Chapitre 11 : Séries entières, séries de Fourier

I Séries entières et rayon de convergence

A) Définitions relatives aux séries entières

Définition :

- Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{C}$.

  On appelle série entière de coefficients les a_n la série de fonctions de terme général $u_n(z) = a_n z^n$ (avec la convention $z^0 = 1$, soit $u_0(z) = a_0$). On notera souvent $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une telle série. La variable z peut être réelle ou complexe.

- Opérations linéaires :

  Soient $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ deux séries entières, et $\lambda \in \mathbb{C}$.

  On note $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ la série entière de coefficients les $a_n + \lambda b_n$.

  Donc, par définition : $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + \lambda b_n) z^n$

- Produit de Cauchy de deux séries entières :

  La série entière produit de deux séries entières $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ est la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ où $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

- Extension :

  Si $(a_n)_{n\geqslant n_0}$ n'est définie qu'à partir d'un rang $n_0 > 0$, on ajoute $a_0 = \cdots = a_{n_0-1} = 0$

Exemple :
La série entière de coefficients les $\frac{1}{n}$ est $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ où $a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ \frac{1}{n} & \text{sinon} \end{cases}$

Exemples de produits On pose $a_n = a^n$, $b_n = b^n$ pour $a, b \in \mathbb{C}$.

Les coefficients de la série entière produit sont $c_n = \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$

Si $a \neq b$, $c_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}$ donc $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b} z^n$

Si $a = b$, $c_n = (n+1)a^n$.

Si $a \neq b$, la série entière produit $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)$ s'écrit aussi :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right) = \frac{a}{a-b} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \frac{b}{b-a} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \tag{11.1}$$

Attention : ces énoncés ne contiennent aucune propriété de convergence.

B) Rayon de convergence

Morale Le rayon de convergence d'une série caractérise à peu près les modes de convergence de la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ et les propriétés analytiques de la somme.

Lemme (Lemme d'Abel) :

- Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière. On suppose que la *suite* $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée pour un certain $z_0 \in \mathbb{C}$.

  Alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, si $|z| < |z_0|$, alors la *série* de terme général $a_n z^n$ est absolument convergente.

Démonstration :

Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n z_0^n| \leqslant M$.

Alors pour $|z| < |z_0|$ et $n \geqslant 0$,

$|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \times \left|\left(\frac{z}{z_0}\right)^n\right| \leqslant M r^n$ où $r = \left|\frac{z}{z_0}\right| \in [0,1[$.

Donc la série est absolument convergente.

Théorème :

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière.

L'ensemble des réels r positifs tels que la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée est un intervalle de $\mathbb{R}_+$ contenant 0.

Démonstration :

- ◇ Si $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, et si $0 \leqslant s < r$, alors la série de terme général $a_n s^n$ converge (absolument), donc la suite $(a_n s^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 et est donc bornée.
- ◇ Si $r = 0$, $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée...

- **Définition (Rayon de convergence) :**

  On appelle rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ l'élément $\sup\{r \geqslant 0, (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$ de $[0,+\infty]$

  Si R est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, l'ensemble des $r \geqslant 0$ tels que $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée est soit $[0,R]$, soit $[0,R[$.

- Partition du plan associée à R.

Théorème :

- ◇ Si $R = +\infty$, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série de terme général $a_n z^n$ converge absolument.
- ◇ Si $R = 0$, pour tout $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, la suite $a_n z^n$ n'est pas bornée ; en particulier, la série diverge.
- ◇ Si $R \neq 0$ et $R \neq +\infty$:

  Pour tout z tel que $|z| < R$, la série de terme général $a_n z^n$ est absolument convergente.

  Si $|z| > R$, la suite $a_n z^n$ n'est pas bornée, donc la série diverge grossièrement.

  Si $|z| = R$, on ne peut rien dire en général.

On a ainsi une partition du plan complexe en trois parties (dans le dernier cas).

Démonstration :

- ◇ Si $R = +\infty$, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe $r \geqslant 0$ tel que $r > |z|$ et $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

  D'après le lemme d'Abel, la série de terme général $a_n z^n$ est absolument convergente.

- ◇ Pour tout $z \neq 0$, la suite $(a_n|z|^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée (définition du rayon de convergence)
- ◇ Si $|z| > R$, la suite $(a_n|z|^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée

  Si $|z| < R$, il existe $r \in]|z|, R[$ tel que $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

  Puis, d'après le lemme d'Abel, la série de terme général $a_n z^n$ est absolument convergente.

- Exemples :
  - ◇ Série entière de rayon de convergence infini : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 0\,;\quad \forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{1}{n!}$
  - ◇ Série entière de rayon de convergence nul : $\sum_{n=0}^{+\infty} n! z^n$
  - ◇ Série entière de rayon de convergence $R \in]0, +\infty[$: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{R^n}$

C) Rayon de convergence d'une somme et d'un produit

Théorème :

Soit R_a le rayon de convergence d'une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, R_b celui d'une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$. Alors le rayon de convergence des séries somme et produit sont supérieurs à $\min(R_a, R_b)$. Et pour la somme : si $R_a \neq R_b$, le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n$ est égal à $\min(R_a, R_b)$.

Démonstration :

Pour $|z| < \min(R_a, R_b)$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right) \tag{11.2}$$

où $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

Donc $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n$ est absolument convergente, idem pour $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ (théorème sur le produit de Cauchy). En particulier, $((a_n + b_n) z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées et donc le rayon de convergence de la série somme est $\geqslant |z|$. D'où si $R_a \neq R_b$, disons par exemple $R_a < R_b$:

Pour $r \in]R_a, R_b[$, $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée, $(b_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Donc $(a_n + b_n) r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non bornée.

Donc pour tout $r \in]R_a, R_b[$, le rayon de convergence de la série somme est plus petit que r.

Comme de plus il est plus grand que R_a, ce rayon vaut R_a.

Exemples

- $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = -b_n = 1$

  Alors $R_a = R_b = 1$ mais $R_\Sigma = +\infty$.

- On prend $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\frac{1-z}{1+z} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_n z^n$, et $b_n = (-1)^n a_n$;

  Ainsi, $\sum_{k=0}^{+\infty} b_n z^n = \frac{1+z}{1-z}$.

  Et $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

  On a alors $R_a = R_b = 1$, mais $R_\Pi = +\infty$

- Avec $\sum_{k=0}^{+\infty} a_n z^n = \frac{1-z/2}{1+z}$, $\quad R_a = 1$, $\quad \sum_{k=0}^{+\infty} b_n z^n = \frac{1+z}{1-z/2}$, $\quad R_b = 2$.

  Et $R_\Pi = +\infty$.

D) Méthodes de calcul du rayon de convergence

- Un outil pratique : la règle de d'Alembert.

Théorème :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes telle que :

1. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant \mathbb{N}, a_n \neq 0$.
2. La suite $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ tend vers $l \in [0, +\infty]$

Alors le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est $R = \frac{1}{l} \in [0 + \infty]$

$(1/\infty = 0,\ 1/0 = \infty)$

Attention : ce théorème n'est qu'une condition suffisante.

