Chapitre 16 : Intégration de fonctions continues par morceaux sur un intervalle non compact

But :

Donner un sens aux intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt$, $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(t-1)}}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega .t}dt$ …

Rappel sur les fonctions continues par morceaux :

- Sur un segment, $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ est continue par morceaux s'il existe une subdivision $a=a_0<a_1<...<a_p=b$ telle que $\forall i\in [\![0,p-1]\!]$, $f_{/]a_i,a_{i+1}[}$ est continue, et *f* a des limites à droite et à gauche (finies) en tous les a_i.

Proposition :
Une fonction continue par morceaux sur un segment a un nombre fini de discontinuités qui sont de première espèce (il y a une limite finie à droite et à gauche en tout point)
Une fonction continue par morceaux sur un segment est bornée.

- Sur un intervalle non compact *I* :

$f:I\to\mathbb{C}$ est continue par morceaux lorsque la restriction de *f* à tout segment inclus dans *I* est continue par morceaux.

Attention : une telle fonction peut avoir une infinité de points de discontinuité (toujours de première espèce) et peut ne pas être bornée.

Exemples :
Sur $I=[0;+\infty[$
Une application $f:I\to\mathbb{C}$ continue par morceaux a soit un nombre fini de discontinuités, soit une infinité qu'on peut classer dans une suite a_n qui tend vers $+\infty$
Exemple : $E(x)$
Sur $I=]0;1]$. Dans le pire des cas, il existe une suite ε_n tendant vers 0 de discontinuités de première espèce.
Exemple : $E(\frac{1}{x})$
Si $I=\mathbb{R}$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ continue par morceaux peut avoir deux suites de points de discontinuité qui tendent l'une vers $+\infty$, l'autre vers $-\infty$

Définition (locale) :
On appelle singularité d'un intervalle *I* non compact les bornes de *I* (éventuellement infinies) qui ne sont pas dans *I*.

I Cas des fonctions positives (sur I non compact)

A) Définition

Soit $f: I \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et positive. f est dite intégrable (sommable) s'il existe $M \geq 0$ tel que $\forall [a,b] \subset I, \int_a^b f(t)dt \leq M$.

Pour une telle fonction, on pose $\int_I f = \sup_{[a,b]\subset I} \int_a^b f(t)dt$

Remarque :

Cette définition a un sens même si I est compact ; on retrouve alors la définition de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux positive sur un segment.

En effet, si $I = [\alpha, \beta]$, $f: I \to \mathbb{R}$ continue par morceaux positive, alors

$$\forall [a,b] \subset I, \int_\alpha^\beta f = \underbrace{\int_\alpha^a f}_{\geq 0} + \int_a^b f + \underbrace{\int_b^\beta f}_{\geq 0} \geq \int_a^b f$$

B) Caractérisation de l'intégrale à l'aide de primitive

- Cas d'une seule singularité :

Théorème :

Soit $I = [a,b[$ où $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ($b > a$)

Et $f: [a,b[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux positive.

Pour $x \in I$, on pose $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Alors f est intégrable sur I si et seulement si F est bornée ou si F tend vers une limite finie quand $x \to b^-$, et dans ce cas, $\int_{[a,b[} f(t)dt = \lim_{x\to b^-} F(x) = \lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)dt$

Remarque :

On a l'énoncé analogue pour $]a,b]$, $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $b \in \mathbb{R}$ ($a < b$)

Si f est partout continue, F est une primitive de f.

Démonstration :

- Comme f est positive, F est croissante et positive.

Donc F est majorée si et seulement si elle est bornée donc si et seulement si F a une limite finie en b.

- Si f et intégrable, par définition de $\int_{[a,b[} f(t)dt$, on a, pour tout $x \in [a,b[$, $[a,x] \subset [a,b[$. Donc $F(x) = \int_a^x f \leq \int_{[a,b[} f$, et F est bornée.

Inversement, si F est bornée, alors pour tout $[\alpha, \beta] \subset [a,b[$,

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt \leq \int_a^\beta f(t)dt = F(\beta) \leq \sup_{t\in[a,b[} F(t)$$

- Calcul de l'intégrale :

Par définition, pour tout $x \in [a,b[$, $x \in [a,b[, F(x) \leq \int_{[a,b[} f$

Donc $\lim_{x\to b^-} F(x) \leq \int_{[a,b[} f$.

Par ailleurs, pour tout $[\alpha,\beta]\subset[a,b[$, on a :

$\int_\alpha^\beta f = F(\beta)-\underbrace{F(\alpha)}_{\geq 0}\leq F(\beta)\leq \lim_{x\to b^-}F(x)$

Donc $\int_{[a,b[} f \leq \lim_{x\to b^-}F(x)$

Ce qui montre l'égalité.

- Cas de deux singularités :

Théorème :

Soit $I =]a,b[$, où $a\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$, $b\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$.

Soit $f: I\to\mathbb{R}$ continue par morceaux positive, et $c\in\ ]a,b[$

Alors *f* est intégrable si et seulement si $f_{/[c,b[}$ et $f_{/]a,c]}$ le sont, et dans ce cas

$\int_{]a,b[} f = \int_{]a,c]} f + \int_{[c,b[} f$

Corollaire :

Dans ces conditions, *f* est intégrable si et seulement si $\int_c^x f(t)dt$ a des limites finies quand $x\to b$ et $x\to a$ et dans ce cas $\int_{]a,b[} f = \lim_{x\to a}\int_x^c f + \lim_{x\to b}\int_c^x f$.

Démonstration :

Lemme :

Soit *f* continue par morceaux, $J\subset I$ un intervalle.

Si *f* est intégrable sur *I*, alors *f* est intégrable sur *J* et $\int_J f(t)dt \leq \int_I f(t)dt$.

En effet, tout segment $[a,b]\subset J$ est aussi inclus dans I…

Ainsi, si *f* est intégrable, alors $f_{/]a,c]}$ et $f_{/[c,b[}$ aussi.

Réciproquement :

Si $f_{/]a,c]}$ et $f_{/[c,b[}$ sont intégrables, alors pour tout $[\alpha,\beta]\subset\ ]a,b[$:

Soit $c\notin[\alpha,\beta]$ et donc

Soit $[\alpha,\beta]\subset\ ]a,c]$ et $\int_\alpha^\beta f \leq \int_{]a,c]} f \leq \int_{]a,c]} f + \int_{[c,b[} f$

Soit $[\alpha,\beta]\subset[c,b[$ et $\int_\alpha^\beta f \leq \int_{[c,b[} f \leq \int_{]a,c]} f + \int_{[c,b[} f$

Si $c\in[\alpha,\beta]$, alors $\int_\alpha^\beta f = \int_\alpha^c f + \int_c^\beta f \leq \int_{]a,c]} f + \int_{[c,b[} f$

Donc dans tous les cas l'intégrale est majorée.

