Chapitre 14 : Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques

I Définition

Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique différente de 2. (au programme : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ uniquement)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- On appelle forme bilinéaire symétrique sur E (abréviation *fbs*) toute application $\varphi\colon E \times E \to \mathbb{K}$ telle que :

  φ est linéaire à droite

  φ est symétrique, c'est-à-dire $\forall (x, y) \in E^2, \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$

- On appelle forme quadratique (abréviation *fq*) associée à une forme bilinéaire symétrique φ l'application $Q_\varphi\colon \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \vec{x} & \longmapsto & Q(\vec{x}) = \varphi(\vec{x}, \vec{x}) \end{array}$ (c'est la restriction de φ à la diagonale de $E \times E$)

- Relation importante :

Théorème :

Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur E, Q la forme quadratique associée.

On a, pour tous $x, y \in E$:

1. $Q(x + y) = Q(x) + Q(y) + 2\varphi(x, y)$
2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $Q(\lambda x) = \lambda^2 Q(x)$
3. $\varphi(x, y) = \frac{1}{2}(Q(x + y) - Q(y) - Q(x)) = \frac{1}{4}(Q(x + y) - Q(x - y))$

(Formules de polarisation)

Démonstration :

...

- Caractérisation intrinsèque des formes quadratiques :

Problème Soit $Q\colon E \to \mathbb{K}$. Comment voir si Q est une forme quadratique ?

Le plus simple est de parachuter une *fbs* φ telle que $\forall x \in E, \varphi(x, x) = Q(x)$

Exemple :

Soit $l \in E^*$ une forme linéaire sur E.

Alors $l^2\colon \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \vec{v} & \longmapsto & l(\vec{v})^2 \end{array}$ est une forme quadratique.

En effet, posons $\varphi(u, v) = l(u) \times l(v)$

Alors φ est une *fbs*, et la forme quadratique associée à φ est bien l^2.

Théorème :

1. Pour toute forme quadratique $Q\colon E \to \mathbb{K}$, il existe une unique *fbs* $\varphi\colon E \times E \to \mathbb{K}$ telle que Q est la forme quadratique associée à φ.

   φ est définie par $\forall x, y \in E, \varphi(x,y) = \frac{1}{2}(Q(x+y) - Q(x) - Q(y))$

2. Une application $Q\colon E \to \mathbb{K}$ est une forme quadratique si et seulement si l'application $x, y \mapsto \dfrac{Q(x+y) - Q(x) - Q(y)}{2}$ est bilinéaire et $\forall x \in E, Q(2x) = 4Q(x)$

Démonstration :

Le premier élément a déjà été vu dans le théorème précédent.

Pour le deuxième :

Si Q est une forme quadratique, associée à φ, on a pour tous $x, y \in E$:

$$\frac{Q(x+y) - Q(x) - Q(y)}{2} = \varphi(x,y) \tag{14.1}$$

Qui est bilinéaire, et $\forall x \in E, Q(2x) = \varphi(2x, 2x) = 4\varphi(x,x) = 4Q(x)$

Inversement :

Si $\alpha\colon \begin{array}{ccc} E^2 & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,y) & \longmapsto & \dfrac{Q(x+y) - Q(x) - Q(y)}{2} \end{array}$ est bilinéaire, et si $\forall x \in E, Q(2x) = 4Q(x)$,

alors α est aussi symétrique, donc c'est une *fbs*, et pour tout $x \in E$,

$$\alpha(x,x) = \frac{Q(2x) - Q(x) - Q(x)}{2} = Q(x) \tag{14.2}$$

Donc Q est la forme quadratique associée à α.

Définition :

La correspondance qui à φ *fbs* associe Q_φ forme quadratique est bijective ; on dit que Q_φ est la forme quadratique associée à φ et que φ est la forme polaire (abr. *fp*) de Q_φ

II En dimension finie : matrices

- **Définition :**

  Soit $\mathscr{B} = (V_1, \dots V_n)$ une base d'un espace vectoriel E de dimension finie, et $\varphi\colon E^2 \to \mathbb{K}$ une *fbs*. On appelle matrice de φ dans $\mathscr{B}$ la matrice $\text{mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = (\varphi(V_i, V_j))$.

  Remarque :

  Si φ est un produit scalaire ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$), $\text{mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)$ s'appelle la matrice de Gram de $(V_1, \dots V_n)$.

  On appelle matrice d'une forme quadratique Q dans $\mathscr{B}$ la matrice de la forme polaire de Q dans $\mathscr{B}$.

  Attention : Il ne faut pas confondre : matrice de *fbs*/*fq* et matrice d'application linéaire.

  Pour écrire la matrice d'une *fq*, on doit d'abord expliciter la forme polaire.

- Caractérisation :

Théorème :

On note $\mathscr{B} = (e_1, \dots e_n)$ une base de E.

1. Soit $\varphi\colon E^2 \to \mathbb{K}$ une *fbs*, et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

   On a $A = \text{mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)$ si et seulement si pour tout $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$, $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$ de E,

$\varphi(x,y) = {}^tXAY$ (où on a identifié $\mathscr{M}_{1,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}$), où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

2. Soit $Q \colon E \to \mathbb{K}$ une forme quadratique, et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

   Alors $A = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(Q)$ si et seulement si A est symétrique et pour tout $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$ de E, $Q(x) = {}^tXAX$.

Démonstration :

Les conditions sont déjà nécessaires :

1. Pour tous $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$, $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$ de E, on a :

$$\varphi(x,y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \varphi(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i \varphi(e_i, e_j) y_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i A_{i,j} y_j = {}^tXAY \tag{14.3}$$

2. si $A = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(Q)$, alors A est bien symétrique, et pour tout $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$ de E, on a :

   $Q(x) = \varphi(x,x) = {}^tXAX$ où φ est la forme polaire de Q.

Les conditions sont suffisantes :

1. pour $i, j \in [\![1, n]\!]$, on a : $\varphi(e_i, e_j) = (0, \dots 1, \dots 0) A \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix} = A_{i,j}$

   Donc $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = A$

2. On suppose que A est symétrique et que $\forall x \in E, Q(x) = {}^tXAX$

   Soit φ la forme polaire de Q. Pour $x \in E$, on a :

$$\begin{aligned} \varphi(x,y) &= \frac{Q(x+y) - Q(x) - Q(y)}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left({}^t(X+Y)A(X+Y) - {}^tXAX - {}^tYAY\right) \\ &= \frac{1}{2}\left({}^tXAY + {}^tYAX\right) \end{aligned} \tag{14.4}$$

   Or, ${}^tA = A$, donc ${}^t({}^tYAX) = {}^tX{}^tAY = {}^tXAY$

   De plus, ${}^tYAX \in \mathscr{M}_1(\mathbb{K})$ donc est symétrique.

   Donc ${}^tYAX = {}^tXAY$

   C'est-à-dire $\varphi(x,y) = {}^tXAY$

   Et donc d'après le point précédent, $A = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(Q)$

- Autre caractérisation des formes quadratiques (en dimension finie)

Théorème :

Une application $Q \colon E \to \mathbb{K}$ est une forme quadratique si et seulement si son expression dans une base $(e_1, \dots e_n)$ de E est de la forme :

$$Q\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_i x_j \tag{14.5}$$

Autrement dit, Q s'exprime par un polynôme homogène de degré 2 en les coordonnées

Homogène : Un polynôme P – éventuellement à plusieurs indéterminées – de degré $\deg P = d$ est dit homogène lorsque $\forall \lambda \in \mathbb{K}, P(\lambda X) = \lambda^d P(X)$.

Démonstration :

Découle du théorème précédent.

- Structure :

Théorème :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, on fixe $\mathscr{B}$ une base de E.