Démonstration :

Pour $z \neq 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = |z|l \tag{11.3}$$

Discussion :

- ◇ Pour $0 < l < +\infty$,
  - — Si $|z| < 1/l$, d'après la règle de d'Alembert sur les séries numérique, la série de terme général $a_n z^n$ est absolument convergente donc le rayon de convergence est $\geqslant 1/l$.
  - — Si $|z| > 1/l$, alors $|a_n z^n| \to +\infty$, donc $(a_n|z|^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée, et le rayon de convergence est $\leqslant 1/l$.
- ◇ Si $l = 0$, on a toujours convergence absolue, donc le rayon de convergence est $+\infty$
- ◇ Si $l = +\infty$, on a toujours divergence grossière si $z \neq 0$, donc le rayon de convergence est nul.

Exemple :

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!z^n}{(n+1)\dots(2n+1)}$; rayon de convergence, étude en $\pm R$?

On a $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)\times n!}{(n+2)\dots(2n+3)} \times \frac{(n+1)\dots(2n+1)}{n!} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)} \to \frac{1}{4}$

Donc le rayon de convergence vaut $R = 4$.

Étude en ± 4 :

On a $\frac{4^{n+1}a_{n+1}}{4^n a_n} = \frac{2(n+1)}{2n+3} < 1$

Donc la suite $(4^n a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît.

On cherche un équivalent de $u_n = 4^n a_n$ en $+\infty$.

On va chercher α et $K > 0$ tels que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} Kn^\alpha$.

On cherche déjà α tel que la suite de terme général $\ln\left(\frac{u_n}{n^\alpha}\right)$ converge.

On va étudier plutôt la série de terme général $\ln\left(\frac{u_n}{n^\alpha}\right) - \ln\left(\frac{u_{n-1}}{(n-1)^\alpha}\right)$:

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{u_n}{n^\alpha}\right) - \ln\left(\frac{u_{n-1}}{(n-1)^\alpha}\right) &= \ln\frac{u_n}{u_{n-1}} + \alpha\ln\frac{n-1}{n} \\
&= \ln\left(\frac{2n}{2n+1}\right) + \alpha\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \\
&= -\ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right) + \alpha\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \\
&= -\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned} \tag{11.4}$$

Ainsi, si on prend $\alpha = -\frac{1}{2}$, la série converge (absolument), donc la suite de terme général $\ln \frac{u_n}{n^\alpha}$ converge vers $\lambda \in \mathbb{R}$, et $\frac{u_n}{n^\alpha} \to e^\lambda$, c'est-à-dire $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^\lambda n^\alpha$

On a donc aussi trouvé K tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{K}{\sqrt{n}}$

Ainsi : en $R = 4$, il y a divergence car $4^n a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{K}{\sqrt{n}}$

Et en $R = -4$, il y a convergence par critère de Leibniz.

Exemple (Séries hypergéométriques) :

On pose $a_0 = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = a_n \times F(n)$ où

$F = \frac{(X-\alpha_1)...(X-\alpha_r)}{(X-\beta_1)...(X-\beta_s)}$, avec $\forall i \in [\![1, r]\!], \alpha_i \in \mathbb{C}, \forall i \in [\![1, s]\!], \beta_i \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{N}$

On cherche le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

S'il existe $i_0 \in [\![1, r]\!]$ tel que $\alpha_{i_0} \in \mathbb{N}$, alors $F(\alpha_{i_0}) = 0$, et $\forall n > \alpha_{i_0}, a_n = 0$, donc le rayon de convergence est infini.

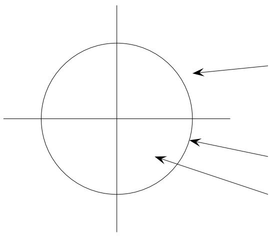
Si $\forall i \in [\![1, r]\!], \alpha_i \notin \mathbb{N}$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0$

Et $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |F(n)| \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{r-s}$, soit $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to \begin{cases} 0 & \text{si } r < s \\ 1 & \text{si } r = s \\ +\infty & \text{si } r > s \end{cases}$, et le rayon de convergence est alors

$$\begin{cases} +\infty & \text{si } r < s \\ 1 & \text{si } r = s \\ 0 & \text{si } r > s \end{cases}$$

- Par le comportement des suites et séries de $a_n z^n$.

  Avoir à l'esprit la partition :



Exemple :

Si pour $z_0 \in \mathbb{C}$, la série de terme général $a_n z_0^n$ est semi-convergente mais pas absolument convergente, le rayon de convergence est $|z_0|$.

Soient $a, b \in \mathbb{C}^*$; on pose $a_0 = 1$, et pour $n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} a_{n+1} = a a_n & \text{si } n \equiv 0 \mod 2 \\ a_{n+1} = b a_n & \text{si } n \equiv 1 \mod 2 \end{cases}$.

Quel est le rayon de convergence de la série entière de coefficients les a_n ?

On montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} a_{2n+1} = a^{n+1} b^n \\ a_{2n} = a^n b^n \end{cases}$

Pour $r > 0$, la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si les deux suites $(a_{2n} r^{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_{2n+1} r^{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées, c'est-à-dire si et seulement si $r^2|ab| \leqslant 1$.

Donc le rayon de convergence vaut $\frac{1}{\sqrt{|ab|}}$

- Comparaison avec les séries, séries majorantes.

Proposition :
Le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est non nul si et seulement si il existe $\rho > 0$, $M \geqslant 0$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leqslant M\rho^n$.

En effet : Si le rayon de convergence est non nul, il existe $r > 0$ tel que la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, c'est-à-dire qu'il existe M tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n r^n| \leqslant M$, et $\rho = \frac{1}{r}$ convient.

Inversement, si $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leqslant M\rho^n$, alors le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est supérieur à $\frac{1}{\rho}$.

Proposition (Règle de Hadamard – hors programme) :
Le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est $R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$

Où : Si u_n est une suite bornée de réels positifs, on pose :

$\overline{\lim}_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \sup\{u_k, k \geqslant n\}$ (« limite supérieure »)

C'est-à-dire que $\overline{\lim}_{n\to+\infty} u_n$ est la plus grande valeur d'adhérence de u.

Si u_n est positive non majorée, $\overline{\lim}_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Notes Si $0 \leqslant u_n \leqslant M$, $v_m = \sup\{u_k, k \geqslant m\}$ est bien définie, et $\forall m \in \mathbb{N}, 0 \leqslant v_{m+1} \leqslant v_m$, donc $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge bien.

$\lim_{m\to+\infty} v_m$ est une valeur d'adhérence de u : $\forall m \in \mathbb{N}, \exists k_m \geqslant m, v_m \geqslant u_{k_m} \geqslant v_m + \frac{1}{m}$

Toute valeur d'adhérence de u est plus petite que $\overline{\lim}_{n\to+\infty} u_n$: si $u_{\varphi(n)} \to \alpha$, alors $\forall m \in \mathbb{N}, v_m \geqslant \alpha$.

Démonstration (de la règle de Hadamard) :
Pour $r \geqslant 0$, on a $\overline{\lim}_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n| r^n} = r \times \overline{\lim}_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{r}{R}$ où on a posé $R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$

Si $r > R$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall m \geqslant N, \sup\left\{\sqrt[k]{|a_k| r^k}, k \geqslant m\right\} > \rho$ où $\rho \in]1, \frac{r}{R}[$.

Donc pour tout $m \geqslant N$, il existe $k \geqslant m$ tel que $\sqrt[k]{|a_k| r^k} \geqslant \rho$, et $|a_k| r^k \geqslant \rho^k > 1$, donc $a_k r^k \nrightarrow 0$.