Donc *f* est intégrable, et en passant au sup sur $[\alpha,\beta]\subset\ ]a,b[$, on aura

$\int_{]a,b[} f \leq \int_{]a,c]} f + \int_{[c,b[} f$.

Pour l'autre inégalité :

Soit $\varepsilon>0$. Par définition de $\int_{]a,c]} f$ et $\int_{[c,b[} f$, il existe $\beta\in[c,b[$ et $\alpha\in\ ]a,c]$ tels que $\int_\alpha^c f(t)dt \geq \int_{]a,c]} f - \varepsilon/2$ et $\int_c^\beta f(t)dt \geq \int_{[c,b[} f - \varepsilon/2$

Alors $\int_{]a,b[} f \geq \int_\alpha^\beta f = \int_\alpha^c f(t)dt + \int_c^\beta f(t)dt \geq \int_{]a,c]} f + \int_{[c,b[} f - \varepsilon$

Et comme c'est valable pour tout $\varepsilon>0$, on a bien $\int_{]a,b[} f \geq \int_{]a,c]} f + \int_{[c,b[} f$.

C) Exemples fondamentaux

Théorème :

Soit $\alpha\in\mathbb{R}$

Alors $t\mapsto\dfrac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ si et seulement si $\alpha>1$, et dans ce cas $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^\alpha}=\frac{1}{\alpha-1}$

$t\mapsto\dfrac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0;1]$ si et seulement si $\alpha<1$ et dans ce cas $\displaystyle\int_0^1\frac{dt}{t^\alpha}=\frac{1}{1-\alpha}$.

Remarque :

$t\mapsto\dfrac{1}{t^\alpha}$ n'est jamais intégrable sur $]0;+\infty[$.

Démonstration :

Déjà, *f* est positive sur $[1,+\infty[$. Il suffit donc d'étudier $\displaystyle\int_1^x\frac{dt}{t^\alpha}$ pour $x\in[1,+\infty[$

Si $\alpha\neq1$, on a $\displaystyle\int_1^x\frac{dt}{t^\alpha}=\left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^\alpha=\frac{x^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}$

Qui a une limite finie si et seulement si $\alpha>1$, et dans ce cas cette limite est $\dfrac{1}{1-\alpha}$

Si $\alpha=1$, $\displaystyle\int_1^x\frac{dt}{t^\alpha}=\ln x\to+\infty$.

Autre exemple :

Pour $a\in\mathbb{R}$, $t\mapsto e^{-a.t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ si et seulement si $a>0$ et dans ce cas $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-a.t}dt=\frac{1}{a}$

II Cas des fonctions complexes

En pratique, pour $f:I\to\mathbb{C}$, il faudra séparer l'étude du caractère intégrable et le calcul éventuel de $\int_I f$.

- Fonctions intégrables à valeurs complexes :

Définition :

Soit *I* un intervalle de $\mathbb{R}$, $f:I\to\mathbb{C}$ continue par morceaux.

f est dite intégrable (sommable) lorsque $|f|$ l'est.

Remarque :

Si *f* est continue par morceaux, alors $|f|$ aussi.

On note "$L_1(I)$" l'ensemble des fonctions complexes intégrables sur *I*.

- Structure :

Théorème :

"$L_1(I)$" est un sous-espace de $C_{pm}(I,\mathbb{C})$, stable par domination, c'est-à-dire que si $\varphi\in$"$L_1(I)$" et si $f\in C_{pm}(I,\mathbb{C})$ vérifient $|f|\leq|\varphi|$, alors *f* est intégrable.

Démonstration :

Déjà, "$L_1(I)$"$\subset C_{pm}(I,\mathbb{C})$ et est non vide car contient la fonction nulle.

Soit $\varphi : I \to \mathbb{C}$ continue par morceaux intégrable, et $f : I \to \mathbb{C}$ continue par morceaux ; supposons que $|f| \leq |\varphi|$.

Alors $|f|$ est intégrable car pour tout $[a,b] \subset I$, on a :

$\int_a^b |f| \leq \int_a^b |\varphi| \leq \int_I |\varphi|$, donc $\int_a^b |f|$ est majorée.

Donc f est aussi intégrable.

Supposons que $f, g : I \to \mathbb{C}$ continues par morceaux sont intégrables, et soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

Alors $f + \lambda g$ est continue par morceaux et pour tout segment $[a,b] \subset I$, on a :

$\int_a^b |f+\lambda g| \leq \int_a^b (|f| + |\lambda||g|)(t)dt = \int_a^b |f|dt + |\lambda| \int_a^b |g|dt \leq \int_I |f| + |\lambda| \int_I |g|$ car f et g sont intégrables.

- Intégrale d'une fonction intégrable :

(1) Pour f à valeurs réelles, on pose :

$f^+ = \max(f,0)$ (partie positive de f)

$f^- = \max(-f,0)$ (partie négative de f)

Ainsi, $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$ (et $f^+ = \dfrac{f+|f|}{2}$, $f^- = \dfrac{|f|-f}{2}$)

Pour $f : I \to \mathbb{R}$ intégrable,

On a $0 \leq f^+ \leq |f|$, $0 \leq f^- \leq |f|$, et f^+, f^- sont continues par morceaux donc sont intégrables

Et on peut poser $\int_I f = \int_I f^+ - \int_I f^-$.

(2) Pour f à valeurs complexes, on écrit $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$

Pour f intégrable, $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont continus par morceaux, et intégrables car $|\operatorname{Im} f| \leq |f|$ et $|\operatorname{Re} f| \leq |f|$.

On peut donc poser $\int_I f = \int_I \operatorname{Re} f + i \int_I \operatorname{Im} f$.

- Calcul de $\int_I f$ pour f intégrable complexe :

Théorème :

(1) Cas d'une seule singularité $I = [a,b[$

Si $f : I \to \mathbb{C}$ est continue par morceaux intégrable, alors $\int_I f = \lim_{x \to b} \int_a^x f(t)dt$

Et en particulier la limite de droite existe pour $f \in$"$L_1(I)$"

(2) Cas de deux singularités :

Si $I =]a,b[$, soit $c \in I$.

Pour $f : I \to \mathbb{C}$, les limites suivantes existent et on a :

$\int_I f = \lim_{x \to b} \int_c^x f + \lim_{y \to a} \int_y^c f$.

Démonstration :

Pour une singularité $I = [a,b[$. On doit montrer que $\int_I f = \lim_{x \to b} \int_a^x f(t)dt$

Si f est réelle, alors $\int_I f^+ = \lim_{x\to b}\int_a^x f^+(t)dt$, $\int_I f^- = \lim_{x\to b}\int_a^x f^-(t)dt$.

Or, par définition, $\int_I f = \int_I f^+ - \int_I f^-$.