L'ensemble des formes quadratiques de E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^E$, noté $\mathrm{Quad}(E)$

L'ensemble des *fbs* de E est un sous-espace de $\mathbb{K}^{E\times E}$, noté $\mathrm{BS}(E)$

Et les applications suivantes sont des isomorphismes :

$$\varphi \in \mathrm{BS}(E) \mapsto Q_\varphi \in \mathrm{Quad}(E) \qquad \text{où } \forall x \in E, Q_\varphi(x) = \varphi(x,x) \tag{14.6}$$

$$Q \in \mathrm{Quad}(E) \mapsto \varphi \in \mathrm{BS}(E) \qquad \text{où } \varphi \text{ est la forme polaire de } Q \tag{14.7}$$

$$\varphi \in \mathrm{BS}(E) \mapsto \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \tag{14.8}$$

$$Q \in \mathrm{Quad}(E) \mapsto \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(Q) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \tag{14.9}$$

En particulier, $\dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Quad}(E)) = \frac{n(n+1)}{2} = \dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{BS}(E))$

- Changement de bases, matrices congruentes :

Théorème :

Soit $\varphi\colon E^2 \to \mathbb{K}$ une *fbs*, $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ deux bases de E.

On note $A = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)$, $A' = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(\varphi)$, $P \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.

Alors $A' = {}^tPAP$

Définition :

Deux matrices symétriques A, A' sont dites congruentes lorsqu'il existe $P \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $A' = {}^tPAP$

La congruence des matrices symétriques est une relation d'équivalence.

Ainsi, deux matrices sont congruentes si et seulement si elles représentent la même *fbs* dans deux bases différentes.

Démonstration (du théorème) :

Pour tous $x, y \in E$, on a $\varphi(x,y) = {}^tXAY$, où X, Y sont les matrices colonnes de x, y dans $\mathscr{B}$. La matrice colonne X' de x dans $\mathscr{B}'$ est donnée par $X = PX'$, celle Y' de y par $Y = PY'$.

Ainsi, on a :

$$\varphi(x,y) = {}^t(PX')A(PY') = {}^tX'({}^tPAP)Y' \tag{14.10}$$

Comme c'est valable pour tous $x, y \in E$, on a bien ${}^tPAP = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(\varphi)$

- Rang des *fbs* et des *fq* :

Définition :

On appelle rang d'une *fbs*/*fq* le rang de sa matrice dans une base quelconque.

Le rang est indépendant de la base car deux matrices congruentes sont équivalentes donc ont même rang.

Définition :

Une *fbs*/*fq* de rang n est dite non dégénérée.

III Cas des réels : positivité

Définition :

Soit $Q\colon E \to \mathbb{R}$ une forme quadratique sur le $\mathbb{R}$-ev E.

Q est dite positive lorsque $\forall x \in E, Q(x) \geqslant 0$

- Et définie–positive lorsque $\forall x \in E\setminus\{0\}, Q(x) > 0$

On définit de même une forme quadratique négative ou définie négative.

Une *fbs* sera dite positive, définie–positive, négative, définie–négative lorsque la forme quadratique associée l'est.

Attention : Une *fbs* est rarement une fonction positive. En fait, elle est positive si et seulement si elle est nulle.

Théorème :

Inégalité de Cauchy–Schwarz pour une *fbs* positive :

Si $\varphi\colon E^2 \to \mathbb{R}$ est une *fbs* positive, alors $\forall x, y \in E, |\varphi(x,y)| \leqslant \sqrt{\varphi(x,x)\varphi(y,y)}$

Complément :

Soit φ une *fbs* positive. Alors $N = \{x \in E, \varphi(x,x) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E, et il y a égalité de Cauchy–Schwarz si et seulement si N contient une combinaison linéaire non triviale de x et y.

Démonstration :

Soient $x, y \in E$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$0 \leqslant \varphi(x+ty, x+ty) = \varphi(x,x) + 2t\varphi(x,y) + t^2\varphi(y,y) \tag{14.11}$$

Donc le polynôme $P\colon t \mapsto \varphi(x,x)+2t\varphi(x,y)+t^2\varphi(y,y)$, de degré $\leqslant 2$, est à valeurs positives. Deux cas :

Soit $\varphi(y,y) > 0$, et $\frac{\Delta}{4} = \varphi(x,y)^2 - \varphi(x,x)\varphi(y,y) \leqslant 0$

Soit $\varphi(y,y) = 0$, et donc $\deg P \leqslant 1$, soit $\varphi(x,y) = 0$

Et dans les deux cas l'inégalité est vérifiée.

Pour le complément :

Déjà, $0 \in N$ donc N est non vide.

Pour tous $x \in N, \lambda \in \mathbb{R}$, on a $\lambda x \in N$

Enfin, pour tous $x, y \in N$, on a d'après l'inégalité de Cauchy–Schwarz, $\varphi(x,y) = 0$

Et donc $\varphi(x+y, x+y) = 0$

Montrons maintenant l'équivalence :

Supposons qu'il y a égalité de Cauchy–Schwarz pour $x, y \in E$.

Si $\varphi(y,y) = 0$, alors y est une combinaison linéaire non triviale qui est dans N.

Sinon, le polynôme $P = \varphi(x,x)+2X\varphi(x,y)+X^2\varphi(y,y)$ de degré 2 admet au moins une racine réelle t, puisqu'il a un discriminant nul. On a alors $\varphi(x,x)+2t\varphi(x,y)+t^2\varphi(y,y) = 0$, soit $\varphi(x+ty, x+ty) = 0$ donc $x+ty \in N$ et $(1,t) \neq (0,0)$

Réciproquement, supposons qu'il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ tel que $\lambda x + \mu y \in N$

Si $\lambda = 0$, alors $\mu \neq 0$ donc comme N est un espace vectoriel, $y \in N$, et on a $|\varphi(x,y)| \leqslant \sqrt{\varphi(x,x)\varphi(y,y)} = 0$, c'est-à-dire $|\varphi(x,y)| = \sqrt{\varphi(x,x)\varphi(y,y)} \quad (= 0)$

Sinon, comme N est un espace vectoriel, $x + ty \in N$, où $t = \frac{\mu}{\lambda}$.

Ainsi, $\varphi(x+ty, x+ty) = \varphi(x,x) + 2t\varphi(x,y) + t^2\varphi(y,y) = 0$

Donc soit $\varphi(y,y) = 0$ et on a bien l'égalité, soit $4\varphi(x,y)^2 - 4\varphi(x,x)\varphi(y,y) \geqslant 0$, c'est-à-dire $|\varphi(x,y)| \geqslant \sqrt{\varphi(x,x)\varphi(y,y)}$ et donc $|\varphi(x,y)| = \sqrt{\varphi(x,x)\varphi(y,y)}$ puisque l'autre inégalité était déjà vraie d'après le théorème.

- Signature d'une forme quadratique réelle en dimension finie (Hors programme)

  Soit $Q\colon E \to \mathbb{R}$ une forme quadratique.

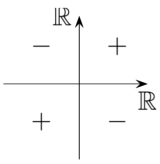
  On appelle indice de positivité p de Q la dimension maximale d'un sous-espace F de E tel que $Q_{|F}$ est définie–positive,

  Et indice de négativité q de Q la dimension maximale d'un sous-espace F de E tel que $Q_{|F}$ est définie–négative.

  La signature est alors le couple (p,q)

  Exemple :

  $Q\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & xy \end{array}$ est une forme quadratique, de signature $(1,1)$:



  On peut montrer que $\mathrm{rg}(Q) = p + q$ (plus tard, section suivante)

IV Représentation des formes bilinéaires symétriques et des formes quadratiques dans un espace euclidien

Ici, E désigne un espace vectoriel euclidien.

- Préambule : exemples de formes quadratiques :

  Soit $u \in \mathscr{L}_{\mathbb{R}}(E)$.

  Les applications $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \|u(x)\|^2 \end{array}$ et $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \langle x, u(x)\rangle \end{array}$ sont des formes quadratiques.

  La forme polaire de $x \mapsto \|u(x)\|^2$ est en effet $\varphi\colon \begin{array}{ccc} E^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \langle u(x), u(y)\rangle \end{array}$, qui est bien une *fbs*.

  La forme polaire de $x \mapsto \langle x, u(x)\rangle$ est

$$\varphi\colon (x,y) \mapsto \frac{1}{2}(\langle x, u(y)\rangle + \langle x, u^*(y)\rangle) = \frac{1}{2}(\langle x, u(y)\rangle + \langle y, u(x)\rangle) \tag{14.12}$$

- Théorème de représentation des formes quadratiques dans un espace euclidien :

Théorème :

Pour toute *fbs* $\varphi\colon E^2 \to \mathbb{R}$, il existe un unique endomorphisme $u \in \mathscr{L}_{\mathbb{R}}(E)$ tel que $\forall (x,y) \in E^2, \varphi(x,y) = \langle x, u(y)\rangle$.