Si $r < R$: il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall m \geqslant N$, $\forall m \geqslant N, \sup\left\{\sqrt[k]{|a_k| r^k}, k \geqslant m\right\} < \rho$ où $\rho \in]\frac{r}{R}, 1[$

Donc $\forall k \geqslant m \geqslant N$, $\sqrt[k]{|a_k| r^k} < \rho$, soit $|a_k| r^k \leqslant \rho^k$, et la série converge.

II Différents modes de convergence d'une série entière

Problème Dans quelle mesure le rayon de convergence détermine-t-il les modes de convergence ?

On considère ici une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence R.

A) Domaine de convergence simple

Théorème :
Le domaine de convergence simple de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, c'est-à-dire le domaine de définition de $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ vérifie :

1. Pour les réels, $]-R, R[\subset \mathrm{Def}_{\mathbb{R}}(f) \subset [-R, R]$
2. Pour les complexes, $D_o(0, R) \subset \mathrm{Def}_{\mathbb{C}}(f) \subset D_f(0, R)$

Démonstration :

Voir section précédente.

Pour $|z| < R$, il y a convergence absolue.

Pour $|z| > R$, il y a divergence grossière.

Exemples Avec $R = 1$:

- $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$: $\mathrm{Def}_{\mathbb{C}}(f) = D_o(0,1)$
- $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(n+1)^2}$: $\mathrm{Def}_{\mathbb{C}}(f) = D_f(0,1)$
- $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1}$: $\mathrm{Def}_{\mathbb{C}}(f) = D_f(0,1)\setminus\{1\}$
- $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{15(n+1)}}{n+1}$: $\mathrm{Def}_{\mathbb{C}}(f) = D_f(0,1)\setminus\mathbb{U}_{15}$

B) Convergence uniforme et normale

Théorème :

Une série entière de rayon de convergence R non nul converge normalement donc uniformément sur tout disque fermé de centre 0 et de rayon $r < R$

Attention : En général, une série entière ne converge pas uniformément sur $D_o(0,R)$ ni sur $\mathrm{Def}_{\mathbb{C}}(f)$.

Démonstration :

Pour $r \in [0, R[$, $\sup_{|z|\leqslant r} |a_n z^n| = |a_n| r^n$, terme général d'une série convergente car $0 \leqslant r < R$.

C) Application à $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$

Théorème :

f est continue sur le disque ouvert de convergence absolue.

Attention : En général, f n'est pas continue sur $\mathrm{Def}_{\mathbb{C}}(f)$

En effet : pour $r < R$, f est limite uniforme sur $D_f(0,r)$ d'une suite de fonctions continues, donc f est continue.

Ainsi, f est continue sur $\bigcup_{r<R} D_f(0,r) = D_o(0,R)$.

Exercices de compléments (On suppose que $0 < R < +\infty$)

1. Si $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$ est absolument convergente, alors on a convergence normale sur $D_f(0,R)$. Donc le domaine de définition de f est $D_f(0,R)$ et f y est continue.
2. Cas de la variable réelle : utilisation des séries alternées.

   On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}, (-1)^n a_n \geqslant 0$, et que $|a_n R^n|$ décroît vers 0.

   Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge uniformément (mais pas toujours normalement) sur $[0, R]$, et $D_R(f)$ contient R et est continu en R.

En effet : Pour $x \in [0, R]$, $u_n(x) = a_n x^n = (-1)^n \underbrace{\left((-1)^n a_n R^n\right)}_{\geqslant 0} \left(\frac{x}{R}\right)^n$

Donc $u_n(x)$ est alternée, et de plus $|u_n(x)|$ décroît vers 0.

Donc la série de terme général $u_n(x)$ converge (critère de Leibniz)

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| \leqslant |u_{n+1}(x)| \leqslant |a_n R^n|$

Donc $\|R_n\|_\infty \xrightarrow[+\infty]{} 0$

Il y a donc convergence simple, et la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0, donc la série converge uniformément.

Théorème (Théorème de convergence radiale d'Abel) :

3. Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière, $z_0 \in \mathbb{C}^*$ tel que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_0^n$ converge.

Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est uniformément convergente sur $[0, z_0]$

En particulier, $f_{|[0,z_0]}$ est continue en z_0.

Démonstration :

On pose $z = z_0 u$ pour $u \in [0; 1]$

Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a'_n u^n$ où $a'_n = a_n z_0^n$

On est donc ramené au même problème avec $z_0 = 1$, ce qu'on suppose.

On suppose donc que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge et on veut montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est uniformément convergente sur $[0; 1]$. Posons $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$.

On va montrer le critère de Cauchy pour la convergence uniforme.

Soient $n, m \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant m$. Alors :

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n} a_k x^k &= \sum_{k=m}^{n} (r_{k-1} - r_k) x^k = \sum_{j=m-1}^{n-1} r_j x^{j+1} - \sum_{j=m}^{n} r_j x^j \\ &= \sum_{j=m}^{n} r_j (x^{j+1} - x^j) + r_{m-1} x^m - r_n x^{n+1}\end{aligned} \tag{11.5}$$

Donc $|\sum_{k=m}^{n} a_k x^k| \leqslant \sum_{j=m}^{n} |r_j||x|^j|1-x| + |r_{m-1}||x|^m - |r_n||x|^{n+1}$

Soit $\varepsilon > 0$, et $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N, |r_n| \leqslant \varepsilon$

Pour $n \geqslant m \geqslant N$, $|\sum_{k=m}^{n} a_k x^k| \leqslant \varepsilon(\sum_{j=m}^{n} x^j \underbrace{|x-1|}_{1-x} + x^m + x^{n+1}) \leqslant 2\varepsilon x^m \leqslant 2\varepsilon$

Remarque :

Comme conséquence, on a le fait que pour toute série entière de rayon de convergence R, $x \in \mathrm{Def}_{\mathbb{R}}(f) \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue (même en $\pm R$ si ils sont dans $\mathrm{Def}_{\mathbb{R}}(f)$)

Proposition (Expression intégrale des coefficients) :

4. On suppose que $R > 0$, on note $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

Pour tout $x \in [0; R[$, $\varphi\colon t \mapsto f(re^{it})$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-int} \, \mathrm{d}t = a_n r^n \tag{11.6}$$

Démonstration :

$t \mapsto re^{it}$ est continue à valeurs dans $D_o(0, R)$ où f est continue donc φ est continue sur $\mathbb{R}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-int}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(re^{it})^k\right)e^{-int}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k r^k e^{i(k-n)t}\,\mathrm{d}t \tag{11.7}$$

On pose $u_k(t) = a_k r^k e^{i(k-n)t}$. Alors u_k est continue et $\|u_k\|_\infty = |a_k|r^k$, terme général d'une série convergente ($r < R$)

Donc $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est normalement, donc uniformément convergente sur $[0;2\pi]$, et on peut intervertir l'intégrale et la somme :

$$\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-int}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k r^k \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)t}\,\mathrm{d}t = 2\pi a_n r^n \tag{11.8}$$

Théorème (de Liouville) :

Soit f une fonction entière. On suppose qu'il existe $A, B, C > 0$ tels que $\forall z \in \mathbb{C}, |f(z)| \leqslant A+B|z|^C$.