Donc $\int_I f = \lim_{x\to b}\int_a^x (f^+(t)-f^-(t))dt = \lim_{x\to b}\int_a^x f(t)dt$

Si f est complexe, c'est la même chose avec la partie réelle et imaginaire.

Pour deux singularités, on coupe l'intervalle $I =]a,b[$ en $I =]a,c]\cup[c,b[$

- Propriétés de l'intégrale :

Théorème :

(1) L'application $f \in "L_1(I)" \mapsto \int_I f$ est linéaire.

(2) Pour $f \in "L_1(I)"$, $\left|\int_I f\right| \leq \int_I |f|$

Démonstration :

Résulte du calcul de $\int_I f$ et de la linéarité du passage à la limite.

- Calcul à l'aide d'une suite exhaustive d'intervalles.

Théorème :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{C}$ continue par morceaux intégrable.

On suppose que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante (au sens de l'inclusion) de segments inclus dans I et recouvrant I. Alors $\int_I f(t)dt = \lim_{n\to+\infty}\int_{I_n} f(t)dt$

Démonstration :

On pose $I_n = [a_n, b_n]$.

Si $I = [a,b[$, alors comme $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est exhaustive, la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et tend vers b, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît vers a et est stationnaire en a. On peut donc supposer que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = a$. Alors $\int_{a_n}^{b_n} f(t)dt = \int_a^{b_n} f(t)dt = F(b_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I f(t)dt$

Si I a deux singularités, on fait la même chose en coupant en deux.

- Fonctions à valeur dans un espace de Banach.

Définition :

Soit $f : I \to E$ continue par morceaux où E est un espace de Banach.

On dit que f est intégrable lorsque $t \mapsto \|f(t)\|$ l'est (l'application est aussi continue par morceaux).

Définition de l'intégrale :

Si E est de dimension finie, on utilise une base $(e_1,\dots e_n)$ de E et on écrit $f(t) = \sum_{i=1}^n f_i(t)e_i$ où $f_i : I \to \mathbb{K} = {}^{\mathbb{C}}_{\mathbb{R}}$ sont continues par morceaux et intégrables (par équivalence des normes dans E), et on pose $\int_I f = \sum_{i=1}^n \left(\int_I f_i\right)e_i$.

Si E n'est pas de dimension finie, on a le théorème :

Si $f : I \to E$ continue par morceaux est intégrable (où $I = [a,b[$), alors $\int_a^x f(t)dt$ a une limite finie quand x tend vers b, et on pose alors $\int_I f = \lim_{x\to b}\int_a^x f$.

(analogue pour deux singularités)

Démonstration :

Comme E est complet, il suffit de montrer que $F : x \to \int_a^x f(t)dt$ vérifie le critère de Cauchy pour les fonctions lorsque $x \to b$, c'est-à-dire :

$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in [a,b[, \forall x, y \in [A,b[, \|F(x) - F(y)\| \leq \varepsilon$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\|f\|$ est intégrable, $\int_a^x \|f\|$ a une limite finie L quand $x \to b$

Donc il existe A tel que $\forall x \geq A, \left|\int_a^x \|f\| - L\right| \leq \varepsilon / 2$

Alors pour tous $x, y \in [A,b[$, on a :

$$\|F(x) - F(y)\| = \left\|\int_x^y f(t)dt\right\| \leq \pm\int_x^y \|f(t)\|dt$$
$$= \pm\left(\int_a^y \|f(t)\|dt - L - \int_a^x \|f(t)\|dt + L\right)$$
$$\leq \varepsilon / 2 + \varepsilon / 2 = \varepsilon$$

III Intégrales orientées et relation de Chasles

- Notation :

Si f est continue par morceaux et intégrable sur $I = [a,b],]a,b], [a,b[,]a,b[$, on pose $\int_a^b f(t)dt = \int_I f(t)dt$

NB : lorsque $a \in \mathbb{R}$, si f est continue par morceaux sur $[a,b[$ et intégrable, alors f est continue par morceaux et intégrable sur $]a,b[$ et $\int_{]a,b[} f(t)dt = \int_{[a,b[} f(t)dt$, ce qui justifie d'utiliser la même notation.

Si $b < a$ et f est continue par morceaux intégrable sur $[b,a],]b,a], [b,a[,]b,a[$, on pose alors $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$.

- Relation de Chasles :

Théorème :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{C}$ continue par morceaux intégrable.

Alors pour $a,b,c \in \bar{I}$, f est intégrable sur $\underset{\leftrightarrow}{]b,a[}$, $\underset{\leftrightarrow}{]b,c[}$, $\underset{\leftrightarrow}{]a,c[}$ et

$$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$$

Démonstration :

On peut supposer que $I = |\alpha, \beta|$ et que $\alpha \leq a < b < c \leq \beta$.

Pour f réelle, on utilise $f = f^+ - f^-$ et on se ramène au cas des fonctions positives

Pour f complexe, on utilise la partie imaginaire et réelle.

IV Règles usuelles d'intégrabilité

Problème :

Etant donnée $f : I \to \mathbb{C}$, f est-elle intégrable sur I ?

On travaille ici avec $|f|$ car *f* est intégrable si et seulement si $|f|$ l'est.

- Utilisation des relations de comparaison

Théorème (inégalités) :

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ continue par morceaux, $g : I \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et positive.

On suppose que $\forall t \in I, |f(t)| \leq g(t)$

Alors si *g* est intégrable, *f* l'est aussi.

Contraposée : si *f* n'est pas intégrable, *g* ne l'est pas non plus.

Démonstration :

Déjà vue.

Théorème (cas d'une singularité : utilisation des relations de comparaison)

Soit $I = [a,b[$ où $a \in \mathbb{R}$ fini, et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ continue par morceaux, $g : I \to \mathbb{R}$ continue par morceaux positive

- Si *g* est intégrable, et si $f(x) \underset{x \to b}{=} O(g(x))$, alors *f* est intégrable.

- Si $f(x) \underset{x \to b}{\sim} g(x)$, alors *f* est intégrable si et seulement si *g* l'est.

L'énoncé est analogue pour une singularité de l'autre côté.

Démonstration :

- Si $f(x) \underset{x \to b}{=} O(g(x))$, alors il existe $c \in [a,b[$ et $M \geq 0$ tels que

$\forall x \in [c,b[, |f(x)| \leq Mg(x)$

Comme *g* est intégrable sur $[a,b[$, elle l'est sur $[c,b[$ et *f* aussi.

Comme de plus *f* est continue par morceaux sur $[a,c]$, *f* est intégrable sur $[a,c]$, et donc sur $[a,b[$

- Si $f(x) \underset{x \to b}{\sim} g(x)$, alors $|f(x)| \underset{x \to b}{\sim} |g(x)|$,

donc $|f(x)| \underset{x \to b}{=} O(g(x))$ et $g(x) \underset{x \to b}{=} O(|f(x)|)$ et le résultat découle alors du point précédent.

