Chapitre 7 : Étude et réduction des endomorphismes

$\mathbb{K}$ désigne ici un corps commutatif quelconque.

I Éléments propres d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée

A) Définition

Soit $u \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E)$, E étant un $\mathbb{K}$-ev.

Équation aux éléments propres de u $\quad u(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$ où $\lambda \in \mathbb{K}, \vec{v} \in E \backslash \{0\}$.

On appelle valeur propre (abréviation vp) de u tout $\lambda \in \mathbb{K}$ pour lequel il existe $\vec{v} \neq \vec{0}$ vérifiant $u(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$.

On appelle vecteur propre (abr. $\vec{v}$p) de u tout $\vec{v}$ non nul tel qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ vérifiant $u(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$.

Attention : $\vec{0}$ n'est pas vecteur propre.

Proposition :

Si $\vec{v}$ est $\vec{v}$p, il existe un unique $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$.

En effet, si $\lambda\vec{v} = \mu\vec{v}$, alors $\lambda = \mu$ car $\vec{v} \neq \vec{0}$.

Définition :

Si $\vec{v} \neq \vec{0}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ vérifient $u(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$, on dira que :

1. λ est *la* valeur propre associée à $\vec{v}$
2. $\vec{v}$ est *un* vecteur propre associé à λ.

Proposition :

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a les équivalences :

1. λ est vp de u.
2. $\ker(u - \lambda \operatorname{Id}_E) \neq \{0\}$

Définition :

Si λ est vp de u, le sous-espace vectoriel $\ker(u - \lambda \operatorname{Id}_E)$ s'appelle sous-espace propre de u associé à la vp λ.

On a alors $\ker(u - \lambda \operatorname{Id}_E) = \{\vec{v}\text{p associés à } u\} \cup \{0\}$.

Notation :

$E(u) = \ker(u - \lambda \operatorname{Id}_E)$.

B) Cas des matrices carrées

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

On appelle éléments propres (valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre) de A les éléments propres de l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ $\begin{array}{rccc} u_A \colon & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ & X & \longmapsto & AX \end{array}$.

On parle aussi de vecteurs colonnes propres (vcp) :

$X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est vcp de A associé à la vp $\lambda \in \mathbb{K}$ si $X \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ et $AX = \lambda X$.

Théorème, définition (polynôme caractéristique d'une matrice carrée) :
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

La matrice $A - XI_n$ à coefficients dans l'anneau $\mathbb{K}[X]$ vérifie :

$$\det(A - XI_n) = (-1)^n(X^n + \alpha_{n-1}X^{n-1} + \dots + \alpha_0) \in \mathbb{K}[X] \tag{7.1}$$

où $\alpha_0 = (-1)^n \det A$ et $\alpha_{n-1} = -\operatorname{Tr}(A)$.

Le polynôme $\det(A - XI_n)$ s'appelle polynôme caractéristique de A, noté χ_A (étude plus loin dans le chapitre)

Démonstration :
$A - XI_n \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}[X])$, ses coefficients sont $(A - XI_n)_{i,j} = A_{i,j} - X\delta_{i,j}$.

Donc $\det(A - XI_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) P_\sigma(X)$ où $P_\sigma = \prod_{i=1}^n (A - XI_n)_{i,\sigma(i)} = \prod_{i=1}^n A_{i,\sigma(i)} - X\delta_{i,\sigma(i)}$

Chaque P_σ est dans $\mathbb{K}_n[X]$, donc $\det(A - XI_n) \in \mathbb{K}_n[X]$.

On a de plus $\deg P_\sigma = n$ si et seulement si $\forall i \in [\![1, n]\!], \sigma(i) = i$, c'est-à-dire $\sigma = \mathrm{Id}$.

(En effet, sinon $\prod_{i=1}^n (A_{i,\sigma(i)} - X\delta_{i,\sigma(i)})$ est de degré $\leqslant n - 1$).

On a ainsi un seul P_σ de degré n, à savoir $P_{\mathrm{Id}} = \prod_{i=1}^n (A_{i,i} - X)$, et on voit alors que le terme dominant de $\det(A - XI_n)$ est $(-1)^n$.

De plus, on ne peut pas avoir $\deg P_\sigma = n - 1$, car si $\sigma(i) = i$ pour $n - 1$ valeurs de i entre 1 et n, alors c'est pareil pour la dernière, et $\sigma = \mathrm{Id}$.

Ainsi, le coefficient de X^{n-1} dans χ_A vient uniquement de celui de P_{Id}, et $P_{\mathrm{Id}} = (-X)^n + (-X)^{n-1}(A_{1,1} + \dots + A_{n,n}) + \cdots$

Pour la constante :

Lemme :
Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$.
En effet, développer $\det(A - \lambda I_n)$ ou développer $\det(A - XI_n)$ puis remplacer X par λ revient au même.

Ainsi, la constante de χ_A vaut $\chi_A(0) = \det(A)$.

Expression des α_j (en caractéristique 0) On a :

$$(-1)^n(X^n - \operatorname{Tr}(A)X^{n-1} + \alpha_2(A)X^{n-2} + \dots + (-1)^n \det A) = \begin{vmatrix} A_{1,1} - X & & & \\ A_{2,1} & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ A_{n,1} & & & A_{n,n} - X \end{vmatrix} \tag{7.2}$$

Donc

$$\chi_A' = \begin{vmatrix} -1 & A_{1,2} & & \\ 0 & A_{2,2}-X & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & A_{n,n}-X \end{vmatrix} + \cdots + \begin{array}{c} \begin{vmatrix} A_{1,1}-X & & & 0 & \\ & \ddots & & \vdots & \\ & & A_{j-1,j-1}-X & 0 & \\ \hdashline & & & -1 & \\ & & & 0 & \cdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,j-1} & \vdots & \end{vmatrix} \\ j \end{array} {\scriptstyle j} + \cdots \tag{7.3}$$

En 0,

$$\chi_A'(0) = -(\det \tilde{A}_{1,1}) + \cdots + \det \tilde{A}_{n,n} \tag{7.4}$$

Où $\tilde{A}_{i,j}$ est obtenu à partir de A en retirant la i-ème ligne j-ème colonne.

En dérivant une seconde fois,

$$\begin{aligned} \chi_A'' &= \text{ somme des déterminants obtenus en dérivant deux colonnes distinctes de } A - XI_n \\ &= 2 \times \begin{vmatrix} -1 & 0 & \\ 0 & -1 & \\ \vdots & \vdots & \cdots \\ 0 & 0 & \end{vmatrix} + \cdots \\ &= 2 \sum_{i<j} \underbrace{\begin{vmatrix} & \vdots & & 0 & \\ & 0 & & \vdots & \\ C_1, \dots, C_{i-1}, & \begin{matrix} -1 \\ 0 \end{matrix} & , C_{i+1}, \dots, & \begin{matrix} 0 \\ -1 \end{matrix} & , \dots, C_n \\ & \vdots & & 0 & \\ & 0 & & \vdots & \end{vmatrix}}_{=\det(\tilde{A}_{(i,i),(j,j)})} \end{aligned} \tag{7.5}$$

En comparant les deux expressions, on a :

$$-\sum_{i=1}^{n} \det(\tilde{A}_{i,i}) = \chi_A'(0) = (-1)^n \alpha_{n-1}(A) \tag{7.6}$$

$$2 \sum_{i<j} \det(\tilde{A}_{(i,i),(j,j)}) = (-1)^n \alpha_{n-1}(A) \times 2 \tag{7.7}$$

Donc

$$\chi_A = (-1)^n (X^n - \mathrm{Tr}(A) X^{n-1} + \beta_{n-2} X^{n-2} - \beta_{n-3} X^{n-3} + \cdots + (-1)^{n-1} \beta_1 X + (-1)^n \det A) \tag{7.8}$$

où $\forall k \in [\![1, n]\!], \beta_k = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k} \det \tilde{A}_{(i_1,i_1),(i_2,i_2),\cdots,(i_k,i_k)}$

Théorème (usage de χ_A) :

1. Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors λ est valeur propre de A si et seulement si λ est racine de χ_A.
2. Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, tout endomorphisme en dimension finie $n \geqslant 1$ admettent au moins une vp
3. Un endomorphique en dimension n ou une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ admettent au plus n vp.