Alors f est un polynôme

(Fonction entière : somme d'une série entière de rayon de convergence infini)

Démonstration :

Supposons que $\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $r > 0$, on a $a_n = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-int}\,\mathrm{d}t$

Donc $|a_n| \leqslant \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi}\left|f(re^{it})\right|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{r^n}(A+Br^C)$

Pour $n > C$, le passage à la limite quand $r \to +\infty$ donne $a_n = 0$, c'est-à-dire $f(z) = \sum_{n=0}^{C} a_n z^n$

III Propriétés analytiques de la somme d'une série entière

Morale Sur $]-R;R[$, on calcule avec la somme d'une série entière comme avec un polynôme.

A) Régularité

Lemme :

Une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ et la série dérivée formelle $(\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1})$ ont le même rayon de convergence.

Démonstration :

On note R le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, R' celui de $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$.

Pour $r \in [0;R'[$, on a pour $n \geqslant 1$: $a_n r^n = n a_n r^{n-1} \times \frac{r}{n}$

Comme $(n a_n r^{n-1})_{n\in\mathbb{N}*}$ est bornée, $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est aussi.

Donc $[0;R'[\subset [0;R]$, et $R \geqslant R'$.

Si $r \in [0;R[$, soit $s \in]r,R[$. Alors $(a_n s^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, et :

$$\forall n \geqslant 1, n a_n r^{n-1} = a_n s^n \times \frac{1}{s} n \left(\frac{r}{s}\right)^{n-1} \tag{11.9}$$

Comme $(a_n s^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, et $\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{r}{s}\right)^{n-1} = 0$, la suite $(n a_n r^{n-1})_{n\geqslant 1}$ est bornée, et donc $r \leqslant R'$.

Donc $[0;R[\subset [0;R']$, d'où l'autre inégalité puis $R = R'$.

Théorème :

La somme d'une série entière de rayon de convergence R est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et indéfiniment dérivable terme à terme sur $]-R, R[$.

Remarque :

Ce théorème remplace l'appel au théorème sur les caractérisations $\mathcal{C}^k$ des séries de fonctions (Mais il ne donne *aucune* information sur $\pm R$)

Corollaire :

Unicité du développement en série entière de séries entière de rayon de convergence non nul :

Si $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour $x \in]-R, R[$ où R est le rayon de convergence, strictement positif, alors $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ (C'est-à-dire que la série est la série de Taylor)

Démonstration :

Pour le théorème :

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$.

Posons $u_n(x) = a_n x^n$. Alors u_n est de classe $\mathcal{C}^1$.

Le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n'$ est encore R.

Donc sur tout segment $[-r, r]$ où $r < R$, les deux séries $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n'$ sont normalement convergentes donc uniformément convergentes.

Ainsi, f est de classe $\mathcal{C}^1$, dérivable terme à terme sur $[-r, r]$ pour tout $r < R$, donc sur $]-R, R[$.

Ensuite, par récurrence, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$.

Ainsi, $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]-R, R[, f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k-1)a_n x^{n-k}$

Donc $\forall k \in \mathbb{N}^*, f^{(k)}(0) = k! a_k$, ce qui établit ainsi le corollaire.

B) Algèbre des fonctions développables en série entière sur $]-a, a[$

- **Définition :**

  Une fonction $f\colon]-a, a[\to \mathbb{C}$ (pour $a > 0$) est dite développable en série entière s'il existe une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence $R \geqslant a$ telle que $\forall x \in]-a; a[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

  Exemple :

  $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ est développable en série entière sur $]-1, 1[$ et $\forall x \in]-1, 1[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.

  Notation (ici seulement) :

  On note DSE(a) l'ensemble des fonctions $f\colon]-a; a[\to \mathbb{C}$ développables en série entière, où $a \in [0; +\infty]$.

Théorème :

◇ DSE(a) est une sous-algèbre de $\mathcal{C}^\infty(]-a; a[, \mathbb{C})$, stable par dérivation et primitivation.

◇ Pour $f\colon]-a; a[\to \mathbb{C}$, développable en série entière avec $\forall x \in]-a, a[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, et pour tout segment $[u, v] \subset]-a; a[$, on a $\int_u^v f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_u^v t^n\,\mathrm{d}t$.

Démonstration :

On a vu que si $f \in$ DSE(a), alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-a; a[$, dérivable terme à terme.

Si $\forall x \in]-a;a[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, alors $\forall x \in]-a;a[, f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$, et le rayon de convergence de la série dérivée est égal au rayon de convergence de la série.

Donc $f' \in \mathrm{DSE}(a)$.

Si $\forall x \in]-a,a[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, on prend $F(x) = C + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$; alors le rayon de convergence de cette série entière est égal à celui de sa dérivée, qui est f. Donc $F \in \mathrm{DSE}(a)$.

Montrons que $\mathrm{DSE}(a)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{C}^\infty(]-a,a[,\mathbb{C})$.

Déjà, $\mathrm{DSE}(a)$ n'est pas vide (contient par exemple les fonctions polynomiales).

Et $\mathrm{DSE}(a)$ est stable par $+$ et $\times$, d'après les théorèmes sur le rayon de convergence des sommes et produits.

Soit $R \geqslant a$ le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Pour $[u,v] \subset]-a,a[$, prenons $r = \max(|u|,|v|) < a$. Sur $[-r,r]$, et donc sur $[u,v]$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est normalement convergente, donc on peut intégrer terme à terme sur $[u,v]$

- Caractérisation des fonctions développables en série entière :

Théorème :

Soit $f\colon]-a,a[\to \mathbb{C}$ $(a>0)$

Alors $f \in \mathrm{DSE}(a)$ si et seulement si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et

$$\forall x \in]-a,a[, \lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t = 0 \tag{11.10}$$

De plus, pour $f \in \mathrm{DSE}(a)$, on a $\forall x \in]-a,a[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^n(0)}{n!} x^n$.

Démonstration :

Si $f \in \mathrm{DSE}(a)$, alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et f s'écrit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Comme f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, on peut appliquer la formule de Taylor avec reste intégral :

Pour tout $x \in]-a,a[$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x) - \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)}_{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k} = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = f(x)$, on a $\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Réciproquement, si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-a,a[$, et si pour tout $x \in]-a,a[$, $\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \to 0 \tag{11.11}$$

Donc $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ converge pour tout $x \in]-a,a[$, et a pour somme $f(x)$.

Le rayon de convergence de la série de Taylor est donc $\geqslant a$ et $f \in \mathrm{DSE}(a)$.

Attention : Il existe des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui ne sont pas développables en série entière : $f\colon x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$; alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = 0$.

Si f était développable en série entière sur $]-a,a[$ pour $a > 0$, on aurait

$\forall x \in]-a,a[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0$ ce qui est faux.

Pour $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+tx^2}\,\mathrm{d}t$, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(2n)}(0) = (n!)^2$.

Donc pour tout $x \neq 0$, la série de terme général $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ diverge.

C) Compléments hors programme : série entière de la variable complexe et caractérisation analytique

- **Définition (Caractérisation analytique) :**
  Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $f\colon U \to \mathbb{C}$.
  f est dite analytique sur U lorsque pour tout $x_0 \in U$, il existe une suite $(a_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x_0)t^n$ a un rayon de convergence $R(x_0) > 0$ et il existe $r > 0$ vérifiant :
  $B_o(x_0, r) \subset U$, $r \leqslant R(x_0)$ et $\forall x \in B_o(x_0, r), f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x_0)(x - x_0)^n$
  En d'autres termes, f est analytique lorsque f est développable en série entière au voisinage de tout point de U.