- Règle de Riemann : comparaison avec une fonction puissance :

Théorème :

- Etude de la singularité $+\infty$:

Soit $f : [a,+\infty[\to \mathbb{C}$, continue par morceaux.

(1) Si $x^2 f(x)$, ou plus généralement $x^\alpha f(x)$ pour un certain $\alpha > 1$, a une limite *finie* quand *x* tend vers $+\infty$, alors *f* est intégrable sur $[a,+\infty[$.

(2) Si $xf(x)$ a une limite *non nulle* (éventuellement infinie) quand *x* tend vers $+\infty$, alors *f* n'est pas intégrable sur $[a,+\infty[$

- Etude de la singularité 0 :

Soit $f :]0,b] \to \mathbb{C}$, continue par morceaux.

(1) Si $\sqrt{x} f(x)$, ou plus généralement $x^\beta f(x)$ pour un certain $\beta < 1$, a une limite *finie* quand *x* tend vers 0, alors *f* est intégrable sur $]0,b]$.

(2) Si $xf(x)$ a une limite *non nulle* quand *x* tend vers 0, alors *f* n'est pas intégrable sur $]0,b]$.

Remarque :

Pour une singularité finie $x_0 \neq 0$, on peut se ramener à 0 avec le changement de variable $t = x - x_0$

Si la singularité est en $-\infty$, on peut faire le changement de variable $t = -x$

Démonstration du théorème :

(1) On a $f(x) = O\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$, et $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ car $\alpha > 1$. Donc *f* est intégrable.

(2) On a $\frac{1}{x} = O(|f(x)|)$. Comme $\frac{1}{x}$ n'est pas intégrable sur $[a,+\infty[$, $|f|$ non plus et ni *f*.

On fait la même chose pour 0.

Exemples :

$f(x) = x^\alpha e^{-\sqrt{x}}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}, x > 0$.

f est elle intégrable sur $]0,+\infty[$?

Déjà, *f* est continue sur $]0,+\infty[$.

Etude en 0 :

$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^\alpha$. Donc *f* est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si x^α l'est c'est-à-dire si et seulement si $\alpha > -1$

Etude en $+\infty$:

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 f(x) = 0$.

Donc *f* est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc sur $]0,+\infty[$ dès que $\alpha > -1$

V Intégrales impropres

Il peut arriver que $\int_a^x f(t)dt$ ait une limite finie quand $x \to b$ alors que *f* n'est pas intégrable sur $[a,b[$

Définition :

Soit $f : [a,b[\to \mathbb{C}$ continue par morceaux.

Si $\int_a^x f(t)dt$ a une limite *finie l* quand $x \to b$, on pose $\int_a^b f(t)dt = \lim\limits_{x\to b} \int_a^x f(t)dt$.

On dit alors que $\int_a^b f(t)dt$ est convergente.

Si $\int_a^b |f(t)|dt$ est convergente, on dit que $\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente.

Si $\int_a^b f(t)dt$ converge mais $\int_a^b |f(t)|dt$ diverge, on dit que $\int_a^b f(t)dt$ est semi-convergente.

On définit de même la convergence pour deux singularités :

Si $f :]a,b[\to \mathbb{C}$ est continue par morceaux et $c \in]a,b[$, on dit que $\int_a^b f(t)dt$ converge lorsque $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ convergent.

Attention :

Avec une telle définition, $\int_{-\infty}^{+\infty} x dx$ diverge, alors que $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} x dx = 0$.

Théorème :

Soit $f:[a,b[\to\mathbb{C}$ continue par morceaux.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

- f est intégrable sur $[a,b[$
- $\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente.

Et dans ce cas, $\int_a^b f(t)dt$ est convergente et de plus

$\int_a^b f(t)dt = \int_{[a,b[} f(t)dt = \lim\limits_{x\to b}\int_a^x f(t)dt$

Démonstration :

Dire que f est intégrable signifie que $|f|$ l'est, c'est-à-dire que $\int_a^x |f(t)|dt$ a une limite finie. De plus, si f est intégrable, on sait que $\int_a^x f(t)dt \xrightarrow[x\to b]{} \int_{[a,b[} f(t)dt$

Exemples :

$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt$ est semi-convergente :

Considérons $f: t\mapsto \frac{\sin t}{t}$ pour $t>0$

Alors f est continue sur $]0,+\infty[$, prolongeable par continuité en 0 par $f(0)=1$

Etude en $+\infty$:

- f n'est pas intégrable, car pour tout $n\geq 1$, on a :

$$\int_\pi^{n\pi}|f(t)|dt = \int_\pi^{n\pi}\left|\frac{\sin t}{t}\right|dt = \sum_{k=1}^{n}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin t|}{t}dt \geq \sum_{k=1}^{n}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin t|}{(k+1)\pi}dt$$

$$\geq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)\pi}\int_0^{\pi}\sin u du = C\times\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots+\tfrac{1}{n}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$$

Donc $\left\{\int_a^b |f(t)|dt, 0<a<b\right\}$ n'est pas majoré, donc f n'est pas intégrable.

- Mais $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge :

On va montrer que $\int_\pi^x \frac{\sin t}{t}dt$ a une limite finie quand $x\to+\infty$.

Idée : intégration par parties :

$$\int_\pi^x \frac{\sin t}{t}dt = \left[-\cos t\times\frac{1}{t}\right]_\pi^x + \int_\pi^x\frac{\cos t}{t^2}dt = \frac{-\cos x}{x} - \frac{1}{\pi} + \int_\pi^x \frac{\cos t}{t^2}dt$$

Comme $\frac{-\cos x}{x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$, et comme $t\mapsto\frac{\cos t}{t^2}$ est intégrable sur $[\pi,+\infty[$ (car $\left|\frac{\cos t}{t^2}\right|\leq\frac{1}{t^2}$), on voit que $\int_\pi^x\frac{\sin t}{t}dt$ a une limite finie quand $x\to+\infty$

Intégrale de Fresnet :

$\int_{\mathbb{R}} e^{it^2}dt$. On pose $f(t)=e^{i.t^2}$ pour $t\in\mathbb{R}$

Alors f est continue sur $\mathbb{R}$, et $|f|=1$ donc f n'est pas intégrable.

On a cependant pour $x\geq\pi$: $\int_\pi^x e^{i.t^2}dt=\int_\pi^x \frac{2i.te^{i.t^2}}{2it}dt=\left[\frac{e^{i.t^2}}{2it}\right]_\pi^x+\int_\pi^x \frac{e^{i.t^2}}{2it^2}dt$

Comme $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{ix^2}}{2ix}=0$ et comme $t\mapsto\frac{e^{i.t^2}}{2it^2}$ est intégrable sur $[\pi,+\infty[$, $\int_\pi^x e^{i.t^2}dt$ a une limite finie quand $x\to+\infty$.

