



Chapitre 8 : Changement de corps en algèbre linéaire

But Dans tout le texte, \mathbb{K} désigne un corps et \mathbb{L} une extension de \mathbb{K} .

On va étudier les problèmes :

1. Soit \mathbb{K} un corps, $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme. Peut-on trouver une extension \mathbb{L} de \mathbb{K} dans laquelle P admet au moins une racine ? Dans laquelle P est scindé ?
2. En changeant de corps, change t'on les propriétés d'une matrice ?

I \mathbb{R} -similitude et \mathbb{C} -similitude

Théorème :

Deux matrices réelles A, B sont \mathbb{R} -semblables si et seulement si elles sont \mathbb{C} -semblables.

Démonstration :

Si $A = PBP^{-1}$ où $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, alors A et B sont \mathbb{C} -semblables car $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$.

Réciproquement, supposons que $A = PBP^{-1}$ où $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$.

On peut écrire $P = P_1 + iP_2$ où P_1 et P_2 sont réelles (pas forcément inversibles).

Comme $A(P_1 + iP_2) = B(P_1 + iP_2)$, on a $AP_1 = BP_1$ et $AP_2 = BP_2$.

Si l'une des deux matrices réelles est inversible, on peut conclure.

Sinon, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $P_1 + xP_2$ est inversible (réelle), et on peut encore conclure.

En effet, $f(x) = \det(P_1 + xP_2)$ est une fonction polynomiale réelle, et n'est pas nulle car $f(i) = \det(P) \neq 0$, donc elle prend des valeurs non nulles sur \mathbb{R} .

II Invariance du rang

Théorème :

On a $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \subset \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{L})$ et le rang d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est le même que l'on considère que A est à coefficients dans \mathbb{K} ou dans \mathbb{L} .

Ainsi, le rang d'une matrice à coefficients dans \mathbb{K} peut s'obtenir aussi bien à l'aide d'opérations élémentaires à coefficients dans \mathbb{K} que dans \mathbb{L} .

Démonstration :

On note r le rang de A sur \mathbb{K} . On a alors $A = PJ_rQ$ avec $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \subset \mathcal{GL}_n(\mathbb{L})$ et $Q \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K}) \subset \mathcal{GL}_p(\mathbb{L})$ donc le rang de A sur \mathbb{L} est aussi r .

Corollaire :

Soit $AX = 0$ un système de n équations à p inconnues à coefficients dans \mathbb{K} de rang r .

Si $(X_1, \dots, X_{p-r}) \in \mathbb{K}^p$ est une base de l'espace des solutions dans \mathbb{K} , c'en est aussi une de l'espace des solutions dans \mathbb{L} .

Démonstration :

Les X_i sont aussi des solutions à coefficients dans \mathbb{L} et la matrice P représentant (X_1, \dots, X_{p-r}) dans la base canonique de \mathbb{L}^p est aussi celle qui représente (X_1, \dots, X_{p-r}) dans la base canonique de \mathbb{K}^p . P est donc de rang $p - r$ sur \mathbb{L} . Autrement dit, (X_1, \dots, X_{p-r}) est libre dans le \mathbb{L} -ev \mathbb{L}^p ; c'est donc une base de l'espace des solutions de $AX = 0$ dans \mathbb{L}^p puisque cet espace est aussi de dimension $p - r$ car le rang de A est le même sur \mathbb{K} et \mathbb{L} .

III Invariance du polynôme caractéristique et du polynôme minimal

Théorème :

On a $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{L})$ et les polynômes caractéristique et minimal de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont les mêmes que l'on considère que A est à coefficients dans \mathbb{K} ou dans \mathbb{L} .

Démonstration :

Pour le polynôme caractéristique, c'est évident...

Soit $m \in \mathbb{K}[X] \subset \mathbb{L}[X]$ le polynôme minimal de A sur \mathbb{K} et M son polynôme minimal sur \mathbb{L} . On a $\tilde{m}(A) = 0$, donc M divise m dans $\mathbb{L}[X]$.

Par ailleurs, si d est le degré de m , la famille (I_n, A, \dots, A^{d-1}) est libre dans le \mathbb{K} -ev $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, donc la matrice $P \in \mathcal{M}_{n^2, d}(\mathbb{K})$ qui représente cette famille dans la base canonique est de rang d . Mais P représente aussi la famille (I_n, A, \dots, A^{d-1}) dans la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{L})$ (les deux bases sont constituées des mêmes matrices $E_{i,j}$). La propriété d'invariance du rang montre alors que le rang de P sur \mathbb{L} est aussi d donc que (I_n, A, \dots, A^{d-1}) est libre dans le \mathbb{L} -ev $\mathcal{M}_n(\mathbb{L})$, et donc A n'a pas de polynôme annulateur non nul dans $\mathbb{L}_{d-1}[X]$, ce qui impose $\deg M = d$ et donc $M = m$.

IV Extension du I

Théorème :

Si \mathbb{K} est infini, deux matrices A, B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ semblables sur \mathbb{L} sont semblables sur \mathbb{K} .

L'autre sens est toujours aussi évident.

Démonstration :

Supposons A et B \mathbb{L} -semblables. Alors le système $AP = PB$ est un système de N^2 équations à coefficients dans \mathbb{K} d'inconnues les coordonnées $(P_{i,j})$ de P dans la base canonique. Comme ce système est représenté par une matrice à coefficients dans \mathbb{K} (dépendants des coefficients de A et B), le rang est le même que l'on regarde les solutions $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ou dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{L})$.

Soit P_1, \dots, P_N une base de solutions du système $AP = PB$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice qui représente (P_1, \dots, P_N) dans la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de rang N donc la matrice qui représente (P_1, \dots, P_N) dans la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{L})$ aussi. Ainsi, (P_1, \dots, P_N) est un système libre de solutions de $AP = PB$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{L})$. Comme le système est de rang N , c'en est une base.