De plus, u est autoadjoint, et u et φ ont même matrice dans toute base orthonormée de E.

Définition :

u s'appelle l'endomorphisme symétrique associé à φ.

Attention : Si $\mathscr{B}$ n'est pas orthonormale, on n'a pas en général $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)$.

En effet, par exemple $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)$ est toujours symétrique par définition de φ, alors que $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u)$ ne l'est pas toujours.

Théorème :

Pour toute forme quadratique $Q\colon E \to \mathbb{R}$, il existe un unique endomorphisme *symétrique* u tel que $\forall x \in E, Q(x) = \langle x, u(x)\rangle$

De plus, la forme polaire de Q est alors $(x, y) \mapsto \langle x, u(y)\rangle$

Q et u ont même matrice dans toute base orthonormée.

Attention : Si on n'impose pas à u d'être symétrique, il n'y a plus unicité, puisqu'alors pour un endomorphisme antisymétrique v (c'est-à-dire tel que $v^* = -v$) quelconque, on aura $\forall x \in E, \langle x, v(x)\rangle = 0$ et donc si on trouve une solution u, alors $u + v$ est aussi solution, différente si $v \neq 0$.

Démonstration (des théorèmes) :

1. Unicité de u :

   Si u et u' sont deux solutions, alors $v = u - u'$ vérifie :

   $\forall (x, y) \in E^2, \langle x, v(y)\rangle = 0$ soit $\forall y \in E, \langle v(y), v(y)\rangle = 0$ et donc $v = 0$.

   Existence, caractérisation... :

   Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots e_n)$ une base orthonormée de E, et $u \in \mathscr{L}_{\mathbb{R}}(E)$ tel que $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)$

   Alors :

   - La matrice de u est symétrique en base orthonormée, donc u est autoadjoint.
   - u et φ ont même matrice dans $\mathscr{B}$ (!)
   - Pour tout $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j \in E$, $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j \in E$, on a :

     $$\langle x, u(y)\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_i \langle e_i, u(e_j)\rangle \tag{14.13}$$

     Or, comme $(e_1, \dots e_n)$ est orthonormale, $\langle e_i, u(e_j)\rangle$ est le coefficient de coordonnées (i, j) de $A = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u)$, et ce pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.

     Comme $A = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)$, on a donc $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \langle e_i, u(e_j)\rangle = \varphi(e_i, e_j)$

     Donc $\langle x, u(y)\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_i \varphi(e_i, e_j) = \varphi(x, y)$
   - u et φ ont même matrice dans toute base orthonormale :

     Soit $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots e'_n)$ une base orthonormée de E.

     Alors la matrice de u dans $\mathscr{B}'$ est $A' = (\underbrace{\langle e'_i, u(e'_j)\rangle}_{=\varphi(e'_i, e'_j)})_{i,j=1..n}$ car $\mathscr{B}'$ est orthonormale.

     Donc $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(u) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(\varphi)$.

2. Existence, propriétés :

   Soit φ la forme polaire de Q, u l'unique endomorphisme donné par le théorème précédent tel que $\forall (x, y) \in E^2, \varphi(x, y) = \langle x, u(y)\rangle$

   Ainsi, u est autoadjoint, et u et φ ont même matrice dans toute base orthonormale, donc c'est pareil pour Q et φ.

   Unicité :

Si u, u' sont deux endomorphismes *autoadjoints* tels que $\forall x \in E, \langle x, u(x)\rangle = \langle x, u'(x)\rangle$

Alors $v = u - u^*$ est autoadjoint, et $\forall x \in E, \langle x, v(x)\rangle = 0$

Donc $\forall x, y \in E, \langle x+y, v(x+y)\rangle = 0 = \underbrace{\langle x, v(x)\rangle}_{=0} + \langle x, v(y)\rangle + \langle y, v(x)\rangle + \underbrace{\langle y, v(y)\rangle}_{=0}$

Soit $\forall x, y \in E, \langle x, v(y)\rangle = \langle -v(x), y\rangle$

On reconnaît donc $v^* = -v$. Mais $v^* = v$. Donc $v = 0$

- « Ménage à 4 » :

  Dans un espace euclidien, on dispose :

  - Des endomorphismes autoadjoints
  - Des matrices symétriques
  - Des formes bilinéaires symétriques
  - Des formes quadratiques.

  Qui constituent des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels isomorphes.

  Les espaces $\mathscr{S}(E) = \{u \in \mathscr{L}_{\mathbb{R}}(E), u^* = u\}$, $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Quad}(E)$, $\mathrm{BS}(E)$ où E est un espace de dimension n sur $\mathbb{R}$ sont naturellement isomorphes :

  - $\begin{array}{rcl} \mathscr{S}(E) & \longrightarrow & \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \\ u & \longmapsto & \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_0}(u) \end{array}$ où $\mathscr{B}_0$ est une base orthonormée quelconque fixée.
  - $\begin{array}{rcl} \mathrm{BS}(E) & \longrightarrow & \mathrm{Quad}(E) \\ \varphi & \longmapsto & Q_\varphi \end{array}$ (et son inverse)
  - $\begin{array}{rcl} \mathscr{S}(E) & \longrightarrow & \mathrm{Quad}(E) \\ \pi & \longmapsto & (x \in E \mapsto \langle x, \pi(x)\rangle) \end{array}$
  - $\begin{array}{rcl} \mathscr{S}(E) & \longrightarrow & \mathrm{BS}(E) \\ \pi & \longmapsto & ((x,y) \in E^2 \mapsto \langle x, \pi(y)\rangle) \end{array}$

  Exemple :

  Soit $Q\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x^2 + 2y^2 - z^2 + 4xy + yz - zx \end{array}$ (on munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire naturel)

  On veut la matrice de Q dans la base canonique, l'endomorphisme autoadjoint de $\mathbb{R}^3$ associé à Q.

  - Pour la matrice :

    On a $\frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial x} = x + 2y - \frac{1}{2}z$, $\frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial y} = 2x + 2y + \frac{1}{2}z$, $\frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial z} = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - z$.

    Ainsi, la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1/2 \\ 2 & 2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}$ est la matrice du système de formes linéaires $\left(\frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial z}\right)$.

  - Endomorphisme associé à Q :

    Alors $\pi\colon (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (x', y', z')$

    Où $x' = \frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y,z)$, $y' = \frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial y}(x,y,z)$, $z' = \frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial z}(x,y,z)$.

    En effet, on a $\mathrm{mat}_{\mathrm{cano}}(\pi) = A$, et comme la base canonique est orthonormale, il suffit de montrer que $A = \mathrm{mat}_{\mathrm{cano}}(Q)$.

    Pour cela, on a la proposition :

Proposition :

On fixe $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \dots \vec{e}_n)$ une base d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie n.

Soit Q une forme quadratique sur E, φ sa forme polaire.

Ainsi, Q peut être vu comme fonction de n variables réelles :

Pour $\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i\vec{e}_i \in E$, on peut écrire Q sous la forme $Q(\vec{x}) = Q(x_1, \dots x_n)$.

Alors pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, $\varphi(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial x_i}(\vec{e}_j)$

En effet : Déjà, la quantité existe bien car on a vu que Q s'écrivait sous forme polynomiale en les coordonnées, disons sous la forme $Q(x_1, \dots x_n) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{k,l}x_kx_l$ où les $a_{k,l}$ sont des réels, donc Q est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Alors pour $i, j \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$\varphi(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \frac{1}{2}\left(Q(\vec{e}_i + \vec{e}_j) - Q(\vec{e}_j) - Q(\vec{e}_j)\right) \tag{14.14}$$

Et $Q(\vec{e}_i + \vec{e}_j) = a_{i,j} + a_{j,i} + a_{i,i} + a_{j,j}$, $Q(\vec{e}_i) = a_{i,i}$, $Q(\vec{e}_j) = a_{j,j}$

Et donc $\varphi(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \frac{1}{2}(a_{i,j} + a_{j,i})$

D'autre part,

$$\forall \vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i\vec{e}_i \in E, \frac{\partial Q}{\partial x_i}(\vec{x}) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{k,l}\frac{\partial(x_k, x_l)}{\partial x_i} = \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^n a_{k,i}x_k + \sum_{\substack{l=1\\l\neq i}}^n a_{i,l}x_l + 2a_{i,i}x_i \tag{14.15}$$

Soit $\frac{\partial Q}{\partial x_i}(\vec{e}_j) = \begin{cases} a_{j,i} + a_{i,j} & \text{si } x \neq i \\ 2a_{i,i} & \text{si } j = i \end{cases} = a_{i,j} + a_{j,i}$

Et donc on a bien $\varphi(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial x_i}(\vec{e}_j)$.

