Chapitre 15 : Intégration (rappels)

I Fonctions continues par morceaux sur un segment

On considère un segment $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ($a<b$) et un espace de Banach E sur $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

A) Espace normé des fonctions bornées

On rappelle que l'ensemble $B([a,b],E)$ des fonctions bornées de $[a,b]$ dans E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, que la norme $\| \ \|_\infty$ de la convergence uniforme est une norme qui fait de $B([a,b],E)$ un espace de Banach.

B) Sous-espace des fonctions continues par morceaux

On note $C_{pm}([a,b],E)$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ à valeurs dans E.

Propriétés :

(1) Toute fonction de $C_{pm}([a,b],E)$ est bornée.

$C_{pm}([a,b],E)$ est un sous-espace de $B([a,b],E)$, non fermé pour $\| \ \|_\infty$.

(2) Pour $f \in C_{pm}([a,b],E)$, l'application $\|f\| : t \in [a,b] \mapsto \|f(t)\| \in \mathbb{R}$ est continue par morceaux.

C) Sous-espace des fonctions en escaliers

On rappelle qu'une fonction $\varphi : [a,b] \to E$ est dite *en escaliers* si il existe une subdivision $a=a_0<\ldots<a_n=b$ telle que φ est constante sur chacun des intervalles ouverts $]a_i, a_{i+1}[$ ($i=0..n-1$). On note $\varepsilon([a,b],E)$ l'ensemble des fonctions en escalier de $[a,b]$ dans E.

Propriétés :

(1) $\varepsilon([a,b],E)$ est un sous-espace de $C_{pm}([a,b],E)$, dense pour $\| \ \|_\infty$.

(2) $\varepsilon([a,b],E)$ est engendré par les fonctions de la forme $1_{[c,d]}V$ où $1_{[c,d]}$ est la fonction caractéristique du segment $[c,d] \subset [a,b]$ et V un élément donné de E.

D) Application linéaire d'intégration

Théorème :

On fixe $[a,b]$ un segment.

Pour tout espace de Banach E, il existe une unique application linéaire $\mathrm{Int}_E = \mathrm{Int}_{E,[a,b]}$, notée $f \in C_{pm}([a,b],E) \mapsto \int_a^b f(t)dt \in E$, telle que :

(1) Int_E est linéaire.

(2) Si φ est en escalier sur la subdivision $a = a_0 < \ldots < a_n = b$, constante de valeur m_i sur $]a_i, a_{i+1}[$ $(i = 0..n-1)$, $\mathrm{Int}_E(\varphi) = \int_a^b f(t)dt = \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1} - a_i)m_i$

(3) Pour tout $f \in C_{pm}([a,b],E)$, on a $\left\| \int_a^b f(t)dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt \leq (b-a)\|f\|_\infty$

Démonstration :

On définit $L : \varepsilon([a,b],E) \to E$ comme dans (2).

Alors L est continue pour $\| \ \|_\infty$ car :

$\forall \varphi \in \varepsilon([a,b],E), \|L(\varphi)\|_E \leq (b-a)\|\varphi\|_\infty$

Ainsi, $L : \varepsilon([a,b],E) \to E$ est linéaire, continue donc uniformément continue (car lipschitzienne). Comme E est complet et $\varepsilon([a,b],E)$ est dense dans $C_{pm}([a,b],E)$ pour $\| \ \|_\infty$, le théorème de prolongement des applications uniformément continues montre que L a un unique prolongement à $C_{pm}([a,b],E)$, qui vérifie (1), (2), (3).

E) Cas où $E = \mathbb{R}$: positivité

Théorème :

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et positive. Alors :

(1) $\int_a^b f(t)dt$ est un réel positif.

(2) $\int_a^b f(t)dt$ est nul si et seulement si f est nulle sauf sur un ensemble fini.

(3) Si $g, h : [a,b] \to \mathbb{R}$ sont continues par morceaux et telles que $g \leq h$, alors $\int_a^b g(t)dt \leq \int_a^b h(t)dt$.

Théorème :

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et positive.

Alors $\int_a^b f(t)dt$ est un réel positif, et il est nul si et seulement si f est identiquement nulle.