Démonstration :

Voir lemme dans la démonstration du théorème précédent : λ est vp de A si et seulement si $A-\lambda I_n \notin \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$, c'est-à-dire si et seulement si $\chi_A(\lambda)=\det(A-\lambda I_n)=0$.

Lien entre matrices et endomorphismes Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n, $u \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E)$.

Soit $\mathscr{B}=(e_1,\dots e_n)$ une base de E et $A=\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(u) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Théorème :

1. λ est valeur propre de u si et seulement si λ est valeur propre de A.
2. Pour tout $\vec{v} \in E\setminus\{0\}$, $\vec{v}$ est vecteur propre de u si et seulement si $\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(\vec{v}) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})\setminus\{0\}$ est vecteur propre de A.

Démonstration :

Soient $\vec{v} \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$. On note $A=\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(u)$, $X=\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(\vec{v})$.

On a alors l'équivalence :

$$\begin{cases} u(\vec{v})=\lambda\vec{v} \\ \vec{v}\neq\vec{0} \end{cases} \iff \begin{cases} A\times X=\lambda X \\ X\neq 0 \end{cases} \tag{7.9}$$

C) Spectre et valeur spectrale

Définition :

Soit $u \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E)$.

On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur spectrale de u si $u-\lambda\operatorname{Id}_E$ n'est pas un automorphisme de E. Il y a deux types de valeurs spectrales :

- Les $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $u-\lambda\operatorname{Id}_E$ n'est pas injectif (c'est-à-dire les vp de u)
- Les $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $u-\lambda\operatorname{Id}_E$ n'est pas surjectif.

En dimension finie, toute valeur spectrale est valeur propre.

Mais c'est faux en dimension infinie :

Exemple :

On considère l'application $M\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & XP \end{array}$.

Alors tout réel est valeur spectrale de M mais M n'a pas de valeur propre.

En effet, soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Alors $M-\lambda\operatorname{Id}$ n'est pas surjective, donc λ est valeur spectrale : pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $(M-\lambda\operatorname{Id})(P)=XP-\lambda P=(X-\lambda)P$. Ainsi, $1 \notin \operatorname{Im}(M-\lambda\operatorname{Id})$ (par exemple)

Mais $M-\lambda\operatorname{Id}$ est injectif, donc λ n'est pas valeur propre (en effet, si $(X-\lambda)P=0$, alors $P=0$)

Définition :

On appelle spectre l'ensemble des valeurs spectrales d'une matrice ou d'un endomorphisme, noté $\operatorname{sp}(A)$ ou $\operatorname{sp}(u)$.

Dans l'exemple précédent, on a $\operatorname{sp}(M)=\mathbb{R}$.

Note :

En dimension finie, $\operatorname{sp}(u)$ est aussi l'ensemble des valeurs propres de u.

D) Indépendance de sous-espaces vectoriels propres

Théorème :
Soit $u \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E)$:

- Toute famille de $\vec{v}$p associés à des vp deux à deux distinctes est libre.
- Autrement dit, si $F_1, \dots F_p$ sont des sous-espaces propres deux à deux distincts, alors la somme $F_1 + \cdots + F_p$ est directe.

Démonstration :

(1) Soient $\vec{v}_1, \dots \vec{v}_p$ non nuls tels que $\forall i \in [\![1, n]\!], u(\vec{v}_i) = \lambda_i \vec{v}_i$, les λ_i étant deux à deux distincts.
Supposons que $\sum_{j=1}^{p} x_j \vec{v}_j = \vec{0}$. Montrons par récurrence sur p que $\forall j \in [\![1, p]\!], x_j = 0$

- Si $p = 1$: si $x_1 \vec{v}_1 = \vec{0}$, alors $x_1 = 0$ car $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$.
- Supposons la propriété vraie pour $p - 1$ vecteurs propres ($p \in \mathbb{N}^*$), et considérons le cas de p vecteurs propres :
  Si on a $\sum_{j=1}^{p} x_j \vec{v}_j = \vec{0}$(7.10), alors $\sum_{j=1}^{p} x_j u(\vec{v}_j) = \vec{0}$(7.11).
  Donc (λ_p(7.10) − (7.11)) $\sum_{j=1}^{p} x_j (\lambda_p - \lambda_j) \vec{v}_j = \sum_{j=1}^{p-1} x_j (\lambda_p - \lambda_j) \vec{v}_j = \vec{0}$
  D'où, par hypothèse de récurrence $\forall j \leqslant p - 1, x_j \underbrace{(\lambda_p - \lambda_j)}_{\neq 0} = 0$.
  Donc $\forall j \leqslant p - 1, x_j = 0$, puis $x_p = 0$, ce qui achève la récurrence et montre le premier résultat.

(2) Soient $\vec{X}_1, \dots \vec{X}_p$ tels que $\forall i \in [\![1, p]\!], \vec{X}_i \in F_i$.
Supposons que $\vec{X}_1 + \cdots + \vec{X}_p = \vec{0}$.
Alors $\forall i \in [\![1, p]\!], \vec{X}_i = \vec{0}$, car sinon les $\vec{X}_i$ non nuls seraient des vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes et formant une famille liée, ce qui est impossible d'après (1).

Exemple :
$E = \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
$u = D \colon f \mapsto f'$. Alors $u \in \mathscr{L}_{\mathbb{C}}(E)$
Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, $\varphi_\lambda \colon t \mapsto e^{\lambda t}$ est vecteur propre (non nul) de u associé à λ.
Donc $(\varphi_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{C}}$ est libre.

Corollaire (en dimension finie) :
Un endomorphisme u d'un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n a au plus n valeurs propres distinctes.
En effet, si $\lambda_1, \dots \lambda_p$ dont p valeurs propres distinctes de u, alors en prenant pour $i \in [\![1, p]\!]$ $\vec{v}_i$ un vecteur propre associé à λ_i, la famille $(\vec{v}_1, \dots \vec{v}_p)$ est libre, et donc $p \leqslant n$.

Remarque (Autre démonstration) :
On prend $\mathscr{B}$ une base de E, $A = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u)$.
Alors l'ensemble des valeurs propres de u est aussi l'ensemble des valeurs propres de A, qui est l'ensemble des zéros de χ_A, et donc de cardinal $\leqslant n$ (car $\deg \chi_A = n$)

E) Exemples

Géométrique

Les projecteurs Soit p un projecteur (on suppose $p \neq 0$ et $p \neq \mathrm{Id}$)

Éléments propres les valeurs propres de p sont 0 et 1, et les espaces propres sont $E_0(p) = \ker p$ et $E_1(p) = \ker(p - \mathrm{Id}) = \mathrm{Im}\, p$.

Démonstration :

Soit p un projecteur sur F parallèlement à G, avec $F \oplus G = E$. (et $F, G \neq \{0\}$)

On résout $p(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$ pour $\vec{v} \neq \vec{0}$.

On a $\vec{v} = \vec{f} + \vec{g}$, où $\vec{f} \in F$, $\vec{g} \in G$.

Alors $p(\vec{v}) = \lambda \vec{v} \iff \vec{f} = \lambda(\vec{f} + \vec{g}) \iff \vec{f} = \lambda \vec{f}$ et $\lambda \vec{g} = \vec{0}$.

Discussion

- Si $\lambda = 0$, $p(\vec{v}) = \lambda \vec{v} \iff \vec{v} = \vec{g} \in G$. Donc 0 est vp d'espace propre associé G.
- Si $\lambda = 1$, $p(\vec{v}) = \lambda \vec{v} \iff \vec{v} = \vec{f} \in F$. Donc 1 est vp d'espace propre associé F.
- Sinon, $p(\vec{v}) = \lambda \vec{v} \iff \vec{f} = \vec{g} = \vec{0}$, et λ n'est pas valeur propre.

Rotations planes d'angle θ Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^2$. Une rotation $R(\theta)$ a pour matrice $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ dans cette base.