Ainsi, pour reprendre l'exemple, la matrice de Q dans la base canonique est bien la matrice introduite.

- Réduction des *fbs* et *fq* en base orthonormale.

Théorème :

1. Pour toute *fbs* $\varphi\colon E^2 \to \mathbb{R}$, il existe une base orthonormée $(e_1, \dots e_n)$ de E et des réels $\lambda_1, \dots \lambda_n$ tels que $\forall x = \sum_{i=1}^n x_ie_i \in E, \forall y \sum_{i=1}^n y_ie_i \in E, \varphi(x, y) = \sum_{i=1}^n \lambda_ix_iy_i$.

   $(e_1, \dots e_n)$ est une base de vecteurs propres de l'endomorphisme autoadjoint associé à φ, et $\lambda_1, \dots \lambda_n$ sont les valeurs propres associées à ces vecteurs.

2. Pour toute forme quadratique $Q\colon E \to \mathbb{R}$, il existe une base orthonormée $(e_1, \dots e_n)$ de E et des réels $\lambda_1, \dots \lambda_n$ tels que $\forall x = \sum_{i=1}^n x_ie_i \in E, Q(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_ix_i^2$

   $(e_1, \dots e_n)$ est une base de vecteurs propres de l'endomorphisme autoadjoint associé à Q, et $\lambda_1, \dots \lambda_n$ sont les valeurs propres associées à ces vecteurs.

Démonstration :

Soit π l'endomorphisme associé à φ (resp. Q).

D'après le théorème spectral, il existe une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots e_n)$ de vecteurs propres de π telle que la matrice de π dans $\mathscr{B}$ soit diagonale.

Disons $\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(\pi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ où λ_i est la valeur propre associée à e_i.

Comme $\mathscr{B}$ est orthonormale, on a $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\pi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ (resp. pour Q)

Donc pour $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$, $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i \in E$,

$\varphi(x,y) = {}^tX \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} Y = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i y_i$ et $Q(x) = {}^tX \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} X = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$

Définition :

Les espaces propres de π, endomorphisme autoadjoint associé à φ ou Q sont appelés les directions principales de φ ou Q.

Exemple (Moment d'inertie) :

Soit S un solide de $\mathbb{R}^3$, $\rho(M)$ la densité volumique, $\mu(S) = \iiint \rho(M)\,\mathrm{d}M > 0$ la masse du solide.

Soit $O \in \mathbb{R}^3$. Pour $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, on pose $Q_O(\vec{v}) = \iiint_{M\in S} \rho(M)\langle \overrightarrow{OM}, \vec{v}\rangle^2\,\mathrm{d}M$

Alors Q_O est une forme quadratique, de forme polaire

$$\varphi_O(\vec{v},\vec{w}) = \iiint\limits_{M\in S} \rho(M)\langle \overrightarrow{OM}, \vec{v}\rangle\langle \overrightarrow{OM}, \vec{w}\rangle\,\mathrm{d}M \tag{14.16}$$

D'après le théorème de réduction des *fq* et *fbs* en base orthonormale, il existe une base orthonormée (e_1,e_2,e_3) de $\mathbb{R}^3$ et des réels $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ tels que $\mathrm{mat}_{(e_1,e_2,e_3)}\,\varphi_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$

C'est-à-dire $Q_0(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 e_3^2$

Donc $\iiint_{M\in S} \rho(M)\langle \overrightarrow{OM}, e_i\rangle\langle \overrightarrow{OM}, e_j\rangle\,\mathrm{d}M = \begin{cases} \lambda_i & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

- Hors programme : interprétation de la signature :

Théorème :

Soit Q une forme quadratique de signature (p,q) et π l'endomorphisme associé à Q.

Alors p est le nombre de valeurs propres > 0 de π, et q le nombre de valeurs propres < 0 de π.

Remarque : on en tire alors que $\mathrm{rg}(Q) = \mathrm{rg}(\pi) = p + q$.

Démonstration :

On note p' le nombre de valeurs propres strictement positives de π, q' le nombre de valeurs propres strictement négatives, et m la multiplicité de 0 comme valeur propre de π.

D'après le théorème spectral, il existe alors une base orthonormée de valeurs propres de π, telle que $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}\,\pi = \begin{pmatrix} \lambda_1 &&&&&&& \\ & \ddots &&&&&& \\ && \lambda_{p'} &&&&& \\ &&& \mu_1 &&&& \\ &&&& \ddots &&& \\ &&&&& \mu_{q'} && \\ &&&&&& 0 & \\ &&&&&&& \ddots \end{pmatrix}$

On pose $F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots e_{p'})$

Alors pour tout $x = \sum_{i=1}^{p'} x_i e_i \in F \setminus \{0\}$, on a $Q(x) = \sum_{i=1}^{p'} \lambda_i x_i^2 > 0$

Donc $Q_{|F}$ est définie–positive.

De même, $Q_{|G}$ où $G = \mathrm{Vect}(e_{p'+1}, \dots e_{p'+q'})$ est définie–négative.

Donc déjà $p \geqslant p'$, $q \geqslant q'$

On a $F^{\perp} = \mathrm{Vect}(e_{p'+1}, \dots e_n)$.

Soit H un sous-espace de E de dimension p tel que $Q_{|H}$ soit définie–positive.

Alors $H \cap F^{\perp} = \{0\}$.

En effet, pour $z = \sum_{i=p'+1}^{n} z_i e_i \in F^{\perp}$, on a $Q(z) = \sum_{i=1}^{q'} \mu_i z_{p'+i}^2 \leqslant 0$

Donc si $z \in H \cap F^{\perp}$, alors $z = 0$.

Donc $\dim H \leqslant \dim F = p'$, c'est-à-dire $p \leqslant p'$

De même, $q \leqslant q'$, puis $p = p'$, $q = q'$.

Exercice :

Soient Q, Q' deux formes quadratiques sur E.

Alors il existe $u \in \mathcal{GL}_{\mathbb{R}}(E)$ tel que $Q = Q' \circ u$ si et seulement si Q et Q' ont même signature.

Démonstration :

S'il existe $u \in \mathcal{GL}_{\mathbb{R}}(E)$ tel que $Q = Q' \circ u$, alors $Q_{|F}$ est définie–positive si et seulement si $Q'_{|u(F)}$ l'est, et F, $u(F)$ ont même dimension. Idem pour définie–négative.

Donc la signature est la même.

Réciproquement, supposons que Q et Q' ont la même signature (p, q).

Alors il existe deux bases orthonormales $\mathscr{B} = (e_1, \dots e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots e'_n)$ telles que :

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(Q) = \begin{pmatrix} \lambda_1 &&&&&&& \\ & \ddots &&&&&& \\ && \lambda_p &&&&& \\ &&& \mu_1 &&&& \\ &&&& \ddots &&& \\ &&&&& \mu_q && \\ &&&&&& 0 & \\ &&&&&&& \ddots \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(Q') = \begin{pmatrix} \lambda'_1 &&&&&&& \\ & \ddots &&&&&& \\ && \lambda'_p &&&&& \\ &&& \mu'_1 &&&& \\ &&&& \ddots &&& \\ &&&&& \mu'_q && \\ &&&&&& 0 & \\ &&&&&&& \ddots \end{pmatrix}$$

Où $\forall i \in [\![1, p]\!], \lambda_i > 0, \lambda'_i > 0$ et $\forall i \in [\![1, q]\!], \mu_i < 0, \mu'_i < 0$.