F) Cas où $E = \mathbb{C}$: inégalité de Cauchy–Schwarz

Théorème :

Si $f, g : [a,b] \to \mathbb{C}$ sont continues par morceaux, fg l'est aussi et on a :

$$\left| \int_a^b f(t)g(t)dt \right|^2 \leq \int_a^b |f(t)|^2 dt \int_a^b |g(t)|^2 dt$$

Si f et g sont continues partout, il y a égalité dans l'inégalité ci-dessus si et seulement si $(f,\bar{g})$ est lié.

Corollaire :

$(f,g)\in C_{pm}([a,b],\mathbb{C})^2 \mapsto < f,g > = \int_a^b \bar{f}(t)g(t)dt$ est un produit scalaire.

G) Additivité par rapport aux intervalles

Propriété :

Soit $c\in]a,b[$ et $f:[a,b]\to E$. Alors f est continue par morceaux sur $[a,b]$ si et seulement si elle l'est sur $[a,c]$ et $[c,b]$, et alors :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

Extension :

Soit $f:I\to E$ une fonction continue par morceaux sur l'intervalle I. f est alors continue par morceaux sur tout segment $[a,b]\subset I$. Pour $a,b\in I$, on étend alors l'intégrale à $\int_a^b f(t)dt = \begin{cases} 0 \text{ si } b=a \\ -\int_b^a f(t)dt \text{ si } a>b \end{cases}$

Théorème :

Sous les hypothèses ci-dessus, on a $\forall a,b,c\in I, \int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$

H) Sommes de Riemann

Pour $f:[a,b]\to E$ et toute subdivision pointée de $[a,b]$ (σ, X) où $\sigma = (a = a_0 < ... < a_n = b)$, $X = (x_1,...x_n)$ de sorte que $\forall i = 1..n, x_i \in [a_i, a_{i+1}]$, on pose $R(f,\sigma,X) = \sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1})f(x_i)$.

En particulier, pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $h = \frac{b-a}{n}$, $R_n^g(f) = h\sum_{i=0}^{n-1} f(a+ih)$ et $R_n^d(f) = h\sum_{i=1}^{n} f(a+ih)$.

On rappelle que le pas de la subdivision σ est $\eta(\sigma) = \max_{i=1..n}(a_i - a_{i-1})$.

Théorème :

Si f est continue sur $[a,b]$, alors $R(f,\sigma,X)$ tend vers $\int_a^b f(t)dt$ lorsque le pas $\eta(\sigma)$ tend vers 0 (et ce sans condition sur X). On a donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall (\sigma, X), \eta(\sigma) < \alpha \Rightarrow \left\| R(f,\sigma,X) - \int_a^b f(t)dt \right\| < \varepsilon$$

En particulier, $R_n^d(f)$ et $R_n^g(f)$ tendent vers $\int_a^b f(t)dt$ quand n tend vers $+\infty$.

I) Intégrales et primitives

Définition :

On appelle primitive de $f : A \subset \mathbb{R} \to E$ toute application F dérivable sur A de dérivée f.

Exemple important :

L'application $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 2x\sin(\frac{1}{x^2}) - \frac{2}{x}\cos(\frac{1}{x^2}) & \text{sinon} \end{cases}$ n'est pas continue mais admet des primitives.

Propriété :

Si $f : I \to E$ admet des primitives sur l'intervalle I, alors deux quelconques d'entres elles diffèrent d'une constante.

Théorème (fonction de la borne supérieure) :

Soit $f : I \to E$ une fonction continue par morceaux où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, et $a \in I$. On pose $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Alors :

(1) F est continue sur I, et même lipschitzienne sur tout segment de I. Elle admet une dérivée à droite et à gauche en tout point de I et $F'_g(x_0) = f(x_0^-) = \lim_{h \to 0^-} f(x_0 + h)$, $F'_d(x_0) = f(x_0^+) = \lim_{h \to 0^+} f(x_0 + h)$.

(2) F est dérivable en tout point x_0 où f est continue et on a $F'(x_0) = f(x_0)$

(3) Toute fonction continue f sur un intervalle I admet des primitives. Plus précisément, si f est continue sur I, F est de classe C^1 et c'est une primitive de f.