Attention : On a deux notions différentes :

- ◇ Les fonctions analytiques de variable réelle ($U \subset \mathbb{R}$)
- ◇ Les fonctions analytiques de variable complexe ($U \subset \mathbb{C}$)

Exemple :

Pour $z \in \mathbb{C}$, $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$

Alors exp est analytique sur $\mathbb{C}$.

En effet : Soient $z_0 \in \mathbb{C}, h \in \mathbb{C}$.

Alors $\exp(z_0 + h) = e^{z_0} e^h = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{z_0}}{n!} h^n$

Et $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{z_0}}{n!}(z - z_0)^n$ a un rayon de convergence infini.

Proposition :
Si $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ pour $|z| < R$, alors f est analytique sur $D_o(0, R)$.

Démonstration :

Il faut montrer que pour tout $z_0 \in D_o(0, R)$, il existe $r > 0$ tel que pour tout $h \in \mathbb{C}$ tel que $|h| < r$, $f(z_0 + h) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z_0)h^n$ avec un rayon de convergence $R \geqslant r$.

On prend $r = R - |z_0|$.

Pour $|h| < r$, on a $f(x_0 + h) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z_0 + h)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sum_{i=0}^{n} C_n^i z_0^{n-i} h^i = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} u_{n,i}$

Où $u_{n,i} = \begin{cases} a_n C_n^i z_0^{n-i} h^i & \text{si } i \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Pour appliquer la formule de Fubini, on étudie les quantités pour n fixé $\sigma_n = \sum_{i=0}^{+\infty} |u_{n,i}|$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \sigma_n$

Pour tout n, σ_n est bien défini car pour $i > n$, $u_{n,i} = 0$.

De plus, $\sigma_n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i |a_n||z_0|^{n-i}|h|^i = |a_n|(|z_0| + |h|)^n$

La série de terme général σ_n converge car $|z_0| + |h| < |z_0| + r = R$, et donc la série de terme général $a_n(|z_0| + |h|)^n$ converge absolument.

D'après le théorème de Fubini, on a :

$$f(z_0 + h) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} u_{n,i} = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,i} = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{n=i}^{+\infty} C_n^i a_n z_0^{n-i} h^i = \sum_{i=0}^{+\infty} \alpha_i(z_0) h^i \tag{11.12}$$

- **Définition (Dérivabilité au sens complexe) :**
  Soit $f\colon U \to \mathbb{C}$, U étant un ouvert de $\mathbb{C}$, et $z_0 \in \mathbb{C}$ $z_0 \in U$.
  f est dite $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 si le terme $\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$ tend vers une valeur finie (notée $f'_C(z_0)$) lorsque $h \in \mathbb{C}^*$ tend vers 0.
  Si f est $\mathbb{C}$-dérivable en tout $z_0 \in U$, f est dite holomorphe sur U.
  Remarque :
  On peut montrer que si f est holomorphe sur U, alors elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ au sens complexe, et même elle est analytique sur U.

  Exemple :
  - Toute fonctions polynomiale est holomorphe sur $\mathbb{C}$.
  - $z \mapsto \bar{z}$ n'est $\mathbb{C}$-dérivable en aucun point.

Proposition :

Si f est somme d'une série entière de rayon de convergence R non nul, alors f est holomorphe sur $D_o(0, R)$.

Démonstration :

On sait que sur $B_f(0, R - |z_0|)$, on a $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z_0)(z - z_0)^n$

Donc $f(z_0) = a_n(z_0)$, et pour tout $h \in \mathbb{C}$ tel que $0 < |h| < R - |z_0|$, $\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(z_0)h^{n-1}$

Or, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(z_0)h^{n-1}$ un rayon de convergence supérieur ou égal à celui de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z_0)h^n$ (on reconnaît presque la série entière dérivée)

Donc $h \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(z_0)h^{n-1}$ est définie et continue sur $D_0(0, R - |z_0|)$ (au moins)

Donc $\lim\limits_{\substack{h\to 0 \\ 0<|h|<R-z_0}} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$ existe et vaut $a_1(z_0)$.

IV Application des séries entières

A) Développement des fonctions usuelles

- Méthode utile :
  - Par somme, produit, dérivation, primitivation sur des développements en séries entières, on obtient de nouveaux développements.
  - Utilisation d'une équation différentielle :
    Si on sait que f est solution d'une équation différentielle, en injectant $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et en dérivant terme à terme sur l'intervalle de convergence, on obtient des relations entre les a_n.
    Attention : Il faut toujours s'assurer que la série entière obtenue a un rayon de convergence non nul, et que la fonction trouvée est bien solution.
  - On peut aussi étudier le reste de Taylor.
- À partir de la série géométrique :

Théorème :

1. Pour tout $z \in D_o(0, 1)$, $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$, de rayon de convergence égal à 1.

2. Pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $z \in D_o(0,1)$, $\sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-p+1)z^n = \frac{p!z^p}{(1-z)^{p+1}}$, de rayon de convergence égal à 1.

   Ou aussi $\sum_{n=0}^{+\infty} C_{n+p}^p z^n = \frac{1}{(1-z)^{p+1}}$

Démonstration :

Le rayon de convergence est 1 d'après le critère de d'Alembert.

Pour z non nul tel que $|z| < 1$, on pose $\varphi(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (tz)^n, t \in \left]\frac{-1}{|z|}, \frac{1}{|z|}\right[\supset [-1,1]$

Alors φ est dérivable en série entière, de rayon de convergence $\frac{1}{|z|}$, sur $\left]\frac{-1}{|z|}, \frac{1}{|z|}\right[$ et :

$$\forall t \in \left]\frac{-1}{|z|}, \frac{1}{|z|}\right[, \varphi(t) = \frac{1}{1-tz} \tag{11.13}$$

On dérive terme à terme (φ est à variable réelle) :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall t \in \left]\frac{-1}{|z|}, \frac{1}{|z|}\right[, \varphi^{(p)}(t) = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-p+1)t^{n-p}z^n = \frac{p!z^p}{(1-tz)^{p+1}} \tag{11.14}$$

Avec $t = 1$, la formule devient $\sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-p+1)z^n = \frac{p!z^p}{(1-z)^{p+1}}$

Qui est bien la formule voulue pour z non nul.

- Fractions rationnelles :

Théorème :

Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ dont 0 n'est pas pôle, et $R = \min(A)$ où A est l'ensemble modules des pôles de F. (on prend $R = +\infty$ si $F \in \mathbb{C}[X]$)

Alors F est développable en série entière sur $D_o(0,R)$, et le développement s'obtient à partir de la décomposition en éléments simples de F et des formules valables pour $m \geqslant 1$ et $z_0 \neq 1$:

$$\frac{1}{(1-z_0)^m} = \left(\frac{-1}{z_0}\right)^m \sum_{n=0}^{+\infty} C_{m+n-1}^n \left(\frac{z}{z_0}\right)^n \tag{11.15}$$

Complément : le rayon de convergence de la série obtenue est exactement R.