De même sur $]-\infty,-\pi]$, puis $[-\pi,\pi]$ et enfin $\mathbb{R}$.

VI Méthode d'étude des intégrales

- Changement de variable :

Théorème :

Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $\varphi: I\to J$ un C^1-difféomorphisme

Soit $f: J\to\mathbb{C}$ continue par morceaux.

On considère les deux intégrales :

$\int_J f(t)dt$ et $\int_I (f\circ\varphi)(u)\varphi'(u)du$.

Alors ces deux intégrales ont même nature, c'est-à-dire :

- f est intégrable sur J si et seulement si $f\circ\varphi\times\varphi'$ l'est sur I.
- $\int_J f(t)dt$ est semi-convergente si et seulement si $\int_I (f\circ\varphi)(u)\varphi'(u)du$ l'est.

Et lorsque les intégrales existent, on a :

$\int_J f(t)dt=\varepsilon\int_I (f\circ\varphi)(u)\varphi'(u)du$ où ε vaut 1 si φ est croissante, -1 sinon.

Démonstration :

En terme de convergence d'intégrales :

Supposons que $I=[a,b[$ $J=[\alpha,\beta[$ (et que φ est croissante et $\varphi(a)=\alpha$)

Alors pour $x\in J$, $\int_\alpha^x f(t)dt \underset{t=\varphi(u)}{\overset{\uparrow}{=}} \int_a^{\varphi^{-1}(x)} f\circ\varphi(u)\varphi'(u)du$

Comme $\lim_{x\to\beta}\varphi^{-1}(x)=b$, si $\int_a^y f\circ\varphi(u)\varphi'(u)du$ est convergente, c'est pareil pour $\int_\alpha^x f(t)dt$

Pour la réciproque, on le fait avec φ^{-1}

Pour l'absolue convergence, on remplace f par $|f|$

- Utilisation d'une intégration par parties :

Intérêt : permet d'accélérer la convergence d'une intégrale.

Attention : il faut toujours se ramener à des intégrales sur un segment, *puis* passer à la limite.

Exemples :

Etude d'une intégrale impropre : $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t^\alpha}dt$ pour $\alpha>0$

L'application $f : t \mapsto \dfrac{\sin t}{t^\alpha}$ est continue sur $]0,+\infty[$, et on a $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} t^{1-\alpha}$, donc f est intégrable sur $]0,\pi]$ si et seulement si $1-\alpha > -1$, c'est-à-dire $\alpha > 2$

En $+\infty$:

On a $\left|\dfrac{\sin t}{t^\alpha}\right| \le \dfrac{1}{t^\alpha}$. Déjà, si $\alpha > 1$, f est intégrable sur $[\pi,+\infty[$

Si $\alpha \le 1$, on a $\displaystyle\int_\pi^x \frac{\sin t}{t^\alpha} dt = \left[-\frac{\cos t}{t^\alpha}\right]_\pi^x + \alpha \int_\pi^x \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}} dt$

Si $\alpha > 0$, alors $\left[-\dfrac{\cos t}{t^\alpha}\right]_\pi^x$ a une limite finie quand $x \to +\infty$, et $t \mapsto \dfrac{\cos t}{t^{\alpha+1}}$ est intégrable sur $[\pi,+\infty[$.

Donc $\displaystyle\int_\pi^x \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$ a une limite finie en $+\infty$.

Si $\alpha \le 0$, on a $\displaystyle\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt \ge \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \sin t dt \ge 2$

Donc $\displaystyle\int_\pi^x \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$ n'a pas de limite finie quand $x \to +\infty$

car si $F(x) = \displaystyle\int_\pi^x \frac{\sin t}{t^\alpha} dt \to l \in \mathbb{R}$,

alors $\displaystyle\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt = F((2n+1)\pi) - F(2n\pi) \to l - l = 0$

Conclusion ;

Si $1 < \alpha < 2$, f est intégrable sur $]0,+\infty[$

Si $0 < \alpha \le 1$, $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} f(t)dt$ est convergente et f est intégrable sur $]0,\pi]$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge

Si $\alpha \le 0$, $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} f(t)dt$ diverge, donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ aussi.

Développement asymptotique en $+\infty$ de $f(x) = e^{-x^2} \displaystyle\int_0^x e^{t^2} dt$

On a $f(x) = e^{-x^2}\left(A + \displaystyle\int_0^x e^{t^2} dt\right)$ où $A = \displaystyle\int_0^1 e^{t^2} dt$

Donc

$$f(x) = e^{-x^2}\left(A + \int_0^x \frac{2te^{t^2}}{2t} dt\right) = e^{-x^2}\left(A + \left[\frac{1}{2t} e^{t^2}\right]_1^x + \int_1^x \frac{e^{t^2}}{2t^2} dt\right)$$

$$= \frac{1}{2x} + A' e^{-x^2} + e^{-x^2} \int_1^x \frac{e^{t^2}}{2t} dt$$

Avec $A' = A - \frac{1}{2} e$. En refaisant une intégration par parties,

$$f(x) = \frac{1}{2x} + A' e^{-x^2} + e^{-x^2}\left(\left[\frac{1}{4t^3} e^{t^2}\right]_1^x + \frac{4}{3}\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4} dt\right) = \frac{1}{2x} + \frac{1}{4x^3} + A'' e^{-x^2} + \frac{3}{4} e^{-x^2} \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4} dt$$

Avec $A'' = A' - \frac{1}{4} e$

On cherche une majoration de $\varepsilon(x) = \frac{3}{4} e^{-x^2} \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4} dt$:

On note $\varphi : t \mapsto \frac{e^{t^2}}{t^4}$, de classe C^1 et $\varphi'(t) = \frac{e^{t^2}}{t^3}(2t^2 - 4)$

Donc $\varphi'(t) \geq 0$ si $t \geq \sqrt{2}$, et $\varphi'(t) \leq 0$ si $1 \leq t \leq \sqrt{2}$

Donc $\max_{1 \leq t \leq x} \varphi(t) = \max(\varphi(1), \varphi(x)) = \varphi(x)$ pour $x \geq A$ assez grand.

Ainsi, pour $x \geq A$: $|\varepsilon(x)| \leq \frac{3}{4} e^{-x^2} \int_1^x \varphi(x) dt = \frac{3}{4}(x-1)\frac{1}{x^4} = O(1/x^3)$

Donc $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$

- Utilisation d'une série :

Proposition (hors programme) :

On suppose que $I = [a, b[$ (une seule singularité)

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite strictement croissante de I telle que $x_0 = a$ et $\lim_{n \to +\infty} x_n = b$.

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ continue par morceaux.