Théorème :

Si F est une primitive sur l'intervalle I, de la fonction *continue* $f : I \to E$, alors pour tout $a, b \in I$, on a $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.

J) Lemme de Riemann–Lebesgue

Lemme :

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ continue par morceaux. Alors $\lim_{\lambda \to \pm\infty} \int_a^b f(t)e^{i\lambda.t}dt = 0$

Démonstration :

- Si $f = 1_{[c,d]}$ où $a \le c \le d \le b$, alors

$$\int_a^b f(t)e^{i\lambda.t}dt = \int_c^d e^{i\lambda.t}dt = \frac{1}{i\lambda}(e^{i\lambda.d} - e^{i\lambda.c}) \text{ pour } \lambda \neq 0.$$

Donc $\left|\int_a^b f(t)e^{i\lambda.t}dt\right| \le \frac{2}{|\lambda|} \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} 0$

- L'ensemble des fonctions caractéristique de segment engendre l'espace des fonctions en escalier, donc par linéarité, la limite est encore vraie sur $\varepsilon([a,b], E)$

- Pour les fonctions quelconques :

On va montrer que $\forall\varepsilon>0,\exists\Lambda>0,\forall\lambda\in\mathbb{R},|\lambda|\geq\Lambda\Rightarrow\left|\int_a^b f(t)e^{i\lambda.t}dt\right|\leq\varepsilon$

Soit $\varepsilon>0$. Posons $\varepsilon'=\dfrac{\varepsilon}{2(b-a)+1}>0$

Par densité de $\varepsilon([a,b],E)$ dans $C_{pm}([a,b],E)$, il existe $\psi\in\varepsilon([a,b],E)$ tel que $\|f-\psi\|_\infty\leq\varepsilon'$

Alors, pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(t)e^{i\lambda.t}dt\right|&=\left|\int_a^b (f-\psi)(t)e^{i\lambda.t}dt+\int_a^b \psi(t)e^{i\lambda.t}dt\right|\\&\leq\|f-\psi\|_\infty(b-a)+\left|\int_a^b \psi(t)e^{i\lambda.t}dt\right|\\&\leq\frac{\varepsilon}{2}+\left|\int_a^b \psi(t)e^{i\lambda.t}dt\right|\end{aligned}$$

De plus, il existe $\Lambda>0$ tel que $\forall\lambda\in\mathbb{R},|\lambda|\geq\Lambda\Rightarrow\left|\int_a^b \psi(t)e^{i\lambda.t}dt\right|\leq\frac{\varepsilon}{2}$

Donc, pour $|\lambda|\geq\Lambda$, on aura $\left|\int_a^b f(t)e^{i\lambda.t}dt\right|\leq\varepsilon$, d'où le résultat.

II Calcul des intégrales et des primitives

A) Notations et rappels

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ (non vide et non réduit à un point) et E un espace de Banach.

Pour $f:I\to E$, on note $\int f(x)dx$ une primitive (s'il en existe) quelconque de *f* sur *I* (on l'appelle parfois intégrale indéfinie de *f*)

On sait que deux primitives diffèrent d'une constante et que si *f* est continue, alors pour $a\in I$ fixé, $x\mapsto\int_a^x f(t)dt$ est une primitive de *f*.

B) Intégration par parties

Théorème :

Soient $u,v:I\to E$ de classe C^1. On a $\int u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)dx$

Remarque :

L'égalité ci-dessus se lit : si F est une primitive de $u'v$, alors $uv-F$ est une primitive de uv'.

C) Changement de variables

Théorème :

Soient I, J deux intervalles non triviaux de $\mathbb{R}$, $u : I \to E$ et $\varphi : J \to I$ de classe C^1. On a $\int u' \circ \varphi(x)\varphi'(x)dx = u \circ \varphi$

Si de plus φ est bijective (par exemple un C^1-difféomorphisme), alors en posant $F(x) = \int_a^x u \circ \varphi(t)\varphi'(t)dt$, on a $\int u(z)dz = F \circ \varphi^{-1}(z)$

Remarque :

L'égalité ci-dessus se lit : si F est une primitive de $u \circ \varphi.\varphi'$, alors $F \circ \varphi^{-1}$ est une primitive de u.

