrt{{}^tXHX}$

($X\mapsto {}^tXHX$ est une forme quadratique définie positive)

D'après la formule de Taylor, au voisinage de A, on a :

$$f(A+\vec{u})=f(A)+\underbrace{df_A(\vec{u})}_{=0}+\tfrac{1}{2}{}^tUHU+o(\|U\|^2)$$

Donc $f(A+\vec{u})-f(A)=\frac{1}{2}{}^tUHU+o(\|U\|^2)$

Ainsi, il existe $\alpha>0$ tel que $\forall u\in\mathbb{R}^n, \|u\|<\alpha\Rightarrow \left|o(\|U\|^2)\right|<\frac{1}{2}{}^tUHU$

Donc pour $\|u\|<\alpha$, $f(A+\vec{u})>f(A)$.

- Description des points critiques :

Définition :

Soit $A\in\Omega$ un point critique de f de classe C^2. On note H la matrice hessienne de f

Si H est définie positive, A est un minimum local strict

Si H est définie négative, A est un maximum local strict.

Si H n'est ni positive ni négative, A est un col, c'est-à-dire que pour tout voisinage V de A, il existe $M,N\in V$ tels que $f(M)<f(A)<f(N)$

- Cas de la dimension 2 :

Théorème :

Soit $f:\Omega\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe C^2, $A\in\Omega$.

On pose $p=\frac{\partial f}{\partial x}(A)$, $q=\frac{\partial f}{\partial y}(A)$, $r=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A)$, $t=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A)$, $s=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(A)$

Ainsi, la matrice hessienne de *f* en *A* est $H=\begin{pmatrix} r & s \\ s & t\end{pmatrix}$. Alors :

(1) A est un point critique si et seulement si $p=q=0$.

(2) On suppose que $p=q=0$:

Si $\Delta=r.t-s^2>0$, alors A est un extremum local strict :

Un minimum local strict si $r>0$ (ou $r+t>0$)

Un maximum local strict si $r<0$ (ou $r+t<0$)

Si $\Delta<0$, alors A est un col.

Si $\Delta=0$, A est dégénéré : on ne peut en général rien dire.

Démonstration :

Soient λ,μ les deux valeurs propres (réelles) de *H*. On a alors $\lambda\mu=\det H=\Delta$

Si $\Delta>0$, on a :

- Soit $\lambda>0$ et $\mu>0$ donc H est définie positive donc on a un minimum local strict (et $r+t=\mathrm{Tr}(H)=\lambda+\mu>0$)

- Soit $\lambda<0$ et $\mu<0$ donc H est définie négative donc on a un maximum local strict.

Si $\Delta<0$, H n'est ni positive ni négative donc A est un col

Si $\Delta=0$, on peut supposer que $\lambda=0$:

- Soit $\mu>0$ et A n'est pas un maximum local

- Soit $\mu<0$ et A n'est pas un minimum local

- Soit $\mu=0$ et il n'y a rien à dire (sauf que $H=0$)

Proposition :

Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$, $f:\Omega\to\mathbb{R}$ de classe C^2.

Alors *f* est convexe si et seulement si pour tout $A\in\Omega$, $H_A=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(A)\right)_{\substack{i=1..n\\ j=1..n}}$ est symétrique positive.

Démonstration :

La condition est nécessaire :

Si *f* est convexe, alors pour tous $A,B\in\Omega$, $\varphi_{A,B}:t\mapsto f(t.A+(1-t).B)$ est convexe (car *f* est convexe et $t\mapsto t.A+(1-t).B$ est affine)

Donc $\forall t\in[0,1], 0\leq\varphi''_{A,B}(t)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}u_iu_j\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(t.A+(1-t).B)$

Où $\vec{u}=A-B=(u_1,...u_n)$

Avec $t=1$, on obtient $\forall U\in M_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tUH_AU\geq 0$

La condition est suffisante :

Si H_A est symétrique positive, alors $\forall A,B\in\Omega,\forall t\in[0,1],\varphi''_{A,B}(t)\geq 0$ donc $\varphi_{A,B}$ est convexe. En particulier, $\forall t\in[0,1],\varphi_{A,B}(t.1+(1-t).0)\leq t.\varphi_{A,B}(1)+(1-t)\varphi_{A,B}(0)$

C'est-à-dire $\forall t \in [0,1], f(t.A+(1-t).B) \leq t.f(A)+(1-t).f(B)$

- Laplacien, fonctions sous–harmoniques, principe du maximum.

Pour $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2 et $A \in \Omega$, on pose

$$(\Delta f)(A) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(A) = \mathrm{Tr}(H_A)$$

Définition :

On dit que f est harmonique lorsqu'elle est de classe C^2 et $\Delta f = 0$, et sous–harmonique lorsque $\forall A \in \Omega, \Delta f(A) \geq 0$

Remarque :

Si f est convexe et de classe C^2, elle est sous–harmonique (car alors H_A est symétrique positive pour tout $A \in \Omega$, donc $\mathrm{Tr}(H_A) \geq 0$)

Exercice :

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, borné, et $K = \overline{U}$, compact.

Soit $f : K \to \mathbb{R}$, continue sur K et de classe C^2 sur U telle que $\forall A \in U, \Delta f(A) \geq 0$

Alors $\sup_K f = \sup_{\partial K} f$

Démonstration :

Si $\forall A \in U, \Delta f(A) > 0$:

Alors d'après le théorème des bornes, il existe $M_0 \in K$ tel que $f(M_0) = \sup_K f$

Si on avait $M_0 \in U$, alors M_0 serait un point critique et un maximum local. Donc H_{M_0} serait symétrique négative et donc $\Delta f(M_0) = \mathrm{Tr}(H_{M_0}) \leq 0$, ce qui est faux.

Si maintenant $\forall A \in U, \Delta f(A) \geq 0$:

Pour $\varepsilon > 0$, on pose $g_\varepsilon(M) = f(M) + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} x_i^2$. Alors g_ε est continue sur K.

Sur U, on a $\forall M \in U, \Delta g_\varepsilon(M) = \Delta f(M) + 2n\varepsilon > 0$

Donc le cas précédent s'applique et pour tout $M \in K$,

$f(M) \leq g_\varepsilon(M) \leq \sup_{\partial K} g_\varepsilon(M)$

Or, K est borné, donc il existe $c > 0$ tel que $\forall M \in K, x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leq c$ où $M = (x_1, \ldots x_n)$

Pour $M \in \partial K$, $g_\varepsilon(M) \leq f(M) + \varepsilon.c$, donc $\forall M \in K, f(M) \leq g_\varepsilon(M) \leq \sup_{\partial K} f + \varepsilon.c$

Comme c'est valable pour tout $\varepsilon > 0$, on a bien $\forall M \in K, f(M) \leq \sup_{\partial K} f$

- Exemple : problème de Laplace.

Soit K un compact, $U = \mathring{K}$. Soit $\varphi : \partial K \to \mathbb{R}$, continue.

On cherche s'il existe $f : K \to \mathbb{R}$ continue telle que $f_{/\partial K} = \varphi$ et f est de classe C^2 harmonique sur U : $\Delta f = 0$.

Ce problème a au plus une solution.

Démonstration :

Si f et g sont deux solution, alors $f - g$ est sous–harmonique ($\Delta(f-g) = 0 \geq 0$) sur U, continue sur K et nulle sur ∂K.

Donc $f - g \leq \sup_{\partial K}(f-g) = 0$, et de même $g - f \leq \sup_{\partial K}(g-f) = 0$. Donc $f = g$.