Alors f est intégrable sur I si et seulement si la série de terme général $u_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} |f(t)| dt$ converge, et dans ce cas on a $\int_I f(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t) dt$

Démonstration :

Si f est intégrable, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} u_k = \int_a^{x_{n+1}} |f(t)| dt \leq \int_a^b |f(t)| dt$

Donc la suite des sommes partielles est croissante majorée, donc converge.

Inversement, si la série de terme général $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, alors pour tout $[u, v] \subset I$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_{n+1} \geq v$ et :

$$\int_u^v |f(t)| dt \leq \int_a^{x_{n+1}} |f(t)| dt = \sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$$

Donc $\left\{ \int_u^v |f(t)| dt, [u, v] \subset I \right\}$ est borné, donc f est intégrable.

Calcul :

La série de terme général $v_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t) dt$ est absolument convergente (car $|v_n| \leq u_n$), et $\sum_{k=0}^{n} v_k = \int_a^{x_{n+1}} f(t) dt \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_a^b f(t) dt$ car $x_{n+1} \to b$ et f est intégrable.

Remarque :

Cette méthode peut montrer que $\int_a^b f(t) dt$ est convergente même si f n'est pas intégrable :

Soit $f : [a, b[\to \mathbb{C}$ continue par morceaux, et une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ strictement croissante telle que $x_0 = a$ et tendant vers b. On note $v_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t) dt$

(1) Si $\int_a^b f$ converge, alors la série de terme général v_n converge

(2) La réciproque peut être fausse :

Exemple : avec $f(t)=\sin t$ et $x_n=2n\pi$

Alors $\int_0^{+\infty} f$ diverge, mais $v_n=0$ converge

(3) Si la série de terme général v_n, et si $\int_{x_n}^{x_{n+1}} |f(t)|dt$, alors $\int_a^b f$ converge.

En effet, pour $x\in [a,b[$, il existe un unique rang n pour lequel $x_n\leq x<x_{n+1}$

Donc $\int_a^x f(t)dt=\int_a^{x_n} f(t)dt+\int_{x_n}^x f(t)dt=\sum_{k=0}^{n-1} u_n+\underbrace{\int_{x_n}^x f}_{\varepsilon(x)}$

Et $|\varepsilon(x)|\leq \int_{x_n}^x |f(t)|dt\leq \int_{x_n}^{x_{n+1}} |f(t)|dt\to 0$

Donc $\lim_{x\to b}\int_a^x f=\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

VII Convergence en moyenne et en moyenne quadratique

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide ni réduit à un point.

On note $L_1*(I)$ l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{C}$ *continues* et intégrables.

Et $L_2*(I)$ l'ensemble des fonctions $f:I\to\mathbb{C}$ continues telles que $|f|^2$ est intégrable.

- Théorème :

$L_1*(I)$ et $L_2*(I)$ sont des sous-espace vectoriels de $C^0(I,\mathbb{C})$, l'application $\begin{aligned} L_1*(I)&\to\mathbb{R}_+\\ f&\mapsto\|f\|_1=\int_I|f|\end{aligned}$ est une norme sur $L_1*(I)$ et $\begin{aligned} L_2*(I)^2&\to\mathbb{R}_+\\ (f,g)&\mapsto<f,g>=\int_I\bar{f}(t)g(t)dt\end{aligned}$ est défini et est un produit scalaire.

Complément :

$L_1*(I)$ n'est pas complet pour $\|\ \|_1$

$L_2*(I)$ n'est pas complet pour la norme $\|\ \|_2$ associée à $<,>$

Démonstration :

On a déjà (quasiment) vu que $L_1*(I)$ est un sous-espace vectoriel de $C^0(I,\mathbb{C})$

Pour $L_2*(I)$:

Si $f\in L_2*(I)$ et $\lambda\in\mathbb{C}$, alors $\lambda f\in L_2*(I)$…

Soient $f,g\in L_2*(I)$.

Alors pour tout $x\in I$, on a :

$$\begin{aligned}|f(x)+g(x)|^2&=|f(x)|^2+|g(x)|^2+2\operatorname{Re}(\bar{f}(x)g(x))\\&\leq|f(x)|^2+|g(x)|^2+2|\bar{f}(x)g(x)|\\&\leq 2|f(x)|^2+2|g(x)|^2\end{aligned}$$

(Car $\forall a,b\in\mathbb{R}, 2ab\leq a^2+b^2$)

Donc $f+g$ est intégrable.

Pour $\| \|_1$: elle est déjà positive, homogène et vérifie l'égalité du triangle.

Elle est de plus séparante :

Soit $f \in L_1{}^*(I)$, supposons que $\|f\|_1 = 0$

Alors pour tout $[u,v] \subset I$, $0 \leq \int_u^v |f(t)| dt \leq \int_I |f| = \|f\|_1 = 0$

Comme $|f|$ est continue sur $[u,v]$, on a $|f| = 0$ sur $[u,v]$

Donc *f* est nulle sur *I*.

Pour < , > :

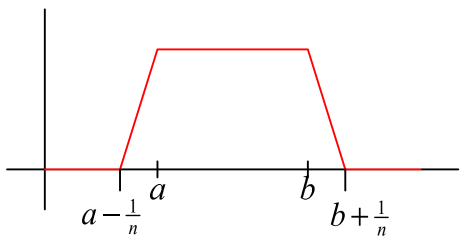
Elle est bien définie car si $f, g \in L_2{}^*(I)$, alors $t \mapsto \bar{f}(t)g(t)$ est intégrable car elle est continue et pour tout $t \in I$, $|\bar{f}(t)g(t)| \leq \frac{1}{2}\left(|f(x)|^2 + |g(x)|^2\right)$.

Elle est bien aussi linéaire à droite, hermitienne, positive,

Et définie positive : si $< f, f >= 0$, alors $|f|^2$ vérifie $\left\| |f|^2 \right\|_1 = 0$ soit $|f|^2 = 0$

Non complétude :

Soit $[a,b] \subset I$ où $a < b$ et intérieurs à *I*.



On pose $f_n(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \in [a,b] \\ 0 \text{ si } t \in I \setminus \left]a-\frac{1}{n}, b+\frac{1}{n}\right[\end{cases}$ et affine sur $[a-\frac{1}{n}, a]$ et $[b, b+\frac{1}{n}]$. Alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy pour $\| \|_1$ ($\|f_n - f_m\|_1 \leq \frac{2}{m}$) et pour $\| \|_2$ ($\|f_n - f_m\|_2 \leq \frac{2}{m}$)

Et la suite diverge, à la fois pour $\| \|_1$ et $\| \|_2$.

Car si elle convergeait vers $g \in L_k{}^*(I)$ pour $\| \|_k$ ($k = 1,2$), on aurait alors

$g(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in]a,b[\\ 0 \text{ si } x \in I \setminus [a,b] \end{cases}$, qui n'est pas continue en *a* et *b*.