Démonstration :

On a $F = E + \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^{m_i} \frac{a_{i,j}}{(X-z_i)^j}$

Pour $|z| < \min(|z_i|, i \in [\![0,N]\!])$, on a

$$\begin{aligned} F(z) &= E(z) + \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^{m_i} \frac{a_{i,j}}{(-z_i)^j} \frac{1}{(1-z/z_i)^j} \\ &= E(z) + \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^{m_i} \frac{a_{i,j}}{(-z_i)^j} \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} C_{n+j-1}^{j-1} \left(\frac{z}{z_i}\right)^n}_{\text{Rdc}\geqslant\min(|z_i|)} \end{aligned} \tag{11.16}$$

Donc la série entière a un rayon de convergence au moins égal à $\min(|z_i|, i \in [\![0,N]\!])$

Montrons maintenant que le rayon de convergence est égal à $\min(|z_i|, i \in [\![0,N]\!])$:

On peut supposer par exemple que le minimum est $|z_0|$

Alors pour $|z| < |z_0|$, $|F(z)| \xrightarrow[z \to z_0]{} +\infty$

Or, si le rayon de convergence de la série était supérieur à $|z_0|$, cette série entière serait continue en z_0, donc $F(z)$ aurait une limite finie en z_0, ce qui est faux.

- Logarithme, arc tangente :

Théorème :

Pour $x \in]-1,1[$, on a :

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \tag{11.17}$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \tag{11.18}$$

$$\mathrm{Arctan}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \tag{11.19}$$

Tous de rayon de convergence égal à 1.

Démonstration :

On intègre terme à terme $\sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n$ sur $[0,a] \subset]-1,1[$:

$$\ln(1+a) = \int_0^a \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \int_0^a \sum_{n=0}^{+\infty} (-t)^n \,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{a^{n+1}}{n+1} \tag{11.20}$$

(Possible car la rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n$ vaut 1)

De même pour les autres.

Proposition (Complément) :

La première et la troisième formules sont valables en $x = 1$.

En effet : On utilise un argument de continuité en $x = 1$ (on sort ici du chapitre « séries entières », et on travaille comme avec des séries de fonctions quelconques) :

On pose, pour $x \in [-1,1]$, $u_n(x) = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

D'après le critère de Leibniz, on a convergence simple de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,1]$:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| \leqslant |u_{n+1}(x)| = \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \leqslant \frac{1}{2n+1} \to 0 \tag{11.21}$$

Donc la série de terme général u_n converge uniformément sur $[0,1]$, et donc $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ est continue en 1.

Donc $\mathrm{Arctan}(1) = \lim_{x\to 1^-} \mathrm{Arctan}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

On utilise le même argument pour ln.

- Formule du binôme :

Théorème :

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$.

- ◇ La série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} z^n$ a pour rayon de convergence 1 si $\alpha \notin \mathbb{N}$, $+\infty$ sinon.
- ◇ Si $\alpha \in \mathbb{N}$, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} z^n = (1+z)^\alpha$
- ◇ Sinon, pour $x \in]-1,1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n = (1+x)^\alpha = e^{\alpha \ln(1+x)}$

Démonstration :

Si $\alpha \in \mathbb{N}$, alors pour $n \geqslant \alpha + 1$, $\alpha \dots (\alpha - n + 1) = 0$, et la formule est donnée par celle du binôme de Newton.

Si $\alpha \notin \mathbb{N}$, d'après le critère de d'Alembert, le rayon de convergence vaut 1.

Calcul de $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$ pour $x \in]-1,1[$.

On considère $g(x) = f(x)(1+x)^{-\alpha}$. Alors g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$, et

$$\forall x \in]-1,1[, g'(x) = (1+x)^{-\alpha-1}(f'(x)(1+x) - \alpha f(x)) \tag{11.22}$$

Or, pour $x \in]-1,1[$,

$$\begin{aligned} f'(x)(1+x) - \alpha f(x) &= \left(\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}\right)(1+x) - \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \qquad \text{où } a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} (j+1) a_{j+1} x^j + \sum_{j=1}^{+\infty} j a_j x^j - \sum_{j=0}^{+\infty} \alpha a_j x^j \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} \left((j+1)a_{j+1} + (j-\alpha)a_j\right) x^j \end{aligned} \tag{11.23}$$

Or, $\forall j \in \mathbb{N}, a_{j+1} = \frac{\alpha - j}{j+1} \alpha_j$. Donc $\forall x \in]-1,1[, g'(x) = 0$

Or, $g(0) = f(0) = 1$, donc $g = 1$ et $\forall x \in]-1,1[, f(x) = (1+x)^\alpha$.

B) Construction de nouvelles fonctions

Définition :

On définit les fonctions de la variable complexe suivantes :

$\exp, \mathrm{sh}, \mathrm{ch}, \cos, \sin$ pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \cos(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \mathrm{sh}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \mathrm{ch}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \tag{11.24}$$

Toutes de rayon de convergence infini.

Lorsqu'elles sont définies, on peut aussi définir (pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\cos z \neq 0$ ou $\sin z \neq 0$)

$$\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}, \qquad \mathrm{cotan}(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)}, \qquad \mathrm{th}(z) = \frac{\mathrm{sh}(z)}{\mathrm{ch}(z)} \tag{11.25}$$

Théorème :

1. La fonction exponentielle est définie et continue sur $\mathbb{C}$ et réalise un morphisme de groupe $(\mathbb{C}, +)$ vers $(\mathbb{C}^*, \times)$, surjectif de noyau $2\boldsymbol{i}\pi\mathbb{Z}$ où $\frac{\pi}{2}$ est la plus petite solution strictement positive de $\cos x = 0$
2. Pour tout $a \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{at}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ de dérivée $t \mapsto a e^{at}$.

   De même, $\sin, \cos, \mathrm{ch}, \mathrm{sh}$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$...

3. Les formules de trigonométrie sont aussi valables dans $\mathbb{C}$:

   Pour $z \in \mathbb{C}$,

$$\cos z = \operatorname{ch}(\boldsymbol{i}z), \qquad \operatorname{ch}(z) = \cos(\boldsymbol{i}z) \tag{11.26}$$

$$\sin z = \frac{\operatorname{sh}(\boldsymbol{i}z)}{\boldsymbol{i}}, \qquad \operatorname{sh}(z) = \frac{\sin(\boldsymbol{i}z)}{\boldsymbol{i}} \tag{11.27}$$

$$\cos(z) = \sin(z + \frac{\pi}{2}), \qquad \sin(z) = \cos(z - \frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2} - z) \tag{11.28}$$

   Pour $z, z' \in \mathbb{C}$, on a $\cos(z + z') = \cos z \cos z' - \sin z \sin z'$...

Démonstration :

- La fonction exponentielle est somme d'une série entière de rayon de convergence infini, donc est définie et continue sur $\mathbb{C}$. Le théorème sur le produit de séries absolument convergentes donne :

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, e^{z+z'} = e^z e^{z'} \tag{11.29}$$

  Comme $e^0 = 1$, on a $\forall z \in \mathbb{C}, e^z \in \mathbb{C}^*$ et $z \mapsto e^z$ est un morphisme de groupes.

  La restriction de exponentielle à $\mathbb{R}$ est à valeurs réelles. De plus, on peut dériver terme à terme : $\forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = \exp(x)$.

  Par ailleurs, $\exp(\mathbb{R})$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, ne contenant pas 0.