Alors :

$$\chi_{R(\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta - X & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - X \end{vmatrix} = X^2 - 2\cos\theta X + 1 = (X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta}) \tag{7.12}$$

Ainsi :

- Si $\theta \neq 0 \mod \pi$, il n'y a pas de vp.
- Si $\theta = 0 \mod 2\pi$, $R(\theta) = \mathrm{Id}$, donc 1 est vp et $E_1 = \mathbb{R}^2$.
- Si $\theta = \pi \mod 2\pi$, $R(\theta) = -\mathrm{Id}$, donc -1 est vp et $E_{-1} = \mathbb{R}^2$.

Exemple matriciel

Localisation des valeurs propres d'une matrice complexe

Lemme (Lemme de Hadamard – matrice à diagonale dominante) :
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on suppose que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], |A_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |A_{i,j}| \tag{7.13}$$

Alors A est inversible.

En effet : Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, supposons que $AX = 0$.

Alors $X = 0$. En effet, supposons que $X \neq 0$; soit alors $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $|X_{i_0}|$ soit maximal.

Alors $(AX)_{i_0} = \sum_{j=1}^{n} A_{i_0,j} X_j = 0$.

Donc

$$|A_{i_0,i_0}X_{i_0}| = \left|-\sum_{j\in[\![1,n]\!]\setminus\{i_0\}} A_{i_0,j}X_j\right| \leqslant \sum_{j\in[\![1,n]\!]\setminus\{i_0\}} |A_{i_0,j}X_j| \leqslant \left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i_0}}^{n} |A_{i_0,j}|\right)|X_{i_0}| \tag{7.14}$$

Soit, en simplifiant par $|X_{i_0}| > 0$, on obtient une contradiction.

Donc $X = 0$, et A est inversible.

Théorème (de localisation) :

Soit A une matrice complexe, et $(A_{i,j})$ ses coefficients.

Alors

$$\mathrm{sp}(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \bar{D}\left(A_{i,i}, \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |A_{i,j}|\right). \qquad (\bar{D}(z,r) = \{x \in \mathbb{C}, |x-z| \leqslant r\} \tag{7.15}$$

Ou

$$\forall \lambda \in \mathrm{sp}(A), \exists i_0 \in [\![1,n]\!], |A_{i_0,i_0} - \lambda| \leqslant \sum_{\substack{k=1\\ k\neq i_0}}^{n} |A_{i_0,k}| \tag{7.16}$$

(Disques de Gerschgorin)

Démonstration :

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, on pose $B = A - \lambda I_n$; on a ainsi $B_{i,j} = A_{i,j} - \lambda\delta_{i,j}$.

Donc si $\forall i \in [\![1,n]\!], \underbrace{|A_{i,i} - \lambda|}_{B_{i,i}} > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \underbrace{|A_{i,j}|}_{B_{i,j}}$, alors B est inversible donc λ n'est pas valeur spectrale de A.

Remarque :

On a le même résultat avec ${}^tA$: $\mathrm{sp}({}^tA) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \bar{D}\left(A_{i,i}, \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |A_{i,j}|\right)$.

($\mathrm{sp}({}^tA) = \mathrm{sp}(A)$ car $A - \lambda I_n$ est inversible $\iff {}^t(A - \lambda I_n) = {}^tA - \lambda I_n$ est inversible)

Matrice compagnon Soit $P = X^n - (a_0 + \cdots + a_{n-1}X^{n-1}) \in \mathbb{K}_n[X]$, et $A_P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & \ddots & 1 \\ a_0 & \cdots & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_{n-1} \\ \hline a_0 & (a_i) \end{array}\right) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

On cherche les valeurs propres de A_P. Équation aux éléments propres :

$A_PV = \lambda V$, où $V = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. On a les équivalences :

$$A_PV = \lambda V \iff \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda x_2 \\ \vdots \\ x_n = \lambda x_{n-1} \\ a_0x_1 + \cdots + a_{n-1}x_n = \lambda x_n \end{cases} \iff \begin{cases} \forall i \in [\![1,n]\!], x_i = \lambda^{i-1}x_1 \\ x_1 \underbrace{(a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_{n-1}\lambda^{n-1} - \lambda^n)}_{-P(\lambda)} = 0 \end{cases} \tag{7.17}$$

Si $P(\lambda) \neq 0$, l'équation $A_P V = \lambda V$ n'a que la solution nulle, et λ n'est donc pas valeur propre. Si $P(\lambda) = 0$, l'ensemble des solutions est $\mathbb{K}\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}$ de dimension 1.

Ainsi, l'ensemble des valeurs propres de A_P est l'ensemble des racines de P, et les espaces propres sont les droites $\mathbb{K}\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}$ de dimension 1.

Ainsi, A_p est diagonalisable si et seulement si P est scindé à racines simples (i.e. $\bigoplus E_\lambda$ est de dimension n si et seulement si P a n racines)

De plus, $\chi_{A_P} = \begin{vmatrix} -X & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & \ddots & 1 \\ a_0 & \cdots & \cdots & a_{n-1} - X \end{vmatrix}$.

En faisant la transformation $C_1 \leftarrow C_1 + XC_2 + \cdots + X^{n-1}C_n$, on obtient :

$$\chi_{A_P} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & -X & \ddots & \\ (0) & & \ddots & 1 \\ \alpha & \cdots & \cdots & a_{n-1} - X \end{vmatrix}, \qquad \text{où } \alpha = -P \tag{7.18}$$

Ainsi, $\chi_{A_P} = (-1)^n P$ (En développant selon la première colonne).

Ceci montre que tout polynôme $(-X)^n + \cdots$ est polynôme caractéristique d'au moins une matrice.

Application :

On suppose $P = X^n - a_0 - \cdots - a_{n-1}X^{n-1}$. Alors pour toute racine z de P, on a :

Soit $|z| \leqslant 1$, soit $|z - a_{n-1}| \leqslant \sum_{k=0}^{n-2} |a_k|$.

Définition (Matrices stochastiques, bistochastiques) :

On dit que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique *si ses coefficients sont positifs* et si $\forall i \in [\![1, n]\!], \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$.

A est dite bistochastique si A et ${}^tA$ sont stochastiques :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \sum_{j=1}^n a_{i,j} = \sum_{j=1}^n a_{j,i} = 1 \tag{7.19}$$

Proposition :

Soit $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. Alors $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique si et seulement si A est à coefficients positifs et $AU = U$ c'est-à-dire si et seulement si U est un vecteur propre associé à la valeur propre 1.

Soit A stochastique :

2. Alors $\mathrm{sp}(A) \subset \bar{D}(0,1)$, et $1 \in \mathrm{sp}(A)$.
3. Les ensembles des matrices stochastiques et bistochastiques sont compacts, convexes et stables par produit.

Démonstration :

1. $AU = U \iff \forall i \in [\![1,n]\!], \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$
2. Soit $\lambda \in \mathrm{sp}(A)$. D'après le théorème de localisation, il existe $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $|\lambda - a_{i,i}| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}|$.

   Alors $|\lambda| \leqslant |a_{i,i}| + |\lambda - a_{i,i}| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| = 1$ (A est à coefficients positifs)
3. Soient A, B stochastiques.

   Alors AB est à coefficients positifs, et $(AB)U = A(BU) = AU = U$.

   Pour bistochastique, on applique ce qui précède à A, B, ${}^tA$, ${}^tB$.

   D'où déjà la stabilité par produit.

   - Si A et B sont stochastiques, alors pour $\lambda \in [0;1]$, $(1-\lambda)A+\lambda B$ est stochastique : $((1-\lambda)A+\lambda B)U = (1-\lambda)U + \lambda U = U$.
   - Compacité :

     On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme $\|A\| = \max_{i,j\in[\![1,n]\!]} |a_{i,j}|$.

     Alors pour toute matrice stochastique, $\|A\| \leqslant 1$. Donc l'ensemble des matrices stochastiques est borné.