- Comparaison des normes $\| \|_1$, $\| \|_2$, $\| \|_\infty$.

Propriétés :

(1) Si $I = [a,b]$, alors pour toute fonction $f : I \to \mathbb{C}$ continue, on a

$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt \leq \sqrt{b-a}\|f\|_2 \leq (b-a)\|f\|_\infty$

Mais les trois normes ne sont pas équivalentes sur $C^0([a,b], \mathbb{C})$.

(2) Si I est borné, alors $L_2{}^*(I) \subset L_1{}^*(I)$ (toute fonction de carré intégrable est intégrable), et pour *f* de carré intégrable, on a $\|f\|_1 \leq \sqrt{b-a}\|f\|_2$, mais $\| \|_1$ et $\| \|_2$ ne sont pas équivalentes.

(3) Si *I* n'est pas borné, il n'y a pas d'inégalité entre $\| \|_1$ et $\| \|_2$.

Démonstration :

(1) Il suffit d'utiliser l'inégalité de Cauchy–Schwarz.

Pour la non équivalence des normes : on peut supposer, quitte à faire un changement de variable affine, que $I=[0;1]$.

On pose alors pour $n\in\mathbb{N}^*$ $f_n : t\mapsto t^n$

Ainsi, $\forall n\in\mathbb{N}^*, \|f_n\|_\infty = 1, \|f_n\|_1 = \dfrac{1}{n+1}, \|f_n\|_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$

Et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_2}=+\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_1}=+\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\|f_n\|_2}{\|f_n\|_1}=+\infty$

Donc on ne peut pas trouver $c>0$ tel que $\forall n\in\mathbb{N}, \|f_n\|_2\leq c.\|f_n\|_1$ ou …

(2) Soit $f : I\to\mathbb{C}$ continue par morceaux de carré intégrable.

Alors *f* est intégrable :

- Déjà, *f* est continue par morceaux (!)

Et $\forall t\in I, |f(t)|\leq\frac{1}{2}\left(|f(t)|^2+1\right)$. Mais comme I est borné, $t\mapsto|f(t)|^2+1$ est intégrable sur *I*.

- Pour l'inégalité :

Soit *f* continue par morceaux de carré intégrable sur $I=|a,b|$ borné.

Pour tout $[u,v]\subset I$, on a d'après l'inégalité de Cauchy–Schwarz :

$$\int_u^v|f(t)|dt\leq\sqrt{\int_u^v 1dt\int_u^v|f(t)|^2dt}\leq\sqrt{(v-u)\int_u^v|f(t)|^2dt}\leq\sqrt{b-a}\|f\|_2$$

Et donc en passant à la borne supérieure pour $[u,v]\subset I$:

$$\|f\|_1\leq\sqrt{b-a}\|f\|_2$$

- Non équivalence : voir (1).

(3) On peut supposer par exemple que $I=[0;+\infty[$

On pose pour $\lambda>0$ $f_\lambda : t\mapsto e^{-\lambda t}$. Alors pour tout $\lambda>0$, f_λ est continue, intégrable et de carré intégrable.

On a de plus $\|f_\lambda\|_1=\int_0^{+\infty}e^{-\lambda.t}dt=\dfrac{1}{\lambda}$, $\|f_\lambda\|_2=\sqrt{\int_0^{+\infty}e^{-2\lambda.t}dt}=\dfrac{1}{\sqrt{2\lambda}}$

Pour $\lambda=n\in\mathbb{N}$, on a alors $\dfrac{\|f_n\|_1}{\|f_n\|_2}=\dfrac{\sqrt{2n}}{n}\to 0$

Et pour $\lambda=\dfrac{1}{n}$: $\dfrac{\|f_n\|_1}{\|f_n\|_2}=\sqrt{2n}\to+\infty$

VIII Compléments

- Intégrale très utiles :

Proposition (hors programme) :

Pour $z\in\mathbb{C}$, l'application $t\in\mathbb{R}_+\mapsto e^{-t.z}\in\mathbb{C}$ est continue sur $[0,+\infty[$, et intégrable si et seulement si $\mathrm{Re}(z)>0$, et dans ce cas, $\int_0^{+\infty}e^{-z.t}dt=\dfrac{1}{z}$

Démonstration :

On note, pour $z\in\mathbb{C}$, f_z l'application introduite.

Alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, f_z est continue, et $\forall t \in \mathbb{R}_+\ \forall t \in \mathbb{R}_+, |f_z(t)| = e^{-\mathrm{Re}(z).t}$

- Si $\mathrm{Re}(z) \leq 0$, alors $\forall t \geq 0, |f_z(t)| \geq 1$, donc f_z n'est pas intégrable.
- Si $\mathrm{Re}(z) > 0$, alors $\lim\limits_{t \to +\infty} t^2 f_z(t) = 0$ donc f_z est intégrable.

Calcul :

Pour tout $x \geq 0$, $\int_0^x e^{-z.t} dt = \left[\frac{1}{-z} e^{-z.t}\right]_0^x = \frac{1}{z}(1 - e^{-z.x})$

Or, comme $\mathrm{Re}(z) > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-z.x} = 0$, donc $\int_0^{+\infty} e^{-z.t} dt = \frac{1}{z}$

- Théorème d'intégration des relations de comparaison :

Théorème (hors programme) :
On suppose que $I = [a,b[$ (une seule singularité)
Soient $f, g : [a,b[\to \mathbb{C}$ continues par morceaux où *g* est à valeurs réelles positives.
(1) Si $f(x) \underset{x \to b}{=} o(g(x))$:

- Si *g* est intégrable, alors *f* est intégrable et $\int_x^b f(t)dt \underset{x \to b}{=} o\left(\int_x^b g(t)dt\right)$.
- Si *g* n'est pas intégrable, alors $\int_a^x f(t)dt \underset{x \to b}{=} o\left(\int_a^x g(t)dt\right)$ (on se sait rien sur *f*)

Remarque :

Dans le premier cas, $\int_x^b g(t)dt \xrightarrow[x \to b]{} 0$ et dans le deuxième $\int_a^x g(t)dt \xrightarrow[x \to b]{} +\infty$

(2) On a un énoncé analogue pour *O*.
(3) Si $f(x) \underset{x \to b}{\sim} g(x)$, alors *f* est intégrable si et seulement si *g* l'est et :

- Si elles sont intégrables, alors $\int_x^b f(t)dt \underset{x \to b}{\sim} \int_x^b g(t)dt$
- Si elles ne le sont pas, alors $\int_a^x f(t)dt \underset{x \to b}{\sim} \int_a^x g(t)dt$

Démonstration :
(1) Si *g* est intégrable, alors $|f(x)| \underset{x \to b}{=} o(g(x))$ donc *f* est intégrable.