  Comme $1 = \exp(0) \in \exp(\mathbb{R})$, on a donc $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) > 0$.

  Donc exp est positive et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

  Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \geqslant x^0 + \frac{x^1}{1!} = 1 + x \to +\infty$.

  Donc $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{-x}} = 0$

  Donc $\mathbb{R}_+^* \subset \exp(\mathbb{C})$.

  On cherche l'image de $\boldsymbol{i}\mathbb{R}$ par exp :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \overline{\exp(\boldsymbol{i}x)} = \overline{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\boldsymbol{i}x)^n}{n!}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-\boldsymbol{i})^n \frac{x^n}{n!} = \exp(-\boldsymbol{i}x) \tag{11.30}$$

  Donc $|\exp(\boldsymbol{i}x)|^2 = \exp(\boldsymbol{i}x) \times \exp(-\boldsymbol{i}x) = 1$.

  Ainsi, $\exp(\boldsymbol{i}\mathbb{R}) \subset \mathbb{U}$ et contient 1.

  Montrons que $-1 \in \exp(\boldsymbol{i}\mathbb{R})$

  On pose pour $t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = \exp(\boldsymbol{i}t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\boldsymbol{i}^n}{n!} t^n$

  Ainsi, on reconnaît $\operatorname{Re}(\varphi(t)) = \cos t$.

  $\cos(\mathbb{R})$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, inclus dans $[-1, 1]$ (Car $\forall t \in \mathbb{R}, |\cos t| = |\operatorname{Re}(\varphi(t))| \leqslant |\varphi(t)| = 1$), et contient 1 car $\cos 0 = 1$.

  Si $\cos(\mathbb{R})$ contient un élément négatif ou nul, alors il existe t_1 tel que $\cos(t_1) = 0$

  Alors $\cos(2t_1) = \operatorname{Re}(\varphi(2t_1)) = \operatorname{Re}(\varphi(t_1)^2) = \cos^2 t_1 - \sin^2 t_1 = -\sin^2 t_1 = -1$ (Car $|\varphi(t_1)| = 1$)

  Et $\cos(\mathbb{R})$ contient effectivement un élément négatif, car sinon :

  On pose $a = \inf(\cos \mathbb{R}) \geqslant 0$

  Il existe une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels telle que $(\cos t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers a en décroissant.

  Alors pour tout n, $\cos(2t_n) = \cos^2(t_n) - \sin^2(t_n) = 2\cos^2(t_n) - 1$

  Et par passage à la limite, $\cos(2t_n) \to 2a^2 - 1$.

Donc $2a^2 - 1 \geqslant a$, soit $(a-1)(a+\frac{1}{2}) \geqslant 0$

Ainsi, soit $a \geqslant 1$, soit $a \leqslant -\frac{1}{2}$. Comme a est positif, on a $a \geqslant 1$ et donc $\cos = 1$ ce qui est faux car $\cos''(0) = -1$ (d'après le développement)

Donc $-1 \in \exp(\boldsymbol{i}\mathbb{R})$, et $-1 \in \cos(\mathbb{R})$.

Donc $\cos(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.

Pour tout $u = a + \boldsymbol{i}b$ de module 1, il existe t_0 tel que $\cos(t_0) = a$, et alors $\sin t_0 = \pm\sqrt{1-\cos^2 t_0} = \pm b$.

On a donc $e^{\pm \boldsymbol{i}t_0} = u$.

- Existence de $\frac{\pi}{2}$, plus petite racine positive de $\cos x = 0$.

  Déjà, la fonction cosinus est paire (d'après le développement)

  Donc $X = \{a \geqslant 0, \cos a = 0\}$ est un fermé non vide de $\mathbb{R}_+$ (car la fonction cos est paire)

  Donc il admet une borne inférieure qui est en fait son minimum (car X est fermé)

  D'où l'existence.

- Étude de $t \mapsto e^{\boldsymbol{i}at} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n t^n}{n!}$ somme d'une série entière de rayon de convergence infini, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$, dérivable terme à terme...

- Formules de trigonométrie :

  Par exemple : $\cos(2z) = 2\cos^2 z - 1$:

  On a $\cos^2 z + \sin^2 z = (\cos z + \boldsymbol{i}\sin z)(\cos z - \boldsymbol{i}\sin z) = e^{\boldsymbol{i}z}e^{-\boldsymbol{i}z} = 1$

  Puis

$$\begin{aligned}\cos 2z &= \frac{e^{2\boldsymbol{i}z} + e^{-2\boldsymbol{i}z}}{2} = \frac{(e^{\boldsymbol{i}z})^2 + (e^{-\boldsymbol{i}z})^2}{2} = \frac{(\cos z + \boldsymbol{i}\sin z)^2 + (\cos z - \boldsymbol{i}\sin z)^2}{2} \\ &= \cos^2 z - \sin^2 z = 2\cos^2 z - 1\end{aligned} \tag{11.31}$$

Application (Domaine de définition de tangente) :

On étudie l'équation $\begin{cases} \cos z = 0 \\ z \in \mathbb{C} \end{cases}$, c'est-à-dire $e^{\boldsymbol{i}z} = -e^{-\boldsymbol{i}z}$, ou encore $e^{2\boldsymbol{i}z} = -1$

Or, $e^{\boldsymbol{i}\pi} = -1$

En effet, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ (définition), et $\cos\pi = 2\cos^2\frac{\pi}{2} - 1 = -1$

Donc $\cos z = 0 \iff e^{2\boldsymbol{i}(z-\frac{\pi}{2})} = 1 \iff z - \frac{\pi}{2} \in \pi\mathbb{Z} \iff z = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Donc $\mathrm{Dom}_{\mathbb{C}} \tan = \mathbb{C} \backslash \left\{\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right\}$

C) Prolongement de fonctions continues

1) Exemple de l'exponentielle réelle

On suppose connue la fonction $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\exp' = \exp$ et $\exp(0) = 1$.

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

En effet : Par récurrence, exp est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}\left|\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n+1)!}\exp^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t\right| &\leqslant \varepsilon(x)\int_0^x \frac{|x-t|^n}{n!}e^t\,\mathrm{d}t \qquad (\varepsilon(x)=\operatorname{sgn} x)\\ &\leqslant \varepsilon(x)\int_0^x \frac{|x-t|^n}{n!}e^{|x|}\,\mathrm{d}t\\ &\leqslant \varepsilon(x)e^{|x|}\left[\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_0^x = \varepsilon(x)^{n+1}e^{|x|}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\\ &\leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}e^{|x|} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\end{aligned} \tag{11.32}$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{n!}\exp^{(k)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$

On peut prolonger cette fonction à $\mathbb{C}$, (car le rayon de convergence est infini), en posant $\forall z \in \mathbb{C}, \exp z = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}$

2) Exponentielle matricielle

Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on peut poser $\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{A^n}{n!}$

3) Logarithme complexe (hors programme)

Définition, proposition :

On pose, pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z-1|<1$, $\ln z = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^{n+1}}{n+1}$

Remarque : on sait que $\forall x \in]0,2[, \ln x = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}$

Alors :

- ln est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $D_o(1,1)$.
- $\forall z \in D_o(1,1), \exp(\ln z) = z$
- $\forall z \in \mathbb{C}, \left.\begin{matrix}|e^z-1|<1\\ |\operatorname{Im} z|<\frac{\pi}{2}\end{matrix}\right\} \implies \ln(e^z)=z$
- $\forall z,z' \in \mathbb{C}, \left.\begin{matrix}|z-1|<1\\ |z'-1|<1\\ |z'z-1|<1\end{matrix}\right\} \implies \ln zz' = \ln z + \ln z'$

Démonstration :

- $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$ est une série entière de rayon de convergence égal à 1.