     Soient $L_{i,j} \colon \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ A & \longmapsto & A_{i,j} \end{array}$ et $\lambda_i \colon \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ A & \longmapsto & \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \end{array}$, formes linéaires continues (car en dimension finie)

     Alors l'ensemble des matrices stochastiques est $\bigcap_{i,j\in[\![1,n]\!]} L_{i,j}^{-1}([0,+\infty[) \cap \bigcap_{i\in[\![1,n]\!]} \lambda_i^{-1}(\{1\})$, qui est une intersection finie de fermés donc un fermé.

     Donc l'ensemble des matrices stochastiques est compact.

     On fait pareil pour les matrices bistochastiques.

Une matrice importante Soit $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (A_n est symétrique)

Équation aux éléments propres :

$$\begin{cases} -\lambda x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - \lambda x_2 + x_3 = 0 \\ x_{n-2} - \lambda x_{n-1} + x_n = 0 \\ x_{n-1} - \lambda x_n = 0 \end{cases} \tag{7.20}$$

On a donc une suite récurrente linéaire avec $x_0 = 0$, $x_{n+1} = 0$. On a l'équivalence :

$$(7.20) \iff \forall i \in [\![1,n]\!], x_{i+1} - \lambda x_i + x_{i-1} = 0 \tag{7.21}$$

D'où l'équation caractéristique : $r^2 - \lambda r + 1$. On a le discriminant $\Delta = \lambda^2 - 4$.

On cherche $\lambda \in \mathbb{R}$, et on a $|\lambda| \leqslant 2$ (d'après le théorème de localisation). On pose $\lambda = 2\cos\theta$.

On a donc deux racines complexes conjuguées $r_{1,2} = e^{\pm i\theta}$.

Il existe donc $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que $\forall k \in [\![1, n]\!], x_k = \alpha e^{ki\theta} + \beta e^{-ki\theta}$.

De plus, $\alpha e^{(n+1)i\theta} + \beta e^{-(n+1)i\theta} = 0$. Donc $\begin{cases} \beta = -\alpha \\ \alpha \sin(n+1)\theta = 0 \end{cases}$.

- Si $\sin(n+1)\theta \neq 0$, alors λ n'est pas vp (la seule solution est $X = 0$).
- Si $\sin(n+1)\theta = 0$,

$$(7.20) \iff \exists \alpha' \in \mathbb{C}, \forall k \in [\![1, N]\!], x_k = \alpha' \sin(k\theta) \tag{7.22}$$

Donc λ est vp et $E_\lambda = \mathbb{R}\begin{pmatrix} \sin\theta \\ \vdots \\ \sin(n\theta) \end{pmatrix}$

On a n valeurs $\theta \in]0, \pi[$ telles que $\sin((n+1)\theta) = 0$ (à savoir les $\theta = \frac{k\pi}{n+1}$ pour $k \in [\![1, n]\!]$)

On a donc n vp $\lambda_k = 2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$ distinctes.

Donc A_n est diagonalisable de valeurs propres λ_k avec comme $\vec{v}$p associé $\vec{v}_k = \begin{pmatrix} \sin\frac{k\pi}{n+1} \\ \vdots \\ \sin\frac{nk\pi}{n+1} \end{pmatrix}$.

Donc $A_n = P \times \begin{pmatrix} 2\cos\frac{\pi}{n+1} & & \\ & \ddots & \\ 2\cos\frac{n\pi}{n+1} & & \end{pmatrix} \times P^{-1}$, où $P = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$.

Exemples analytiques Opérateurs différentiels linéaires (dans le cadre de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$).

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $E = \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{C})$.

Pour $j \in [\![0, p-1]\!]$, soient $a_j : I \to \mathbb{C} \in E$.

On pose $u = D^p + \sum_{j=0}^{p-1} a_j D^j$ l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall f \in E, u(f) = f^{(p)} + \sum_{j=0}^{p-1} a_j f^{(j)} \tag{7.23}$$

Proposition :

Tout complexe λ est valeur propre de u, et les sous-espaces propres sont tous de dimension p.

Ceci découle du théorème de Cauchy pour les équations différentielles linéaires (plus tard) :

Soient $a_0, \dots a_{p-1} : I \to \mathbb{C}$, continues. Alors l'ensemble des $y \in E$ tels que $\forall x \in I, y^{(p)}(x) = \sum_{j=0}^{p-1} a_j(x) y^{(j)}(x)$ est un $\mathbb{C}$-ev de dimension p.

En effet (pour le fait que ça en découle), on a l'équivalence :

$$u(f) = \lambda f \iff \forall x \in I, f^{(p)}(x) = -\sum_{j=0}^{p-1} a_j(x) f^{(j)}(x) + (\lambda - a_0) f(x) \tag{7.24}$$

Comme les $-a_j$ et $\lambda - a_0$ sont continues pour tout λ, l'ensemble des solutions est un $\mathbb{C}$-ev de dimension p.

Exemple :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Trouver les valeurs propres et les fonctions propres (c'est-à-dire les vecteurs propres de $\mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{C})$) de

$$\begin{array}{rcl} D\colon \mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{C}) \\ f & \longmapsto & g \text{ tel que } \forall x\in I, g(x)=xf'(x) \end{array}$$

Équation aux éléments propres :

Soient $\lambda\in\mathbb{C}$, $f\in\mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{C})$, supposons que $\forall x\in I, xf'(x)=\lambda f(x)$.

- Si $0\notin I$, on a $f'(x)=\frac{\lambda}{x}f(x)$, donc la solution générale est $f(x)=Ke^{\lambda\ln|x|}=K|x|^\lambda$

  Ce sont toutes des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, donc l'ensemble des valeurs propres de D est $\mathbb{C}$, et E_λ est de dimension 1 (c'est $\mathrm{Vect}(x\mapsto|x|^\lambda)$)

- Si maintenant $0\in I$:

  Si $0=\inf I$ (ou $\sup I$ de façon symétrique) :

  $x\mapsto x^\lambda$ est-elle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I ?

  Oui si et seulement si $\lambda\in\mathbb{N}$, et donc l'ensemble des valeurs propres est $\mathbb{N}$.

  Remarque :

  Si $n<\lambda<n+1$ pour $n\in\mathbb{N}$, alors pour $x>0$, $f^{(n+1)}(x)=(\lambda-n-1)\dots(\lambda)x^{\lambda-n-1}$.

  Donc $\lim_{x\to0^+}|f^{(n+1)}(x)|=+\infty$, et f n'est pas de classe $\mathcal{C}^\infty$.

  Si $\lambda\in\mathbb{C}$, pour $n>\mathrm{Re}(\lambda)$, $\lim_{x\to0^+}|f^{(n)}(x)|=+\infty$.

- Si maintenant $0\in\mathring{I}$, on fait pareil.

  Attention : Il y a un problème de raccordement en 0 :

  On coupe I en deux : $\begin{cases} I_1=I\cap\mathbb{R}_+^* \\ I_2=I\cap\mathbb{R}_-^* \end{cases}$

  Si $D(f)=\lambda f$, on trouve deux constantes K_1, K_2 telles que :

  $$\begin{cases} \forall x\in I_1, f(x)=K_1x^\lambda \\ \forall x\in I_2, f(x)=K_2|x|^\lambda \end{cases} \tag{7.25}$$

  Comme $f_{|I_1\cup\{0\}}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, $\lambda\in\mathbb{N}$.

  Ainsi, tout entier est valeur propre car $x\mapsto x^\lambda$ est fonction propre associée.

  Détermination de $\ker(D-\lambda\,\mathrm{Id})$ (pour $\lambda\in\mathbb{N}$)

  f définie par (7.25) doit se raccorder de façon $\mathcal{C}^\infty$ en 0.

  C'est possible si et seulement si $K_1=(-1)^\lambda K_2$

  Et dans ce cas, $\ker(D-\lambda\,\mathrm{Id})=\mathbb{C}(x\mapsto x^\lambda)$

Équations intégrales

Opérateur de Volteira On prend $E=\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{C})$, $V\colon f\in E\mapsto V(f)$ tel que $\forall x\in[0,1], V(f)(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Équation aux éléments propres : $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=\lambda f(x)$ pour tout $x\in[0,1]$.