D) Primitives usuelles

$\int \frac{dt}{t-a-ib} = \ln|t-a-ib| + i\text{Arctan}\left(\frac{t-a}{b}\right)$ sur $\mathbb{R}$ si $a, b \in \mathbb{R}$ avec $b \neq 0$.

$\int x^\alpha dx = \begin{cases} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \text{ si } \alpha \in \mathbb{C}\setminus\{-1\} \\ \ln|x| \text{ si } \alpha = -1 \end{cases}$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$ ou $I = \mathbb{R}_-^*$.

$\int (x-z_0)^n dx = \frac{(x-z_0)^{n+1}}{n+1}$ si $n \in \mathbb{Z}\setminus\{-1\}$, $z_0 \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ et sur $I = \mathbb{R}$.

$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x$, $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln|\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})|$ et $\int \tan x dx = -\ln|\cos x|$

sur $I_n = \left]-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi\right[$

$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\text{cotan}\, x$, $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln|\tan\frac{x}{2}|$ et $\int \text{cotan}\, x dx = \ln|\sin x|$

sur $J_n = \left]n\pi, \pi+n\pi\right[$.

$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$ si $a \neq 0$ et sur $I = \left]-\infty, -|a|\right[$, $\left]-|a|, |a|\right[$ ou $\left]|a|, +\infty\right[$.

$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\text{Arctan}\frac{x}{a}$ et $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \text{Argsh}\frac{x}{|a|}$ si $a \neq 0$, sur $\mathbb{R}$.

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \text{Arcsin}\frac{x}{|a|}$ si $a \neq 0$ et sur $\left]-|a|, |a|\right[$.

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \text{sgn}(x)(\text{Argsh}\left|\frac{x}{a}\right|)$ si $a \neq 0$ et sur $I = \left]-\infty, |a|\right[$ ou $\left]|a|, +\infty\right[$.

E) Méthodes usuelles

1) Fractions rationnelles

Méthode générale :

On décompose en éléments simples complexes et on utilise les premières formules ci-dessus.

Pour les fractions réelles, on regroupe pour finir les expressions conjuguées.

Cas particulier :

On peut avoir recours à des récurrences ou à des changements de variables ramenant à des fonctions trigonométriques. Par exemple, $\int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$ peut se calculer par récurrence ou en posant $x = \tan\varphi$.

2) Polynômes trigonométriques

Méthode générale :

On linéarise, éventuellement à l'aide des formules d'Euler.

Cas particulier :

Parfois une astuce peut éviter les longs calculs de la méthode générale. Par exemple, si n est impair (resp. m impair), le changement de variable $u = \sin t$ (resp. $u = \cos t$) ramène le calcul de $\int \cos^n t \sin^m t dt$ à $\int u^m (1-u^2)^{\frac{n-1}{2}} du$ (resp. …)

Si m et n sont tous deux paires, il faut revenir à la méthode générale.

3) Fonctions rationnelles en sin et cos

Il s'agit de primitive de la forme $\int F(\cos x, \sin x)dx$ où F est une fraction rationnelle en deux variables.

Méthode générale :

En posant $t = \tan\frac{x}{2}$, on se ramène à une fraction rationnelle en t.

Attention :

Ici, le changement de variable doit être C^1, donc il faut se placer sur un des intervalles $](2n-1)\pi, (2n+1)\pi[$, $n \in \mathbb{Z}$.

Exemple :

Pour $|a| < 1$ sur $I_n =](2n-1)\pi, (2n+1)\pi[$, on a :

$$\int \frac{dx}{1 - a\cos x} = \frac{2}{\sqrt{1-a^2}} \text{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1+a}{1-a}} \tan\frac{x}{2}\right) + C_n \text{ où } C_n \text{ dépend de } n.$$

Pour obtenir une primitive sur $\mathbb{R}$, il faut faire un raccordement en les $(2n+1)\pi$; il reste alors une seule constante d'intégration.