Ainsi, pour $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$, $Q(x) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{q} \mu_i x_{p+i}^2$

Soit u l'automorphisme de E tel que $\forall i \in [\![1, n]\!], u(e_i) = k_i e'_i$ où $k_i \neq 0$ est fixé après.

Alors pour tout $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$, $(Q' \circ u)(x) = Q'\left(\sum_{i=1}^{n} x_i k_i e'_i\right) = \sum_{i=1}^{p} x_i^2 k_i^2 \lambda'_i + \sum_{i=1}^{q} x_{i+p}^2 k_{i+p}^2 \mu'_i$

Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, λ'_i et λ_i ont même signe, et pareil pour μ_i, μ'_i quand $i \in [\![1, q]\!]$.

$$\text{Ainsi, on peut poser } k_i = \begin{cases} \sqrt{\frac{\lambda_i}{\lambda'_i}} & \text{si } i = 1..p \\ \sqrt{\frac{\mu_i}{\mu'_i}} & \text{si } i = p+1..p+q \\ 1 & \text{si } i > p+q \end{cases}$$

Et on aura bien par construction $Q' \circ u = Q$.

V Application des *fq* et *fbs* aux endomorphismes autoadjoints

- **Définition :**

  Soit $u \in \mathscr{L}_{\mathbb{R}}(E)$ un endomorphisme autoadjoint.

  On dit que u est positif, négatif, défini–positif, défini–négatif lorsque

$$\forall x \in E \backslash \{0\}, \langle x, u(x)\rangle \geqslant 0 \ / \ \leqslant 0 \ / \ > 0 \ / \ < 0 \tag{14.17}$$

- Caractérisation :

Théorème :

Soit u un endomorphisme autoadjoint.

1. Alors u est positif si et seulement si $\mathrm{sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$.
2. Les assertions suivantes sont équivalentes :
   - ◇ u est défini–positif
   - ◇ $\mathrm{sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$
   - ◇ u est positif et inversible.

Démonstration :

On utilise le théorème spectral :

Supposons que u est positif. Soit $\lambda \in \mathrm{sp}(u)$ et $\vec{v} \in E \backslash \{0\}$ un vecteur propre associé à λ.

Alors $\lambda \|\vec{v}\|^2 = \langle \vec{v}, \lambda \vec{v}\rangle \geqslant 0$. Donc comme $\|\vec{v}\|^2 \geqslant 0$, $\lambda \geqslant 0$

Réciproquement, supposons que $\mathrm{sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$.

D'après le théorème spectral, il existe une base orthonormée $(e_1, \dots e_n)$ de vecteurs propres de u.

On note, pour $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i \in \mathbb{R}_+$ la valeur propre associée à e_i.

Alors, pour $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$, on a : $u(x) = \sum_{i=1}^n x_i \lambda_i e_i$

Et donc $\langle x, u(x)\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$ car la base est orthonormée.

Donc comme les λ_i sont positifs, on a bien $\langle x, u(x)\rangle \geqslant 0$.

Pour les équivalences :

Si u est défini–positif, alors pour toute valeur propre λ de u, on a en notant $\vec{v}$ un vecteur propre associé à λ : $\lambda \|\vec{v}\|^2 = \langle \vec{v}, \lambda \vec{v}\rangle = \langle \vec{v}, u(\vec{v})\rangle > 0$, et donc $\lambda > 0$.

Si $\mathrm{sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$, alors d'après le point précédent u est positive, et comme $0 \notin \mathrm{sp}(u)$, u est inversible.

Enfin, si u est positive et inversible, alors ses valeurs propres sont positives, et comme elles sont non nulles (car u est inversible) elles sont strictement positives.

En reprenant le point précédent, on a alors pour $x \in E \backslash \{0\}$, $\langle x, u(x)\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 > 0$.

Remarque :

- En général, la restriction d'un endomorphisme symétrique u à un sous-espace F n'est pas un endomorphisme de F ; la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit un est que $u(F) \subset F$.

  Par contre, la restriction d'une forme quadratique Q à un sous-espace F de E est encore une forme quadratique ; plus précisément, si la forme polaire de Q est φ, alors la forme polaire de $Q_{|F}$ est $\varphi_{|F^2}$ qui est toujours une *fbs*.

- Exemples, propositions importants :

Exercice :

1. Soit Q une forme quadratique, π l'endomorphisme autoadjoint associé à Q.

   Pour tout sous-espace F de E, l'endomorphisme de F associé à $Q_{|F}$ est $p_F \circ \pi_{|F}$, où p_F est le projecteur orthogonal sur F.

Démonstration :

Déjà, $p_F \circ \pi_{|F} \in \mathscr{L}(F)$

Pour $x, y \in F$, on a :

$$\begin{aligned} \langle x, p_F \circ \pi_{|F}(y)\rangle &= \langle x, p_F \circ \pi(y)\rangle = \langle p_F(x), \pi(y)\rangle \text{ car } p_F^* = p_F \\ &= \langle x, \pi(y)\rangle = \langle y, \pi(x)\rangle \text{ car } \pi^* = \pi \\ &= \langle y, p_F \circ \pi_{|F}(x)\rangle \text{ car } x \in F \text{ et } \pi_{|F} \in \mathscr{L}(F) \end{aligned} \tag{14.18}$$

Ensuite, pour $x \in F$, $Q_{|F}(x) = Q(x) = \langle x, \pi(x)\rangle = \langle x, p_F \circ \pi_{|F}(x)\rangle$

Exercice (Racine carrée d'un endomorphisme autoadjoint positif) :

2. Montrer que pour tout $\pi \in \mathscr{S}(E)$ positif, il existe un endomorphisme autoadjoint s positif, tel que $\pi = s \circ s$.

   Ou, matriciellement : si $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ est symétrique positive,

   (c'est-à-dire $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXMX \geqslant 0$ ou $\mathrm{sp}(M) \subset \mathbb{R}_+$)

   Alors il existe S symétrique positive telle que $S^2 = M$

   De plus, s (resp. S) est unique.

Démonstration :

Soit $\pi \in \mathscr{L}_{\mathbb{R}}(E)$ un endomorphisme autoadjoint positif.

D'après le théorème spectral, il existe une base orthonormée $(e_1, \dots e_n)$ de vecteurs propres de π. On note, pour $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i \geqslant 0$ la valeur propre associée à e_i.

Soit s l'endomorphisme de E tel que $\forall i \in [\![1, n]\!], s(e_i) = \sqrt{\lambda_i} e_i$. Alors s est autoadjoint car diagonal en base orthonormée, et positif car $\forall i \in [\![1, n]\!], \sqrt{\lambda_i} \geqslant 0$.

On a de plus $s \circ s = \pi$

Unicité :

Supposons qu'un endomorphisme autoadjoint positif s vérifie $s \circ s = \pi$.

Soient $\lambda_1, \dots \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de π.

Alors $E = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(\pi)$, et la somme est orthogonale.

Comme $s \circ s = \pi$, s et π commutent.

Donc s laisse stable les $E_{\lambda_i}(\pi), i \in [\![1, p]\!]$.

Ainsi, pour $i \in [\![1, p]\!], s_{|E_{\lambda_i(\pi)}} = s_i$ est encore autoadjoint positif (car $\mathrm{sp}(s_i) \subset \mathrm{sp}(s)$)

Soit μ une valeur propre de s_i, $\vec{v} \in E_{\lambda_i}(\pi)$ associé à μ.

Alors $s_i(\vec{v}) = \mu\vec{v}$, donc $\pi(\vec{v}) = \mu^2\vec{v}$

Et donc $\mu^2 = \lambda_i$. Comme $\mu \geqslant 0$, on a alors $\mu = \sqrt{\lambda_i}$

Ainsi, s_i a une valeur propre $\sqrt{\lambda_i}$. Comme de plus s_i est diagonalisable, on a $s_i = \sqrt{\lambda_i}\, \mathrm{Id}_{E_{\lambda_i(\pi)}}$, d'où l'unicité de s_i, puis de s.

Exercice (Décomposition polaire) :

3. Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe $S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tels que $A = SQ$.

($\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$: ensemble des matrices symétriques positives ; $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$: définies–positives ; idem avec $-$)

De plus, (S, Q) est unique.

Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, il y a existence de la décomposition mais pas unicité.