En posant $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, on est ramené à $F=\lambda F'$ avec $F'(0)=0$.

Ainsi :

- Si $\lambda=0$, alors $F=0$, donc 0 n'est pas vp.

- Si $\lambda \neq 0$, alors $F' = \frac{1}{\lambda} F$, donc $F(x) = F(0) e^{\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\lambda}} = 0$.

Donc V n'a pas de vp.

Autre exemple On prend encore $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{C})$. On définit le noyau $k(x,t) = \begin{cases} x(1-t) & \text{si } x \leqslant t \\ t(1-x) & \text{si } x \geqslant t \end{cases}$.

Pour $f \in E$, on pose $\phi(f)(x) = \int_0^1 k(x,t) f(t)\,\mathrm{d}t$.

Alors ϕ est linéaire.

Pour $f \in E$, $x \in [0,1]$, on a :

$$\phi(f)(x) = \in_0^x t(1-x)f(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^1 x(1-t)f(t)\,\mathrm{d}t = (1-x)\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t + x\int_x^1 (1-t)f(t)\,\mathrm{d}t \tag{7.26}$$

Donc $\phi(f) \in E$ (la fonction est même $\mathcal{C}^1$)

Équation aux éléments propres :

$$\phi(f) = \lambda f \iff \forall x \in [0,1], (1-x)\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t + x\int_x^1 (1-t)f(t)\,\mathrm{d}t = \lambda f(x) \tag{7.27}$$

- Si $\lambda = 0$, en dérivant :

$$\forall x \in [0,1], -\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^1 (1-t)f(t)\,\mathrm{d}t + (1-x)(xf(x)) - x(1-x)f(x) = -\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^1 (1-t)f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \tag{7.28}$$

  On peut donc redériver :

$$\forall x \in [0,1], -xf(x) - (1-x)f(x) = 0 \tag{7.29}$$

  Soit $f = 0$. Donc 0 n'est pas vp.

- Si $\lambda \neq 0$, alors $f = \frac{1}{\lambda}\phi(f)$ est dérivable :

$$(7.27) \implies \begin{cases} \forall x \in [0,1], -\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^1 (1-t)f(t)\,\mathrm{d}t = \lambda f'(x) \\ f(0) = f(1) = 0 \end{cases} \tag{7.30}$$

  Donc f' est dérivable, et on peut redériver :

$$(7.27) \implies \begin{cases} \forall x \in [0,1], -f(x) = \lambda f''(x) \\ f(0) = f(1) = 0 \end{cases} \tag{7.31}$$

  On étudie donc l'équation $f'' + \frac{1}{\lambda} f = 0$ avec les conditions aux limites $f(0) = f(1) = 0$. Cette équation a une solution non nulle si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\lambda = \frac{1}{n^2\pi^2}$.

  Les solutions sont alors $f(x) = K \sin \pi n x$.

  Réciproquement, ces fonctions sont bien solution.

L'ensemble des valeurs propres de ϕ est donc $\left\{\frac{1}{n^2\pi^2}, n \geqslant 1\right\}$, et les espaces propres associés $E_{\frac{1}{n^2\pi^2}} = \mathbb{R}\sin(n\pi\cdot)$.

F) Diagonalisabilité et diagonalisation en dimension finie

On considère un $\mathbb{K}$-ev E de dimension n finie, $u \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E)$, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Définition

Un endomorphisme $u \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E)$ est dit diagonalisable lorsqu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.

2) Caractérisation

Théorème :
Soit $u \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E)$, $\dim_{\mathbb{K}} E = n < +\infty$.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) u est diagonalisable

(2) Il existe une base $\mathscr{B}$ de E constituée de vecteurs propres de u.

(3) E est la somme (directe forcément) des sous-espaces propres de u.

(4) La somme des dimensions des espaces propres de u est égale à n.

Démonstration :

(1) $\implies$ (2) Si la matrice de u dans $\mathscr{B} = (v_1, \dots v_n)$ est

$$M_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}, \tag{7.32}$$

on a alors $\forall i \in [\![1, n]\!], u(v_i) = \lambda_i v_i$

(2) $\implies$ (3) Soient $F_1, \dots F_p$ *les* sous-espaces propres de u.

Alors $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(\bigcup_{i=1}^{p} F_i)$. Comme $\bigcup_{i=1}^{p} F_i$ contient une base de E (d'après (2)), on a bien $\sum_{i=1}^{p} F_i = E$.

(3) $\implies$ (4) Si $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$ où $F_1, \dots F_p$ sont les sous-espaces propres de u, alors $\dim_{\mathbb{K}} E = n = \sum_{i=1}^{p} F_i$.

(4) $\implies$ (1) Si $\dim_{\mathbb{K}} E = \sum_{i=1}^{p} F_i$, comme les sous-espaces propres sont en somme directe, on a $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$.

Soit, pour $i \in [\![1, p]\!]$, $\mathscr{B}_i$ une base de F_i.

Alors $\mathscr{B} = \bigcup_{i=1}^{p} \mathscr{B}_i$ est une base de E, et comme tout vecteur $\vec{v}$ de $\mathscr{B}$ est dans l'un des F_i, $i \in [\![1, p]\!]$, la matrice de u dans $\mathscr{B}$ est diagonale.

3) Projecteurs spectraux d'un endomorphisme diagonalisable

Définition :
Soit $u \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E)$, diagonalisable de valeurs propres $\lambda_1, ..\lambda_p$ deux à deux distinctes. On note $F_i = \ker(u - \lambda_i \,\mathrm{Id})$. On appelle i-ème projecteur spectral de u le projecteur sur F_i parallèlement à $G_i = \bigoplus_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p} F_j$.

Exemple :
Soit $u \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E)$, projecteur sur F parallèlement à G où $F \oplus G = E$ et $F, G \neq \{0\}$.

On a :

$$\mathrm{sp}(u) = \{0, 1\}, \qquad \ker(u - 0\,\mathrm{Id}) = G, \qquad \ker(u - \mathrm{Id}) = F \tag{7.33}$$

Donc u est diagonalisable car $E = F \oplus G$.

Les projecteurs spectraux de u sont :

u, projeté sur F parallèlement à G,

et $\mathrm{Id} - u$, projeté sur G parallèlement à F.

Théorème :

Sous les hypothèses de la définition, on note π_i le projecteur sur F_i parallèlement à G_i.

Alors :

1. $\pi_1 + \cdots + \pi_p = \mathrm{Id}_E$
2. $\forall i \neq j, \pi_i \circ \pi_j = 0$
3. $u = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \pi_j$ (remarque : $F_j = \ker(u - \lambda_j \mathrm{Id}_E)$)
4. Plus généralement : $\forall m \in \mathbb{N}, u^m = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j^m \pi_j$,

Et pour tout $P = a_0 + \cdots + a_d X^d \in \mathbb{K}[X]$, on a :

$$a_0 \mathrm{Id}_E + \cdots + a_d u^d = \tilde{P}(u) = \sum_{j=1}^{p} P(\lambda_j)\pi_j \tag{7.34}$$

Inversement, s'il existe des projecteurs $\pi_i, i = 1..p$ vérifiant :

$$\sum_{j=1}^{p} \pi_j = \mathrm{Id}_E, \qquad \forall i \neq j, \pi_i \circ \pi_j = 0, \qquad \text{et } u = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \pi_j \tag{7.35}$$

alors u est diagonalisable, et ses valeurs propres sont les $\lambda_i, i \in [\![1, p]\!]$.

Si de plus les λ_i sont deux à deux distincts, les projecteurs spectraux de u sont les $\pi_i, i \in [\![1, p]\!]$.

Démonstration :

2 On a pour $i, j \in [\![1, p]\!]$ avec $i \neq j$: $\mathrm{Im}\,\pi_j = F_j \subset \ker \pi_i = \bigoplus_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{p} F_k$.

Donc $\pi_i \circ \pi_j = 0$.

1, 3 Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$ et $x \in F_i$, on a $\mathrm{Id}(x) = x$, et :

$$\pi_j(x) = \begin{cases} x & \text{si } j = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{7.36}$$

Donc $\sum_{j=1}^{p} \pi_j(x) = x = \mathrm{Id}_E(x)$.