On va montrer que $\forall \varepsilon > 0, \exists c \in [a,b[, \forall x \in [c,b[, \left|\int_x^b f(t)dt\right| \leq \varepsilon \int_x^b g(t)dt$

Soit $\varepsilon > 0$.
Comme $f(x) \underset{x \to b}{=} o(g(x))$, il existe $c \in [a,b[$ tel que $t \in [c,b[$, $|f(t)| \leq \varepsilon g(t)$.

Donc pour $x \in [c,b[$, on a $\forall t \in [x,b[, |f(t)| \leq \varepsilon g(t)$ et donc

$\left|\int_x^b f(t)dt\right| \leq \int_x^b |f(t)|dt \leq \varepsilon \int_x^b g(t)dt$.

Cas de divergence :

Déjà, $\lim\limits_{x \to b} \int_a^x g(t)dt = +\infty$ car *g* est positive et non intégrable.

On va montrer que $\forall \varepsilon > 0, \exists c \in [a,b[, \forall x \in [c,b[, \left|\int_a^x f(t)dt\right| \leq \varepsilon \int_a^x g(t)dt$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $c_1 \in [a,b[$ tel que $\forall t \in [c_1,b[, |f(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2} g(t)$

Pour $x\in [c_1,b[$, on a

$$\left|\int_a^x f(t)dt\right| = \left|\int_a^{c_1} f(t)dt + \int_{c_1}^x f(t)dt\right| \leq \left|\int_a^{c_1} f(t)dt\right| + \left|\int_{c_1}^x f(t)dt\right|$$

$$\leq \left|\int_a^{c_1} f(t)dt\right| + \frac{\varepsilon}{2}\int_{c_1}^x g(t)dt$$

$$\leq A + \frac{\varepsilon}{2}\int_{c_1}^x g(t)dt$$

Où $A = \left|\int_a^{c_1} f(t)dt\right|$. Par ailleurs, $\lim_{x\to b} \frac{A}{\int_a^x g(t)dt} = 0$, donc il existe $c_2 \in [a,b[$ tel que $\forall x\in [c_2,b[, \frac{A}{\int_a^x g(t)dt} \leq \frac{\varepsilon}{2}$

En posant $c = \max(c_1,c_2)$, on aura pour $x\in [c,b[$:

$$\left|\int_a^x f(t)dt\right| \leq A + \frac{\varepsilon}{2}\int_{c_1}^x g(t)dt \leq \frac{\varepsilon}{2}\int_{c_1}^x g(t)dt + \frac{\varepsilon}{2}\int_{c_1}^x g(t)dt$$

D'où le résultat.

(2) La démonstration est quasiment la même.

(3) Il suffit de poser $h = f - g$. Ainsi, $h(x) \underset{x\to b}{=} o(g(x))$ et on applique (1).

Application de l'intégration des relations de comparaison :

- Intégration des DL généralisés :

Soit $f :]0,a] \to \mathbb{C}$ continue ayant un DL en 0 de la forme $f(x) = a_1 x^{\alpha_1} + \ldots + a_p x^{\alpha_p} + o(x^{\alpha_p})$ où $\forall i \in [[1,p]], a_i \in \mathbb{C}^*$ et $\alpha_i \in \mathbb{R}$, rangés par ordre croissant.

(1) Alors *f* est intégrable sur $]0,a]$ si et seulement si $\alpha_1 > -1$ car $|f(x)| \underset{x\to 0}{\sim} |a_1| x^{\alpha_1}$

(2) On suppose que $\alpha_1 > -1$. Alors on a le DL généralisé :

$$\int_0^x f(t)dt = a_1\frac{x^{\alpha_1+1}}{\alpha_1+1} + \ldots + a_p\frac{x^{\alpha_p+1}}{\alpha_p+1} + o(x^{\alpha_p+1})$$

Démonstration :

On pose $\varepsilon(x) = o(x^{\alpha_p})$. Alors $x \mapsto x^{\alpha_p}$ est intégrable sur $]0,a]$ et positive (car $\alpha_p > \alpha_1 > -1$).

On a donc $\int_0^x \varepsilon(t)dt \underset{x\to 0}{=} o\left(\int_0^x t^{\alpha_p} dt\right) = \underset{x\to 0}{=} o(x^{\alpha_p+1})$

Exemple :

$\mathrm{Arccos} : [-1;1] \to [0;\pi]$.

Alors Arccos est de classe C^∞ sur $]-1;1[$, et $\forall x \in]-1;1[, \mathrm{Arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

DL généralisé en $x_0 = 1$:

Pour $x\in]-1;1[$, on pose $h = 1 - x > 0$ et on a :

$$\mathrm{Arccos}'(1-h) = \frac{-1}{\sqrt{2h-h^2}} = \frac{-1}{\sqrt{2h}}\left(1-\frac{h}{2}\right)^{-1/2}$$

$$\text{Arccos}'(1-h)=\frac{-1}{\sqrt{2}}h^{-1/2}\left(1+\frac{h}{4}+O(h^2)\right)=\frac{-1}{\sqrt{2}}h^{-1/2}-\frac{1}{4\sqrt{2}}h^{1/2}+O(h^{3/2})$$

Donc en intégrant entre $1-h$ et 1 :

$$\text{Arccos}(1)-\text{Arccos}(1-h)=-\sqrt{2}h^{1/2}-\frac{1}{6\sqrt{2}}h^{3/2}+O(h^{5/2})$$

D'où

$$\text{Arccos}(x)=\sqrt{2}(1-x)^{1/2}+\frac{1}{6\sqrt{2}}(1-x)^{3/2}+O((1-x)^{5/2})$$

$$\underset{x\to 1}{\sim}\sqrt{2}\sqrt{1-x}$$

- Exemple déjà fait :

On a pour $x\geq 1$:

$$e^{-x^2}\int_1^x e^{t^2}dt=e^{-x^2}\left(\left[\frac{1}{2t}e^{t^2}\right]_1^x+\int_1^x\frac{e^{t^2}}{2t^2}dt\right)$$

$$=\frac{1}{2x}-\frac{e^{-x^2}}{2}+e^{-x^2}\int_1^x\frac{e^{t^2}}{2t^2}dt$$

Or, $t\mapsto e^{t^2}$ est positive non intégrable sur $[1,+\infty[$

Et de plus $\frac{e^{t^2}}{2t^2}\underset{x\to+\infty}{=}o(e^{t^2})$, donc $\int_1^x\frac{e^{t^2}}{2t^2}dt\underset{x\to+\infty}{=}o\left(\int_1^x e^{t^2}dt\right)$,

Soit $e^{-x^2}\left(\int_1^x\frac{e^{t^2}}{2t^2}dt\right)\underset{x\to+\infty}{=}o(f(x))$

Donc $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2x}-\frac{e^{-x^2}}{2}\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2x}$