Démonstration :

Si $A = SQ$ où $S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors :

$$A^tA = SQ^tQ^tS = S^2 \tag{14.19}$$

De plus, A^tA est symétrique positive :

Déjà, A^tA est symétrique, et pour $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a ${}^tXA^tAX = \|{}^tAX\|^2 \geqslant 0$

Donc S est défini de façon unique d'après le point précédent (c'est la racine carrée de A^tA).

Comme $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, on a ainsi $S \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.

Et donc $Q = S^{-1}A$, d'où aussi l'unicité de Q.

Existence :

On prend pour S l'unique racine carrée symétrique positive de A^tA.

Alors S est inversible car A l'est, et on peut poser $Q = S^{-1}A$.

On a donc ${}^tQQ = {}^tA^tS^{-1}S^{-1}A = {}^tA(S^2)^{-1}A = {}^tA(A^tA)^{-1}A = I_n$.

Donc $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, et $A = SQ$

Si maintenant $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ n'est pas nécessairement inversible :

Soit $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ tendant vers A (il en existe car $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$).

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on peut écrire $A_p = S_pQ_p$ où S_p est symétrique positive, et $Q_p \in O_n(R)$.

Comme $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compact, on peut extraire de $(Q_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite $(Q_{\varphi(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ qui converge, disons vers $R \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

Mais alors $S_{\varphi(p)} = A_{\varphi(p)}{}^tQ_{\varphi(p)}$, qui tend vers $S = A^tR$.

Comme R est inversible, $A = SR$, et S est symétrique positive car l'ensemble $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

En effet, $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ est le noyau de $\alpha\colon M \mapsto {}^tM - M$, qui est une application continue, donc $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ est fermé.

Et si on pose pour $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\beta_X(M) = {}^tXMX$, on a

$$\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \cap \bigcap_{X\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \beta_X^{-1}([0, +\infty[) = \alpha^{-1}\{0\} \cap \bigcap_{X\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \beta_X^{-1}([0; +\infty[) \tag{14.20}$$

Qui est donc une intersection de fermés donc un fermé.

Donc $S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ ce qui montre le résultat.

Proposition (Version complexe) :

Toute matrice $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ s'écrit de manière unique $M = HU$ où H est hermitienne positive (à valeurs propres réelles positives) et U est unitaire.

Or, toute matrice unitaire s'écrit $U = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}$ où $\forall j \in [\![1, n]\!], |\lambda_j| = 1$

Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on prend alors $\theta_i \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda_j = e^{i\theta_j}$

Et on pose $H' = P \begin{pmatrix} \theta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \theta_n \end{pmatrix} P^{-1}$.

Ainsi, H' est hermitienne, et $e^{iH'} = U$

Donc $M = He^{iH'}$, où H, H' sont hermitiennes et H définie positive.

(C'est la généralisation de $z = \rho e^{i\theta}$ pour $z \in \mathbb{C}^*$)

Exercice :

4. Description variationnelle des valeurs propres de $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ ou $u \in \mathscr{S}(E)$.

   Soit u un endomorphisme symétrique de E de valeurs propres $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$

   Alors :

   - $\lambda_1 = \min_{\|x\|=1}\langle x, u(x)\rangle$, $\lambda_n = \max_{\|x\|=1}\langle x, u(x)\rangle$.
   - Soit $\mathscr{F}_k$ l'ensemble des sous-espaces de dimension k de E, Σ la sphère unité.

   On a alors $\lambda_k = \min_{F\in\mathscr{F}_k} \left(\max_{x\in\Sigma\cap F}\langle x, u(x)\rangle\right) = \max_{F\in\mathscr{F}_{n+1-k}} \left(\min_{x\in\Sigma\cap F}\langle x, u(x)\rangle\right)$

Démonstration :

- Soit $(e_1, \ldots e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de u telle que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], u(e_i) = \lambda_i e_i \tag{14.21}$$

  Soit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$. On a :

$$\langle x, u(x)\rangle = \langle \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n x_j \lambda_j e_j\rangle = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i \langle e_i, \sum_{j=1}^n x_j \lambda_j e_j\rangle = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \lambda_i \tag{14.22}$$

  Donc $\lambda_1\|x\|^2 \leqslant \sum_{i=1}^n |x_i|^2\lambda_i \leqslant \lambda_n\|x\|^2$,

  et les valeurs minimale et maximale sont atteintes en e_1 et e_n.

- Soit $(e_1, \ldots e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de u telle que $\forall i \in [\![1, n]\!], u(e_i) = \lambda_i e_i$

  On pose $G_k = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots e_k) \in \mathscr{F}_k$, $H_k = \mathrm{Vect}(e_k, \ldots e_n) \in \mathscr{F}_{n+1-k}$

  Alors $\max_{x\in\Sigma\cap G_k}\langle x, u(x)\rangle = \lambda_k$.

  En effet, pour $x \in \Sigma \cap G_k$, disons $x = \sum_{i=1}^k x_i e_i$, on a :

  $\langle x, u(x)\rangle = \sum_{i=1}^k |x_i|^2\lambda_i \leqslant \lambda_k\|x\|^2 = \lambda_k$, et atteint pour $x = e_k$.

  Ainsi, on a déjà $\lambda_k \geqslant \min_{F\in\mathscr{F}_k} \left(\max_{x\in\Sigma\cap F}\langle x, u(x)\rangle\right)$

  Et de même, $\min_{x\in\Sigma\cap H_k}\langle x, u(x)\rangle = \lambda_k$, et $\max_{F\in\mathscr{F}_{n+1-k}} \left(\min_{x\in\Sigma\cap F} \langle x, u(x)\rangle\right) \geqslant \lambda_k$

  Soit alors $F \in \mathscr{F}_k$. Alors $F \cap H_k \neq \{0\}$ car $\dim H_k + \dim F = n + 1 > n$.

  Alors, pour $x \in F \cap H_k \cap \Sigma$, on a $\langle x, u(x)\rangle \geqslant \min_{x\in\Sigma\cap H_k}\langle x, u(x)\rangle = \lambda_k$

  Et donc $\max_{x\in\Sigma\cap F}\langle x, u(x)\rangle\lambda_k$, d'où l'égalité.

  On fait la même chose pour $F \in \mathscr{F}_{n+1-k}$

VI Interprétation du théorème de réduction des *fq* dans un espace euclidien en termes de réduction simultanée (hors programme)

- **Définition :**

  Soit Q une *fq* (ou φ une *fbs*) quelconque sur E :

  Une base $(V_1,\dots V_n)$ de E est dite orthogonale pour la forme quadratique Q (ou pour la *fbs* φ) lorsque la matrice de Q (φ) dans $(V_1,\dots V_n)$ est diagonale.

  C'est-à-dire si pour tous $i,j\in [\![1,n]\!]$ distincts, $\varphi(V_i,V_j)=0$ où φ est la forme polaire de Q, ou encore s'il existe des réels $a_1,\dots a_n$ tels que

  $$\forall x=\sum_{i=1}^n x_iV_i\in E, \forall y=\sum_{i=1}^n y_iV_i\in E, \begin{cases}\varphi(x,y)=\sum_{i=1}^n x_iy_ia_i\\ Q(x)=\sum_{i=1}^n a_ix_i^2\end{cases} \tag{14.23}$$

  (Une telle expression s'appelle une décomposition en carrés de Q)

- Cas d'un espace euclidien :

Théorème (réduction d'une *fq*/*fbs* en base orthonormée) :

Soit Q une *fq* sur l'espace euclidien $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$.

Alors il existe une base $\mathscr{B}=(e_1,\dots e_n)$ telle que :

$\mathscr{B}$ est orthonormée pour le produit scalaire de E.

$\mathscr{B}$ est orthogonale pour Q.

De plus, on a pour tout $(x_1,\dots x_n)\in\mathbb{R}^n$, $Q\left(\sum_{i=1}^n x_ie_i\right)=\sum_{i=1}^n \lambda_ix_i^2$ où λ_i est la valeur propre de l'endomorphisme associé à Q.

Démonstration :

Résulte du paragraphe précédent.

Corollaire :

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie, Q_1,Q_2 deux formes quadratiques sur E dont l'une au moins est définie–positive.