Et $\sum_{j=1}^{p} \lambda_j \pi_j(x) = \lambda_i x = u(x)$ (par définition de $F_i = \ker(u - \lambda_i \mathrm{Id})$)

D'où le résultat puisque $\sum_{j=1}^{p} \lambda_j \pi_j$ et u, $\sum_{j=1}^{p} \pi_j$ et Id_E, coïncident sur tous les F_i, donc sur $\bigoplus_{i=1}^{p} F_i = E$.

4 Montrons par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}, u^k = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j^k \pi_j$

Pour $k = 0, 1$, le résultat a déjà été montré.

Soit $k \in \mathbb{N}$, supposons que $u^k = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j^k \pi_j$.

Alors $u^{k+1} = u \circ u^k = \left(\sum_{j=1}^p \lambda_j \pi_j\right) \circ \left(\sum_{j=1}^p \lambda_j^k \pi_j\right) = \sum_{i,j=1}^p \lambda_j \lambda_i^k \underbrace{\pi_j \circ \pi_i}_{\delta_{i,j}\pi_i} = \sum_{j=1}^p \lambda_j^{k+1} \pi_j$

Ce qui achève la récurrence ; puis, par combinaison linéaire, on a $\forall P \in \mathbb{K}[X], \tilde{P}(u) = \sum_{j=1}^p P(\lambda_j)\pi_j$.

- Pour la réciproque :

  Supposons que $\forall i, j \in [\![1,p]\!], \pi_i \circ \pi_j = \delta_{i,j}\pi_i$, $\sum_{j=1}^p \pi_j = \mathrm{Id}_E$ et $u = \sum_{j=1}^p \lambda_j \pi_j$.

  Il faut montrer que u est diagonalisable et que si les λ_i sont deux à deux distincts, les projecteurs spectraux de u sont les π_i.

  Posons pour $i \in [\![1,p]\!]$, $F_i = \operatorname{Im} \pi_i$.

  Comme π_i est un projecteur, on a $\forall x \in F_i, \pi_i(x) = x$

  De plus, pour $i, j \in [\![1,p]\!]$ avec $j \neq i$ et $x \in F_i$, $\pi_j(x) = \underbrace{\pi_j \circ \pi_i}_{=0}(x) = 0$.

  Ainsi, pour $i \in [\![1,p]\!]$: $\forall x \in F_i, u(x) = \lambda_i \pi_i(x) = \lambda_i x$.

  Donc tout vecteur non nul de F_i est propre pour u.

  Or, pour tout $y \in E$, $y = \sum_{i=1}^p \pi_i(y) \in \sum_{i=1}^p F_i$.

  Ainsi, l'ensemble des vecteurs propres de u engendre E, donc u est diagonalisable.

- On cherche maintenant les vecteurs propres et valeurs propres :

  Équation aux éléments propres : $u(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$ pour $\vec{x} \neq \vec{0}$.

  On a $\vec{x} = \sum_{i=1}^p \pi_i(\vec{x})$ et $u(\vec{x}) = \sum_{i=1}^p \lambda_i \pi_i(\vec{x})$.

  De plus, la somme $\sum_{i=1}^p F_i$ est directe. En effet, si $f_1 + \cdots + f_p = \vec{0}$ pour $(f_1, \ldots f_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p$, alors pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, $\vec{0} = \pi_k(f_1 + \cdots + f_p) = f_k$ car $\pi_k(f_i) = \vec{0}$ si $i \neq k$.

  Donc $u(x) = \lambda x$ équivaut à $\sum_{i=1}^p \lambda_i \pi_i(\vec{x}) = \sum_{i=1}^p \lambda \pi_i(\vec{x})$, c'est-à-dire par unicité de la décomposition dans $\oplus_{i=1}^p F_i$,

  $$\forall i \in [\![1,p]\!], (\lambda_i - \lambda)\pi_i(x) = 0 \tag{7.37}$$

  Discussion :

  - ⋄ Si $\forall i \in [\![1,p]\!], \lambda \neq \lambda_i$, alors $\forall i \in [\![1,p]\!], \pi_i(x) = 0$. Donc $u(x) = \lambda x$ équivaut à $x = 0$, donc $\lambda \notin \mathrm{sp}(u)$.
  - ⋄ Si les λ_i sont distincts deux à deux, et si $\lambda = \lambda_{i_0}$ pour $i_0 \in [\![1,p]\!]$, (7.37) équivaut à $\forall i \neq i_0, \pi_i(x) = 0$, c'est-à-dire à $x = \pi_{i_0}(x) \in F_{i_0}$.

  Autrement dit, λ_{i_0} est valeur propre de u et le sous-espace propre associé est F_{i_0}. Ainsi, les π_i sont les projecteurs spectraux de u.

Remarque :

Si les λ_i ne sont pas tous distincts, u est diagonalisable, ses valeurs propres sont les λ_i mais les sous-espaces propres ne sont pas les F_i, mais les $\bigoplus_{\substack{i \text{ tels que} \\ \lambda_i = \lambda}} F_i$.

4) Cas des matrices

Définition :

$A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite diagonalisable lorsqu'elle est semblable à une matrice diagonale, c'est-à-dire qu'il existe $P \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que D soit diagonale, où $D = P^{-1}AP$.

Théorème (lien entre matrices et endomorphismes) :

(1) $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si et seulement si l'endomorphisme $u_A : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & A \times X \end{array}$ est diagonalisable.

(2) Pour un $\mathbb{K}$-ev E de dimension n, $u \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E)$, une base $\mathscr{B}$ de E, et en posant $A = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u)$:

- u est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable
- $\mathrm{sp}(u) = \mathrm{sp}(A)$
- $\vec{v} \in E \backslash \{0\}$ est vecteur propre de u associée à $\lambda \in \mathbb{K}$ si et seulement si $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\vec{v})$ est vecteur propre de A associé à λ.

Démonstration :

Déjà, il suffit d'établir (2) : avec $A = \mathrm{mat}_{\mathrm{cano}}(u)$, on a (2) $\implies$ (1).

Montrons alors (2) :

- Si u est diagonalisable, il existe $\mathscr{B}'$ telle que $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(u) = D$ est diagonale.

  Mais alors $D = P^{-1}AP$, P étant la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.

  Donc A est diagonalisable.

- Réciproquement, si A est diagonalisable, alors $A = PDP^{-1}$ où D est diagonale.

  Soit $\mathscr{B}'$ une base de E telle que la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ soit P.

  Alors $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(u) = P^{-1}AP = D$. Donc u est diagonalisable.

5) Pratique de la diagonalisation

Définition :

Diagonaliser un endomorphisme, c'est trouver une base de vecteurs propres.

Diagonaliser une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, c'est trouver $P \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ et D diagonale telle que $A = PDP^{-1}$.

Problème Pour chaque valeur propre λ de u, on détermine une base $\mathscr{B}_\lambda$ de l'espace propre $E_\lambda(u)$. Alors $\bigcup_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)} \mathscr{B}_\lambda$ est libre.

Il y a alors deux cas :

- Soit $\# \bigcup_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)} \mathscr{B}_\lambda = \dim E$, et u est donc diagonalisable, $\bigcup_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)} \mathscr{B}_\lambda$ étant une base de vecteurs propres.
- Soit $\# \bigcup_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)} \mathscr{B}_\lambda < \dim E$, et u n'est pas diagonalisable.

NB : pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, considérer l'endomorphisme u_A de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Remarque :

Parfois (surtout en dimensions petites 2, 3, 4), on a intérêt à commencer par calculer le polynôme caractéristique.

On verra plus tard aussi le théorème spectral :

Toute matrice symétrique réelle est (orthogonalement) diagonalisable.

6) Exemples

- Tout projecteur est diagonalisable
- Si $\mathbb{K}$ n'est pas de caractéristique 2, toute symétrie est diagonalisable.
- Exercice : soit $p \in \mathbb{N}$, $E = \mathbb{R}_p[X]$ et $n \in \mathbb{N}$.