  Donc $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$ est défini et continue sur $D_o(0,1)$.

  Donc ln est défini et continu sur $D_o(1,1)$

- $\exp(\ln z)$ est définie pour tout $z \in D_o(1,1)$.

  On va montrer que $\forall z \in D_o(1,1), z\exp(-\ln z) = 1$

  Lemme :

  ◇ Soit $u\colon [0,1] \to D_o(1,1)$ de classe $\mathcal{C}^1$. Alors $t \mapsto \ln(u(t))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ de dérivée $\frac{u'}{u}$.

  ◇ Soit $v\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Alors $t \mapsto \exp(v(t))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ de dérivée $t \mapsto v'(t)e^{v(t)}$.

  Démonstration (Du lemme) :

  On a $\ln(u(t)) = \sum_{n=1}^{+\infty}\underbrace{(-1)^n\frac{(u(t)-1)^{n+1}}{n+1}}_{\alpha_n(t)}$.

  On applique le théorème de dérivation des séries :

- ◇ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, α_n est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\alpha_n'(t) = u'(t) \times (-1)^n (u(t)-1)^n$
- ◇ La série converge simplement en un point (même en tous)
- ◇ La série de terme général α_n' converge uniformément sur $[0,1]$.

En effet, elle converge normalement car si on note $M' = \|u'\|_\infty$, $M = \|u-1\|_\infty$, on a $M < 1$ et donc $\|\alpha_n'\|_\infty \leqslant M'M^n$, terme général d'une série convergente.

Ainsi :

$\ln \circ u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $(\ln \circ u)'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u'(t)(1-u(t))^n = \frac{u'(t)}{1-(1-u(t))} = \frac{u'(t)}{u(t)}$

Maintenant :

Pour $z \in D_o(1,1)$ fixé, posons $u(t) = tz + (1-t) \in [1,z]$ et $\varphi(t) = u(t)e^{-\ln(u(t))}$

Comme u est de classe $\mathcal{C}^1$ à valeurs dans $D_o(1,1)$, φ est de classe $\mathcal{C}^1$, et $\forall t \in [0,1]\,, \varphi'(t) = e^{-\ln(u(t))}\left(u'(t) - \frac{u'(t)}{u(t)}u(t)\right) = 0$

Donc $\varphi = \varphi(0) = 1$

En particulier, $\varphi(1) = 1 = ze^{-\ln z}$.

- Si $|e^z - 1| < 1$ et $|\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{2}$,

  Tout d'abord, $e^{\ln(e^z)} = e^z$

  Donc il existe $k(z) \in \mathbb{Z}$ tel que $\ln(e^z) = z + 2\boldsymbol{i}k(z)\pi$.

  k est continue car $k(z) = \frac{\ln(e^z)-z}{2\boldsymbol{i}\pi}$.

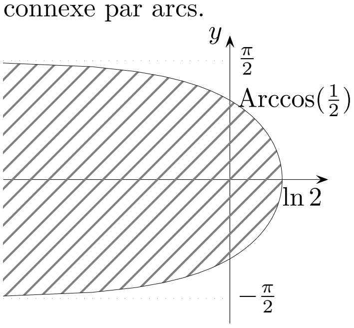
  Étude du domaine $\left\{z \in \mathbb{C}, |e^z - 1| < 1 \text{ et } |\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{2}\right\} = D$.

  Soit $z = x + \boldsymbol{i}y$ pour $x, y \in \mathbb{R}$.

  Alors $|e^z - 1|^2 = \left(e^{x+\boldsymbol{i}y} - 1\right)\left(e^{x-\boldsymbol{i}y} - 1\right) = e^{2x} - 2\cos y e^x + 1$

  Donc $D = \left\{z = x + \boldsymbol{i}y \in \mathbb{C}, |y| < \frac{\pi}{2} \text{ et } e^x < 2\cos y\right\}$

  D est convexe car c'est le sous–graphe de $y \mapsto \ln(2\cos y)$ qui est concave sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Donc D est connexe par arcs.



  Donc k est continu sur D connexe par arcs à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

  Donc $k = k(0) = 0$.

- Soient u, v tels que $|u-1| < 1$, $|v-1| < 1$, $|uv-1| < 1$. On a déjà $\exp(\ln u + \ln v) = \exp(\ln u)\exp(\ln v) = uv = \exp(\ln(uv))$

  Donc $\ln(u) + \ln(v) = \ln(uv) + 2\boldsymbol{i}k(u,v)\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

  On fixe $u = u_0$ tel que $|u_0 - 1| < 1$. Alors $u_0 \neq 1$.

  On fait varier v dans le domaine $D(u_0)$ défini par $\begin{cases} |v-1| < 1 \\ |u_0 v - 1| < 1 \end{cases}$, c'est-à-dire $|v - \frac{1}{u_0}| < |\frac{1}{u_0}|$.

  $D(u_0)$ est une intersection de deux disques, donc est convexe, donc connexe par arcs.

  De plus, il contient $v = 1$.

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à $\begin{array}{rcl} D(u_0) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ v & \longmapsto & k(u_0,v) \end{array}$, $k(u_0,v) = k(u_0,1) = 0$.

V Application classique des séries entières

Résolution d'équations fonctionnelles (surtout différentielles) On cherche des solutions de l'équation $(E) :\ x^2y'' + 4xy' + (2-x^2)y - 1 = 0$

Analyse On cherche f dérivable en séries entières solution de (E) de rayon de convergence R non nul, disons $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, dérivable terme à terme sur $]-R,R[$. Donc :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} 4na_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} 2a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} = 1 \tag{11.33}$$

Par unicité du développement en séries entières de rayon de convergence non nul, on a :

- Pour $n=0$: $2a_0 = 1$, soit $a_0 = \frac{1}{2}$.
- Pour $n=1$: $4a_1 + 2a_1 = 0$, soit $a_1 = 0$
- Pour $n \geqslant 2$: $n(n-1)a_n + 4na_n + 2a_n - a_{n-2} = 0$, soit :

$$a_n(n^2+3n+2) = a_n(n+1)(n+2) = a_{n-2} \tag{11.34}$$

  ◇ Si n est impair, $a_n = 0$

  ◇ Si n est pair,

$$a_{2p} = \frac{a_{2(p-1)}}{(2p+2)(2p+1)} = \frac{a_{2(p-2)}}{(2p+2)(2p+1)(2p)(2p-1)} = \cdots = \frac{a_0 \times 2}{(2p+2)!} = \frac{1}{(2p+2)!} \tag{11.35}$$

  Donc

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+2)!} = \begin{cases} \frac{1}{x^2}(\mathrm{ch}(x)-1) & \text{si } x \neq 0 \\ 1/2 & \text{si } x = 0 \end{cases} \tag{11.36}$$

Réciproquement, soit f défini par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+2)!}$; alors f a un rayon de convergence infini (critère de d'Alembert), donc f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et on vérifie que f est solution sur $\mathbb{R}$ de (E). (soit directement, soit avec les coefficients)