Alors il existe une base $\mathscr{B}$ de E orthogonale pour Q_1 et Q_2.

Si Q_1 est définie–positive, on peut imposer $\mathscr{B}$ orthonormale pour Q_1, c'est-à-dire :

Si $\mathscr{B}=(e_1,\dots e_n)$, et φ_1 est la forme polaire de Q_1, alors $\varphi_1(e_i,e_j)=\delta_{i,j}$.

Démonstration :

On suppose par exemple que Q_1 est définie–positive.

Soit φ_1 la forme polaire de Q_1. On note $\varphi_1=\langle\cdot,\cdot\rangle$

Alors $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E, et Q_2 est une forme quadratique sur l'espace euclidien $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$, donc on peut appliquer le théorème à Q_2.

Application :

Soient $A,B\in\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ où A est définie–positive. Alors AB est diagonalisable.

(Et les valeurs propres de AB ont le signe de celles de B).

Démonstration :

A^{-1} est aussi définie–positive ;

On considère alors $Q_1 \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la forme quadratique de matrice A^{-1} dans la base canonique, $Q_2 \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ celle de matrice B dans la base canonique.

Alors Q_1 est définie–positive, et la forme polaire φ_1 de Q_1 définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. Il existe donc une base B qui sera orthonormale pour Q_1 et orthogonale pour Q_2.

Donc $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\varphi_1) = I_n$ et $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(Q_2) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = D$

Si on note P la matrice de passage de la base canonique à $\mathscr{B}$, on aura alors :

$I_n = {}^tPA^{-1}P$, $D = {}^tPBP$ (formules de changement de base pour une forme quadratique)

Et donc $A^{-1} = {}^tP^{-1}P^{-1}$, soit $A = P{}^tP$ et $B = {}^tP^{-1}DP^{-1}$

D'où $AB = PDP^{-1}$.

VII Coniques dans le plan euclidien

- Équation d'une conique dans $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthonormé :

$$F(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \tag{14.24}$$

On pose $q(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$, forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$

On suppose q non nulle (sinon on a un plan), et que la conique n'est pas dégénérée (C'est-à-dire non vide, ni réduite à un point ou une (des) droites. Ainsi, elle contient une infinité de points)

Remarque :

O est centre de symétrie si et seulement si $d = e = 0$

- Centre de symétrie :

On cherche $\Omega(x_0, y_0)$ tel que l'équation dans $(\Omega, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ soit de la forme

$$a'x^2 + 2b'xy + c'y^2 + f' = 0 \tag{14.25}$$

Or, on voit que $F(x' + x_0, y' + y_0) = F(x_0, y_0) + x' \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) + y' \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) + q(x', y')$

Ainsi, Ω est centre de symétrie si et seulement si $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ (lorsque la conique est non dégénérée),

C'est-à-dire si et seulement si $\begin{cases} 2ax_0 + 2by_0 + d = 0 \\ 2bx_0 + 2cy_0 + e = 0 \end{cases}$ ou $\begin{pmatrix} a & d \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$.

NB : $\begin{pmatrix} a & d \\ b & c \end{pmatrix}$ est la matrice de Q dans la base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

- Réduction :

Cas où q n'est pas dégénérée (c'est-à-dire de rang 2) :

Ainsi, $\begin{pmatrix} a & d \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathscr{GL}_2(\mathbb{R})$, et donc le système $AX = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$ a une (unique) solution.

Donc Γ a pour centre de symétrie $\Omega = -\frac{1}{2} A^{-1} \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$

Par ailleurs, il existe (e_1, e_2) dans laquelle la matrice de q est diagonale, c'est-à-dire telle que $q(\alpha e_1 + \beta e_2) = \lambda \alpha^2 + \mu \beta^2$

Alors l'équation de Γ dans le repère orthonormé (Ω, e_1, e_2) est $\lambda x^2 + \mu y^2 + F(\Omega) = 0$

En effet, dans $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ l'équation est $q(x, y) + F(\Omega) = 0$

Et comme $q(x'e_1 + y'e_2) = \lambda x'^2 + \mu y'^2$, dans (Ω, e_1, e_2) c'est bien $\lambda x'^2 + \mu y'^2 + F(\Omega) = 0$

Discussion :

Si $F(\Omega) \neq 0$, alors selon les signes de λ, μ ($\lambda, \mu \neq 0$ car $\lambda\mu = \det A \neq 0$) on a des équations de la forme :

- Soit $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, qui est une ellipse
- Soit $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$, qui est $\varnothing$ (dégénérée)
- Soit $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$, qui sont des hyperboles
- Si $F(\Omega) = 0$:
  - Soit $\pm\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) = 0$, donc $\Gamma = \{\Omega\}$ (dégénérée)
  - Soit $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$, qui est la réunion de deux droites (dégénérée)

Remarque :

Pour une ellipse, il faut que $\det A = \lambda\mu > 0$

Pour une hyperbole, il faut que $\det A = \lambda\mu < 0$

(La réciproque est vraie si la conique n'est pas dégénérée)

- Cas où q est dégénérée (c'est-à-dire pas de rang 2) :

On a ainsi $\det A = 0$

Il n'y a donc pas forcément de centre de symétrie (ou une infinité)

On diagonalise A en base orthonormée :

Il existe (e_1, e_2) base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tels que :

$A = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$ où $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$

Ainsi, $q(x'e_1 + y'e_2) = \lambda x'^2$

L'équation de Γ dans (O, e_1, e_2) s'écrit ainsi sous la forme $\lambda x^2 + d'x + e'y + f' = 0$

Discussion :

- Si $e' = 0$, alors l'équation devient $\lambda\left(x + \frac{d'}{2\lambda}\right)^2 = -f + \frac{d'^2}{4\lambda} = \text{cte}$
  - Si $\text{cte} < 0$, c'est l'équation de $\varnothing$
  - Si $\text{cte} = 0$, c'est l'équation d'une droite
  - Si $\text{cte} > 0$, c'est l'équation de deux droites parallèles.

  Et dans tous les cas la conique est dégénérée.
- Si $e' \neq 0$, on peut l'écrire sous la forme $\left(x + \frac{d'}{2\lambda}\right)^2 + e''y = \text{cte}$ où $e'' \neq 0$

  Et on a ainsi l'équation d'une parabole.

Résumé :

- Si q n'est pas dégénérée, on a un centre de symétrie, et la conique sera :

  Une ellipse si $\det A > 0$ et si elle n'est pas dégénérée.

  Une hyperbole si $\det A < 0$ et si elle n'est pas dégénérée.

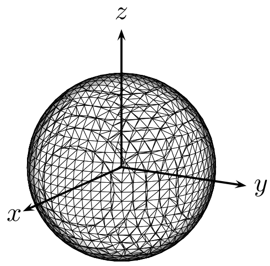
  Sinon, on peut avoir $\Gamma = \varnothing, \{\Omega\}$, deux droites sécantes
- Si q est dégénérée, on a une parabole lorsque la conique n'est pas dégénérée, et $\varnothing$, une droite ou deux droites parallèles lorsqu'elle l'est.

VIII Quadriques dans espace euclidien de dimension 3

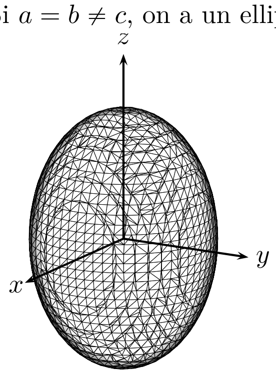
- Zoologie :
  - ◇ Ellipsoïde (E) :

    Équation en repère orthonormé de la forme $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

    Si $a=b=c$, on a une sphère

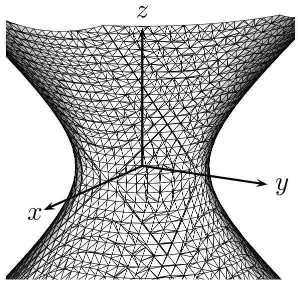


    Si $a=b\neq c$, on a un ellipsoïde de révolution.