Cas particuliers :

On peut parfois poser $u = \sin x$, $u = \cos x$ ou $u = \tan x$ ce qui conduit à une fraction rationnelle en u plus simple que la fraction en t. Pour poser $u = \varphi(x)$, il faut qu'on puisse écrire $F(\cos x, \sin x) = g \circ \varphi(x).\varphi'(x)$. Cela donne la règle de Bioche :

Propriété :

Si la forme différentielle $\omega(x) = F(\cos x, \sin x)dx$ est :

(2) Invariante par $x \mapsto x + \pi$, $u = \tan x$ rationalise la primitive.

(3) Invariante par $x \mapsto -x$, $u = \cos x$ rationalise la primitive.

(4) Invariante par $x \mapsto \pi - x$, $u = \sin x$ rationalise la primitive.

Les deux derniers résultats sont valables sur tout intervalle où $x \mapsto F(\cos x, \sin x)$ est continue. Le premier l'est sur $I = \left]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$.

4) Fonctions rationnelles en exp, ch, sh

La méthode générale consiste à poser $t = e^x$. On peut aussi utiliser $u = \operatorname{th}\frac{x}{2}$ et parfois, comme dans 3), $u = \operatorname{ch} x$, $u = \operatorname{sh} x$ ou $u = \operatorname{th} x$.

5) Intégrales abéliennes 1

Pour les fonctions rationnelles en x et $\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$.

Cas général : poser $t = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$

Cas particulier :

Pour $\int F\left(x, \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)dx$, on peut poser $x = \sin\varphi$.

6) Intégrales abéliennes 2

Pour les fonctions rationnelles en x et $\sqrt{ax^2+bx+c}$ avec $a \neq 0$.

Méthode générale :

Après mise sous forme canonique du trinôme, on se ramène à l'un des cas :

$\sqrt{1-x^2}$ où on peut poser $x = \sin\varphi$

$\sqrt{1+x^2}$ où on peut poser $x = \operatorname{sh}\varphi$

$\sqrt{x^2-1}$ où on peut poser $x = \operatorname{ch}\varphi$

puis appliquer les points précédents.

Méthode moins générale :

Si ax^2+bx+c a deux racines u, v, réelles distinctes, on peut écrire :

$\sqrt{ax^2+bx+c} = |x-v|\sqrt{k\dfrac{x-u}{x-v}}$ et appliquer le point précédent.

III Formules de Taylor et développements limités

Cadre :

On étudie des applications $f : I \to E$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et E un Banach sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Lorsque f admet des dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$ en $a \in I$, pour tout $x \in I$ on note :

$T_n(f,x,a) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$ (polynôme de Taylor de f en a)

$R_n(f,x,a) = f(x) - T_n(f,x,a)$ (reste de Taylor de f en a)

A) Formules globales

Il s'agit d'étudier les valeurs numériques d'une fonction connaissant sa 'régularité' et ses dérivées en un point.

Les formules de ce point sont des égalités ou inégalités valables sur tout un intervalle.

Théorème (cas des polynômes) :

Soit $\mathbb{K}$ un corps quelconque et $P \in \mathbb{K}[X]$.

Pour tout $a \in \mathbb{K}$, $\{(X-a)^n, n \in \mathbb{N}\}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.

Si de plus $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle, on a $P = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$

Et dans l'anneau $\mathbb{K}[X,Y]$ des polynômes en deux variables,

$$P(X+Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(X)}{k!} Y^k$$

Remarques :

Les sommes sont en fait finies.

Le dernier énoncé montre que si P est de degré n, alors $\{P,...P^{(n)}\}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Théorème (reste intégral) :

Si f est de classe C^n sur I, on a :

$$\forall x \in I, R_n(f,x,a) = f(x) - T_n(f,x,a) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)dt$$

Théorème (inégalité de Taylor) :

Si f est de classe C^n sur I de dérivée n-ième bornée par $\left\|f^{(n)}\right\|_\infty$, on a

$$\forall x \in I, \left\|R_n(f,x,a)\right\| \leq \frac{|x-a|^n}{n!} \left\|f^{(n)}\right\|_\infty$$

B) Cas des fonctions à valeurs réelles

Théorème (Taylor–Lagrange) :