  On pose $u \colon \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & (X^2-1)P' + n(X-1)P \end{array}$.

  1. Pour quelles valeurs de p u est-il un endomorphisme de $\mathbb{R}_p[X]$?
  2. Quelles sont alors ses valeurs propres, vecteurs propres ;
  3. u est-il diagonalisable ?

  ◇ Déjà, u est linéaire

  ◇ Soit $P \in \mathbb{R}_p[X]$.

  Alors $\deg(u(P)) \leqslant p+1$, et le coefficient de X^{p+1} vaut $a_p(p-n)$

  Ainsi, $u \in \mathscr{L}(E)$ si et seulement si $p = n$.

  ◇ Équation aux éléments propres :

$$u(P) = \lambda P \iff (X^2-1)P' = (nX - \lambda - n)P \tag{7.38}$$

  Résolution de l'équation différentielle :

  On pose $I =]-1;1[$.

  Sur I, (7.38)$P'(x) = \frac{nx+\lambda-n}{x^2-1}P(x)$.

  Calcul d'une primitive de $x \mapsto \dfrac{nx+\lambda-n}{x^2-1}$:

$$\frac{nx+\lambda-n}{x^2-1} = 0 + \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} \tag{7.39}$$

  On a $a = \frac{R(1)}{Q'(1)} = \frac{\lambda}{2}$ et $b = \frac{R(-1)}{Q'(-1)} = n - \frac{\lambda}{2}$ (où $R = nX - \lambda - n$, $Q = X^2 - 1$)

  Ainsi, une primitive de $x \mapsto \dfrac{nx+\lambda-n}{x^2-1}$ est $x \mapsto \dfrac{\lambda}{2}\ln|x-1| + (n - \dfrac{\lambda}{2})\ln|x+1|$.

  La solution générale sur I de (7.38) est donc :

$$P = K|x-1|^{\lambda/2}|x+1|^{n-\lambda/2} \tag{7.40}$$

  Comme $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

  — Si $\frac{\lambda}{2}$ et $n - \frac{\lambda}{2}$ sont entiers, alors λ s'écrit $\lambda = 2p, p \in [\![0, n]\!]$.

  Ainsi, la solution générale sur I de (7.38) est :

$$P = K(1-X)^p(X+1)^{n-p} \tag{7.41}$$

  Inversement, si $P = K(1-X)^p(X+1)^{n-p}$, alors P vérifie (7.38) sur $\mathbb{R}$, puisqu'il le vérifie sur I qui est infini (et P est un polynôme)

  — Si $\frac{\lambda}{2} \notin \mathbb{N}$ ou $n - \frac{\lambda}{2} \notin \mathbb{N}$, alors $P = K|X-1|^{\lambda/2}|X+1|^{n-\lambda/2}$ est polynomial si et seulement si $K = 0$, et dans ce cas λ n'est pas valeur propre.

  — Ainsi, $\mathrm{sp}(u) \subset \{0, 2, \dots 2n\}$.

Réciproquement, si $\lambda = 2p, p \in [\![1, n]\!]$, alors $L_p = (X-1)^p(X+1)^{n-p}$ vérifie bien $u(L_p) = \lambda L_p$.

Donc λ est valeur propre de u et $\mathrm{Vect}(L_p) \subset E_\lambda(u)$.

Enfin, $E_\lambda(u)$ est de dimension 1 car $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$ et on a $n+1$ valeurs propres distinctes.

Comme $\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)} E_\lambda(u) \subset \mathbb{R}_n[X]$, on a donc $n+1 \geqslant \sum_{\lambda \in \{0,\dots 2n\}} \underbrace{\dim E_\lambda(u)}_{\geqslant 1}$

Et donc $n+1 = \sum_{\lambda \in \{0,\dots 2n\}} \dim E_\lambda(u)$, soit $\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)} E_\lambda(u) = \mathbb{R}_n[X]$

Conclusion : les valeurs propres de u sont $\{0, 2, \dots 2n\}$, et $E_\lambda(u) = \mathrm{Vect}(L_p)$.

Donc u est diagonale dans la base $(L_p)_{p \in [\![1,n]\!]}$.

- On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \tag{7.42}$$

Alors A est orthogonalement diagonalisable car symétrique réelle.

Équation aux éléments propres :

$$AX = \lambda X,\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_1 + x_3 = \lambda x_2 \\ \vdots \\ x_{n-2} + x_n = \lambda x_{n-1} \\ x_{n-1} = \lambda x_n \end{cases} \tag{7.43}$$

Idée : utiliser les suites récurrentes linéaires :

On pose $x_0 = x_{n+1} = 0$

Ainsi,

$$AX = \lambda X \iff \forall i \in [\![2, n]\!], x_{i-2} + x_i = \lambda x_{i-1} \tag{7.44}$$

Équation caractéristique : $X^2 - \lambda X + 1 = 0$ (7.45)

$\Delta = \lambda^2 - 4$.

Pour $|\lambda| < 2$ (d'après le théorème de localisation, les valeurs propres sont de module $\leqslant 2$)

On pose $\theta = \mathrm{Arccos}\left(\frac{\lambda}{2}\right) \in]0, \pi[$.

Les racines de (7.45) sont $e^{i\theta}$, $e^{-i\theta}$.

Les suites vérifiant (7.44) sont donc de la forme $x_n = \alpha e^{in\theta} + \beta e^{-in\theta}$.

Or, $x_0 = \alpha + \beta = 0$, donc $\beta = -\alpha$, puis $x_{n+1} = \alpha(e^{i(n+1)\theta} - e^{-i(n+1)\theta}) = 0$, donc $2i\alpha \sin((n+1)\theta) = 0$.

Discussion :

- ◇ Si $\sin((n+1)\theta) \neq 0$, alors $\alpha = 0$, donc la seule solution du système est $X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc λ n'est pas valeur propre.
- ◇ Sinon :

$$\sin((n+1)\theta) = 0 \iff \theta = \frac{k\pi}{n+1}, k \in [\![1, n]\!] \tag{7.46}$$

Donc (7.43) $\iff \exists \alpha \in \mathbb{C}, \forall j \in [\![1,n]\!], x_j = 2\boldsymbol{i}\alpha \sin j\theta$

Ainsi, $\lambda = 2\cos\frac{k\pi}{n+1}$ est valeur propre, et l'espace propre associé est engendré par $\begin{pmatrix} \sin\theta \\ \sin 2\theta \\ \vdots \\ \sin n\theta \end{pmatrix}$

avec $\theta = \operatorname{Arccos}\left(\frac{\lambda}{2}\right)$.

On a donc trouvé n valeurs propres distinctes, et on n'a pas besoin d'étudier le cas $|\lambda| \geqslant 2$. Ainsi, $\operatorname{sp}(A) = \left\{2\cos\frac{k\pi}{n+1}, k \in [\![1,n]\!]\right\}$.

II Polynômes d'endomorphismes et de matrices carrées

A) Cas général d'une $\mathbb{K}$-algèbre

1) Définition

Soit A une $\mathbb{K}$-algèbre unitaire. Pour $A_0 \in A$ et $P = \sum_{j=0}^{d} \alpha_j X^j \in \mathbb{K}[X]$, on pose $\tilde{P}(A_0) = \sum_{j=0}^{d} \alpha_j A_0^j$, où $A_0^0 = 1_A$, neutre pour $\times$ de A.

2) Morphisme d'évaluation

Proposition :

1. L'application $\begin{array}{rccl} \operatorname{Ev}_{A_0} \colon & \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & A \\ & P & \longmapsto & \tilde{P}(A_0) \end{array}$ est un morphisme d'algèbres.
2. Son image est la sous-algèbre de A engendrée par A_0, notée $\mathbb{K}[A_0]$.

Démonstration :

1. Ev_{A_0} est linéaire, $\operatorname{Ev}_{A_0}(1) = 1$...

   Pour $P = \sum_{j=0}^{d} \alpha_j X^j \in \mathbb{K}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\operatorname{Ev}_{A_0}(P \times X^n) = \operatorname{Ev}_{A_0}\left(\sum_{j=0}^{d} \alpha_j X^{j+n}\right) = \sum_{j=0}^{d} \alpha_j A_0^{j+n} = \operatorname{Ev}_{A_0}(P) \times \operatorname{Ev}_{A_0}(X^n) \tag{7.47}$$

   D'où le résultat pour $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ par linéarité.