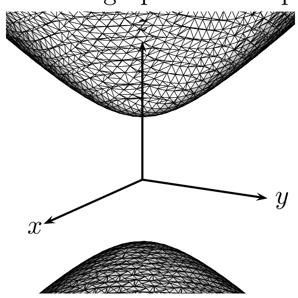
  - ◇ Hyperboloïde :
    — À une nappe (H_1) : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

    H_1 est connexe puisqu'elle a pour équation $\frac{z}{c}=\pm\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1}$ et $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1$ peut prendre la valeur 0. H_1 est de révolution lorsque $a=b$



    — À deux nappes (H_2) : $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

    On a $\frac{z}{c}=\pm\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}}$, donc $|\frac{z}{c}|$ ne peut pas prendre de valeur plus petite que 1. Donc le graphe ne sera pas connexe (2 nappes). H_2 est de révolution lorsque $a=b$.

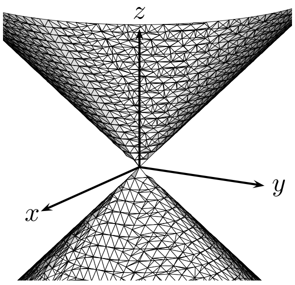


◇ Cône (du 2^{nd} degré) (C) : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$

On a une équation réduite homogène en (x, y, z).
Remarque :

Si $M \in C$, alors $OM \subset C$

Lorsque $a = b$: cône de révolution d'axe Oz.



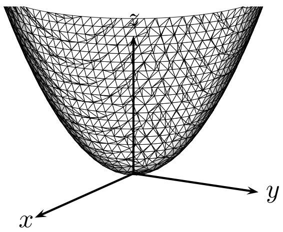
◇ Cylindre à base elliptique (CE) : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
hyperbolique (CH) : $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
parabolique (CP) : $y^2 = 2px$

Ce sont des équations incomplètes en z.

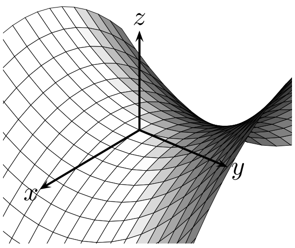
Ainsi, si $M\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \in C$, alors $\left\{ M\begin{pmatrix}a\\b\\z\end{pmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\} \subset C$

◇ Paraboloïde elliptique (PE) : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$.

Si $a = b$: paraboloïde de révolution.



◇ Paraboloïde hyperbolique (PH) : $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$ (Correspond à une « selle de cheval »)



- Remarque sur les surfaces réglées :

  Hors programme :

  Une surface réglée est une surface Σ de $\mathbb{R}^3$ telle qu'en tout point $A \in \Sigma$, il existe une droite D_A vérifiant $A \in D_A \subset \Sigma$.
  Exemple :

  ◇ L'ellipsoïde est non réglé.

  ◇ L'hyperboloïde à deux nappes est non réglé.

- ◇ L'hyperboloïde à une nappe est doublement réglé :

  Si on a une équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$,

  Alors on peut l'écrire $\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right)$

  Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ la droite D_λ d'équations $\begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \lambda(1 - \frac{y}{b}) \\ 1 + \frac{y}{b} = \lambda(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}) \end{cases}$ est incluse dans H_1 car si $M(x, y, z) \in D_\lambda$, on a $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \lambda\left(1 - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right) = 1 - \frac{y^2}{b^2}$

  (Les plans définissant D_λ ne sont pas parallèles car $\left(\frac{1}{a}, \frac{\lambda}{b}, \frac{-1}{c}\right) \wedge \left(\frac{\lambda}{a}, \frac{-1}{b}, \frac{\lambda}{c}\right) \neq \vec{0}$)

  Et de même, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, D'_μ : $\begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \mu(1 + \frac{y}{b}) \\ 1 - \frac{y}{b} = \mu(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}) \end{cases}$ est incluse dans (H_1)

  Enfin, pour tout $M(x, y, z) \in H_1$, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $M(x, y, z) \in D_\lambda, D'_\mu$

  Prendre par exemple $\lambda = \frac{\frac{x}{a} - \frac{z}{c}}{1 - \frac{y}{b}}$ si $y \neq b$...

- ◇ Paraboloïde elliptique : non réglé

- ◇ Paraboloïde hyperbolique : doublement réglé :

  D_λ : $\begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \lambda \\ \frac{z}{c} = \lambda(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}) \end{cases}$ est incluse dans (PH)

  D'_μ : $\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \mu \\ \frac{z}{c} = \mu(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}) \end{cases}$ aussi.

- ◇ Les cylindres sont tous réglés par des droites verticales.

• Recherche de l'équation réduite d'une quadrique :

Équation générale d'une quadrique Σ dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé.

$$f(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2eyz + 2fxz + gx + hy + iz + j = 0 \tag{14.26}$$

On note ici encore $q(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2eyz + 2fxz$, forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$.

On suppose q non nulle, et on considère $A = \begin{pmatrix} a & d & f \\ d & b & e \\ f & e & c \end{pmatrix}$, matrice de q dans $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On doit :

Réduire q en base orthonormée (diagonaliser A)

Rechercher un centre éventuel :

Ω est centre de symétrie de la quadrique si et seulement si $\overrightarrow{\text{grad}} f(\Omega) = \vec{0}$

Comme $\overrightarrow{\text{grad}} f(x, y, z) = \vec{0}$ équivaut à $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} g \\ h \\ i \end{pmatrix}$, on voit déjà que si q est non dégénérée, alors Σ a un unique centre de symétrie.

Pratique :

On cherche les valeurs propres de A, λ, μ, ν et une base orthonormée (e_1, e_2, e_3) de vecteurs propres.

- ◇ 1^{er} cas : $\lambda\mu\nu = \det A \neq 0$:

  Il y a alors un unique centre de symétrie, Ω.

  L'équation de Σ dans (Ω, e_1, e_2, e_3) est alors $\lambda x'^2 + \mu y'^2 + \nu z'^2 + f(\Omega) = 0$

  On reconnaît alors l'équation de $\varnothing$, E, H_1, H_2, $\{0\}$, C selon les valeurs de λ,μ, ν, $f(\Omega)$

- $2^{\text{ème}}$ cas :

  Si $\lambda\mu \neq 0$ et $\nu = 0$ (q est alors dégénérée)

  L'équation de Σ dans (O, e_1, e_2, e_3) est alors :

$$\lambda x'^2 + \mu y'^2 + g'x' + h'y' + i'z' + j = 0 \tag{14.27}$$

  Ou $\lambda \left(x' + \frac{g'}{2\lambda}\right)^2 + \mu \left(y' + \frac{h'}{2\mu}\right)^2 + i'z' + j'' = 0$

  Si $i' \neq 0$, on a un (PE) si $\lambda\mu > 0$, (PH) si $\lambda\mu < 0$

  Si $i' = 0$, soit $j'' = 0$ et on a une droite ($\lambda\mu > 0$) ou deux plans ($\lambda\mu < 0$)

  soit $j'' \neq 0$ et on a un (CE), (CH) ou $\varnothing$.

- $3^{\text{ème}}$ cas :

  Si $\lambda \neq 0$ et $\mu = \nu = 0$.

  Alors l'équation dans (O, e_1, e_2, e_3) devient :

  $\lambda x'^2 + g'x' + h'y' + i'z' + j = 0$,

  Soit $\lambda \left(x' + \frac{g'}{2\lambda}\right)^2 + h'y' + i'z' + j'' = 0$

  Si $(h', i') = (0, 0)$, on a $\varnothing$, un plan ou deux plans parallèles.

  Si $(h', i') \neq (0, 0)$:

  Par changement de base orthonormée dans le plan (O, y', z'), on se ramène à :

$$h'y' + i'z' = \sqrt{h'^2 + i'^2}\, y'' \tag{14.28}$$

  Donc $\lambda x''^2 + \sqrt{h'^2 + i'^2} \left(y'' + \frac{j''}{\sqrt{h'^2 + i'^2}}\right) = 0$

  C'est-à-dire un cylindre à base parabolique.

- Caractérisation des quadriques de révolution :

  - Si Σ est une quadrique, et si A a une valeur propre double λ non nulle, alors Σ est de révolution et son axe est orthogonal au plan propre $\ker(A - \lambda I_3)$
  - Si A admet 0 comme valeur propre double, alors Σ est un cylindre à base parabolique ou une quadrique dégénérée.