Si f est de classe C^{n-1} sur $[a,b]$ et n fois dérivable sur $]a,b[$, alors il existe $c\in\,]a,b[$ tel que $R_n(f,b,a)=f(b)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)=\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(c)$

Démonstration :

Soit $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x\in[a,b],\varphi(x)=f(x)+(b-x)f'(x)+\ldots+\frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n)}(x)+\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}A$$

Où A est une constante de sorte que $\varphi(a)=f(b)$, c'est-à-dire :

$$A=\frac{(n+1)!}{(b-a)^{n+1}}\left(f(a)-(b-a)f'(a)-\ldots-\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)\right)$$

Alors φ est continue sur $[a,b]$, et dérivable sur $]a,b[$, et $\varphi(a)=\varphi(b)\ (=f(b))$.

Il existe donc $c\in\,]a,b[$ tel que $\varphi'(c)=0$.

Or, pour tout $x\in\,]a,b[$:

$$\varphi'(x)=\underbrace{f'(x)-f'(x)+(b-x)f''(x)-(b-x)f''(x)+\ldots}_{=0}$$
$$+\frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n+1)}(x)-\frac{(b-x)^n}{n!}A$$

Soit $\varphi'(x)=\frac{(b-x)^n}{n!}\left(f^{(n+1)}(x)-A\right)$

Or, $\varphi'(c)=0$ et $c\neq b$, donc $f^{(n+1)}(c)=A$, d'où l'égalité cherchée.

C) La formule locale de Taylor –Young

Le problème est ici totalement différent : la formule de Taylor–Young donne le développement asymptotique d'une fonction en un point ; elle ne peut être utilisée que pour des calculs de limites.

Lemme :

Soit φ définie et continue dans un intervalle $]0,m[$ (avec $m>0$) telle que, pour un certain $\alpha>-1$, $\varphi(x)$ est négligeable (resp. dominée) devant x^α

Alors φ est intégrable sur $]0,m[$ et $x\mapsto\int_0^x\varphi(t)dt$ est négligeable (resp. dominée) devant $x^{\alpha+1}$.

Théorème (intégration des développements limités) :

On suppose que f, définie et continue au voisinage de $a\in\mathbb{R}$ à valeurs dans E, admet, lorsque x tend vers a, le développement limité

$f(x)=a_0+a_1(x-a)+\ldots+a_p(x-a)^p+\varepsilon(x)$ où ε est négligeable (resp. dominé) devant $(x-a)^p$ (resp. $(x-a)^{p+1}$). Alors $F:x\mapsto\int_a^x f(t)dt$ a le développement limité :

$$F(x) = F(a) + a_0(x-a) + a_1\frac{(x-a)^2}{2} + \ldots + a_p\frac{(x-a)^{p+1}}{p+1} + \eta(x)$$

avec η négligeable (resp. dominée) devant $(x-a)^{p+1}$ (resp. $(x-a)^{p+2}$)

Remarque :
En fait, on a le même énoncé pour les développements limités généralisés :

Théorème :

On suppose que *f*, définie et continue au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ à valeurs dans *E*, admet, lorsque *x* tend vers *a*, le développement limité généralisé (valable éventuellement seulement à gauche ou à droite de *a*)

$$f(x) = a_1|x-a|^{\alpha_1} + \ldots + a_p|x-a|^{\alpha_p} + \varepsilon(x)$$

Avec $-1 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_p < \beta$ et ε négligeable (resp. dominée) devant $|x-a|^{\beta}$.

Alors $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ a le développement limité généralisé

$$F(x) = F(a) + a_1\frac{|x-a|^{\alpha_1+1}}{\alpha_1+1} + \ldots + a_p\frac{|x-a|^{\alpha_p+1}}{\alpha_p+1} + \eta(x)$$

avec η négligeable (resp. dominée) devant $|x-a|^{\beta+1}$.

Théorème (Taylor–Young) :

On suppose que pour $n \geq 1$, *f* est de classe C^{n-1} au voisinage de *a* et que $f^{(n)}(a)$ est défini. Alors *f* admet au voisinage de *a* le développement limité :

$$f(x) = T_{n+1}(f, x, a) + o((x-a)^n) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a) + o((x-a)^n).$$