Autrement dit, toute solution $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{L})$ de $AP = PB$ s'écrit $P = \sum_{i=1}^N x_i P_i$ avec $x_i \in \mathbb{L}$.

Or, ce système a une solution inversible donc la fonction polynomiale $f(x_1, \dots, x_N) = \det \left(\sum_{i=1}^N x_i P_i \right)$ n'est pas la fonction nulle sur \mathbb{L}^N , ce qui veut dire que $f(x_1, \dots, x_N)$ est somme de termes $ax_1^{n_1} \dots x_N^{n_N}$ (où $a \in \mathbb{K}$ car s'exprimant à l'aide des P_j) dont au moins l'un est non nul. On conclut en utilisant le lemme :

Lemme :

Si $f \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ est un polynôme non nul et si \mathbb{K} est infini, alors la fonction polynomiale $\tilde{f}: \mathbb{K}^N \rightarrow \mathbb{K}$ n'est pas identiquement nulle.

En effet : montrons le résultat par récurrence sur N :

Le cas $N = 1$ est connu pour \mathbb{K} infini.

Soit $N \geq 2$, supposons la propriété vraie pour $N - 1$. Soit $f \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$. On écrit alors $f = \sum_{i=1}^d P_i X_N^i$ avec $P_i \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_{N-1}]$. L'un au moins des P_i est non nul.

Donc, par hypothèse de récurrence, on peut fixer $a = (a_1, \dots, a_{n-1})$ tel que $\sum_{i=1}^d P_i(a) X_N^i$ ne soit pas le polynôme nul ; alors, comme \mathbb{K} est infini, il existe x tel que $\sum_{i=1}^d P_i(a) x^i \neq 0$, et dans ce cas $f(a_1, \dots, a_{n-1}, x) \neq 0$ ce qui achève la récurrence.

Ainsi, pour en revenir au théorème, le lemme montre que $AP = PB$ a une solution inversible, disons $P = \sum_{i=1}^N x_i P_i$ où $\forall i \in [1, n], x_i \in \mathbb{K}$

Donc $A = PBP^{-1}$ pour une matrice $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.

V Construction de corps

Théorème :

Soit \mathbb{K} un corps, et $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors il existe une extension \mathbb{L} de degré fini de \mathbb{K} dans laquelle P est scindé.

Démonstration :

Par récurrence (forte) sur $d = \deg P - m$ où m est la somme des multiplicités des racines de P dans \mathbb{K} .

Pour $d = 0$, P est scindé sur \mathbb{K} , donc $\mathbb{L} = \mathbb{K}$ convient.

Soit $d \geq 1$, supposons la propriété vraie pour tout corps \mathbb{K} et tout $d' < d$ et soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $d = \deg P - m$. Soit R un facteur irréductible de P de degré $r \geq 2$. Alors l'anneau quotient $\mathbb{L} = \mathbb{K}[X]/(R\mathbb{K}[X])$ est un corps, et c'est une extension de dimension r de \mathbb{K} , dont $1, \bar{X}, \dots, \bar{X}^{r-1}$ est une \mathbb{K} -base. En plus, on a $\bar{P} = 0$ dans \mathbb{L} donc \bar{X} est racine de P .

Ainsi, sur \mathbb{L} , P a une racine de plus et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à $P \in \mathbb{L}[X]$: on peut trouver une extension finie \mathbb{M} de \mathbb{L} , donc aussi de \mathbb{K} dans laquelle P est scindé.

VI Applications

- Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il existe \mathbb{L} , extension finie de \mathbb{K} , dans laquelle A est trigonalisable.
- Le polynôme minimal d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ divise son polynôme caractéristique (Cayley–Hamilton); de plus, les deux ont les mêmes facteurs irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$.

Démonstration :

Soit R un facteur irréductible de \min_A dans $\mathbb{K}[X]$ et \mathbb{L} une extension finie de \mathbb{K} dans laquelle R est scindé. Si a est une racine de R , on a alors $\min_A(a) = 0$, donc a est une valeur propre de A dans \mathbb{L} (car \min_A est aussi le polynôme minimal de A sur \mathbb{L}) et a est donc une racine de χ_A . Ainsi, R et χ_A ne sont pas premiers entre eux dans $\mathbb{K}[X]$ (on ne peut pas écrire une relation de Bézout puisque $R(a) = \chi_A(a) = 0$) donc R , qui est irréductible, divise χ_A .

D'où le résultat.

- Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{Z})$. On suppose que $MX = 0$ a une solution non nulle à coefficients réels positifs. Alors il a une solution non nulle à coefficients dans \mathbb{N} .

Démonstration :

Quitte à supprimer des colonnes de M , on peut supposer que $MX = 0$ a une solution à coefficients strictement positifs.

Soit $V_1, \dots, V_N \in \mathbb{Q}^p$ une base de solutions rationnelles de $MX = 0$. Selon le corollaire du II, $V_1, \dots, V_N \in \mathbb{Q}^p$ est aussi une base de l'espace des solutions réelles de $MX = 0$. Par hypothèse, il existe donc des réels x_1, \dots, x_N tels que $X = \sum_{i=1}^N x_i V_i$ est à coefficients strictement positifs. Prenons pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ une suite $(r_i(n))_{n \in \mathbb{N}}$ de rationnels tendant vers x_i . Pour n assez grand, $\sum_{i=1}^N r_i(n) V_i$, qui tend vers X , est un vecteur rationnel à coefficients strictement positifs. En multipliant par un dénominateur commun des $r_i(n)$, on obtient une solution non nulle à coefficients dans \mathbb{N} .