2. ...

Remarque :

En général, Ev_{A_0} n'est pas surjectif car $\mathbb{K}[A_0]$ est toujours commutative

(Si $\varphi \colon (A, +, \times, \cdot) \to (A', +, \times, \cdot)$ est un morphisme d'algèbres où A est commutatif, alors $\varphi(A)$ est commutative)

3) Noyau du morphisme d'évaluation, polynômes annulateurs, polynôme minimal

Théorème :

$\ker \mathrm{Ev}_{A_0}$ est un idéal de l'anneau $\mathbb{K}[X]$ (puisque Ev_{A_0} est en particulier un morphisme d'anneau).

On a en plus deux cas :

1. Si Ev_{A_0} est injectif, alors $\mathbb{K}[X] \colon \mathbb{K}[A_0] \to [P][\tilde{P}(A_0)]$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-algèbres. En particulier, $\left\{A_0^k, k \in \mathbb{N}\right\}$ est libre.
2. Il existe un polynôme unitaire μ_0, appelé polynôme minimal de A_0 tel que $\ker \mathrm{Ev}_{A_0} = \mu_0 \mathbb{K}[X]$. Si on note de plus $d = \deg \mu_0$, on a $d \geqslant 1$ et $\left\{1_A, \dots A_0^{d-1}\right\}$ est une base de $\mathbb{K}[A_0]$.

Dans le premier cas, A_0 est dit transcendant ; dans le deuxième, A_0 est dit algébrique.

Remarque :

- Dans le deuxième cas, Ev_{A_0} se factorise par l'idéal $\mu_0\mathbb{K}[X]$ en un isomorphisme de $\mathbb{K}$-algèbres $\mathbb{K}[X]/\mu_0\mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[A_0]$.
- Si $A_0, B_0 \in A$ ont le même polynôme minimal μ, alors $\mathbb{K}[A_0]$ et $\mathbb{K}[B_0]$ sont isomorphes.

Démonstration (du théorème) :

$\ker \mathrm{Ev}_{A_0}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$, donc de la forme $\mu\mathbb{K}[X]$.

Si $\mu = 0$, Ev_{A_0} est injectif et établit un isomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ sur son image à savoir $\mathbb{K}[A_0]$.

Si $\mu \neq 0$: il existe un unique μ_0 unitaire tel que $\ker \mathrm{Ev}_{A_0} = \mu_0\mathbb{K}[X]$, à savoir $\mu_0 = \frac{1}{\text{terme dominant}}\mu$.

On peut supposer que $\mu = \mu_0$. On pose $d = \deg \mu$.

Si $d = 0$, cela signifie que $\mu = 1$, c'est-à-dire $\mathrm{Ev}_{A_0}(1) = 0$, ce qui est impossible car $\mathrm{Ev}_{A_0}(1) = 1_A \neq 0$.

Montrons maintenant que $u = \mathrm{Ev}_{A_0/\mathbb{K}_{d-1}[X]}$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-ev.

Déjà, u est injectif :

$\ker u = \ker \mathrm{Ev}_{A_0} \cap \mathbb{K}_{d-1}[X] = \mu\mathbb{K}[X] \cap \mathbb{K}_{d-1}[X] = \{0\}$ car $\deg \mu = d$.

De plus, u est surjectif :

Soit $B = \tilde{P}(A_0) \in \mathbb{K}[A_0]$, où $P \in \mathbb{K}[X]$.

La division euclidienne de P par μ donne :

$B = R \times \mu + S$ où $\deg S \leqslant d - 1$.

Donc $B = \tilde{P}(A_0) = \tilde{R}(A_0) \times \tilde{\mu}(A_0) + \tilde{S}(A_0) = \tilde{S}(A_0)$.

Donc $B = u(S)$.

Donc u est un isomorphisme, et $\dim \mathbb{K}[A_0] = d$.

B) Cas des endomorphismes et des matrices carrées

- On prend pour A l'une des algèbres $A = (\mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E), +, \circ, \cdot)$, $1_A = \mathrm{Id}_E$ ou $A = (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times, \cdot)$, $1_A = I_n$.

Soit $P = \sum_{j=0}^{d} \alpha_j X^j \in \mathbb{K}[X]$

Pour $u \in \mathscr{L}_K(E)$, $A \in M_n(K)$, on a :

$\tilde{P}(u) = \alpha_0 \mathrm{Id}_E + \alpha_1 u + \dots + \alpha_d u^d$, $\tilde{P}(A) = \alpha_0 I_n + \alpha_1 A + \dots + \alpha_d A^d$.

On appelle polynôme annulateur de u / de A tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\tilde{P}(u) = 0 \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E)$ / $\tilde{P}(A) = 0 \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Le morphisme d'évaluation est ici le morphisme d'algèbres :

$$P \in \mathbb{K}[X] \mapsto \tilde{P}(u)/\tilde{P}(A) \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E)/\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \tag{7.48}$$

- Propriétés particulières :

Proposition :

◇ En dimension $n \geqslant 2$, le morphisme n'est jamais surjectif.

◇ En dimension $n < +\infty$, il n'est jamais injectif.

Démonstration :

Si $\dim E \geqslant 2$, $(\mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E), +, \circ, \cdot)$ n'est pas commutative.

Si $\dim E = n < +\infty$, alors $\mathrm{Ev}_u \colon P \in \mathbb{K}[X] \mapsto \tilde{P}(u) \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E)$ n'est pas injectif car $\{u^n = \mathrm{Ev}_u(X^n)\}$ n'est pas libre, car infinie dans un espace de dimension finie.

Idem pour $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

- Cas de la dimension finie :

Soit $u \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E)$ avec $\dim_{\mathbb{K}} E = n < +\infty$ (ou $u \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$)

On sait que $\mathrm{Ev}_u \colon P \mapsto \tilde{P}(u)$ n'est pas injectif.

Donc $\ker \mathrm{Ev}_u$ est un idéal, de la forme $\mu\mathbb{K}[X]$, où μ est unitaire de degré $\geqslant 1$.

Alors μ est le polynôme minimal de u (noté $\min(u)$ ou $\min_u$)

L'idéal $\mu\mathbb{K}[X] = \ker \mathrm{Ev}_u$ est l'idéal annulateur, c'est l'ensemble des polynômes annulateurs de u.

Remarque :

$\min(u)$ est le polynôme unitaire annulateur de plus petit degré.

C) Exemple

- Projecteurs :

$u \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E)$ (E quelconque) est un projecteur si et seulement si $X^2 - X$ est annulateur de u.

En effet, u est un projecteur si et seulement si $u \circ u - u = 0$.

Polynôme minimal ?

Déjà, c'est un polynôme unitaire divisant $X^2 - X$.

◇ Soit $\min(u) = X$ et $u = 0$,

◇ Soit $\min(u) = X - 1$ et $u = \mathrm{Id}_E$

◇ Soit $\min(u) = X^2 - X$, et u n'est ni nul ni l'identité.

- Dérivation de $\mathbb{K}[X]$: $D \colon P \mapsto P'$ (en caractéristique 0)

Soit $P = \sum_{j=0}^{d} \alpha_j X^j \in \mathbb{K}[X]$; ainsi $\tilde{P}(D) \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[X])$.

Pour $M \in \mathbb{K}[X]$:

$$\tilde{P}(D)(M) = \alpha_0 M + \alpha_1 M' + \cdots + \alpha_d M^{(d)} \tag{7.49}$$

Si $P \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$, alors $\tilde{P}(D) \neq 0_{\mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E)}$.

En effet, pour $M = X^d$:

$$\tilde{P}(D)(M) = \alpha_0 X^d + d\alpha_1 X^{d-1} + \cdots + \alpha_d d! \tag{7.50}$$

Donc $\tilde{P}(D)(M) = 0 \iff \forall j \in [\![0, d]\!], d \times \cdots \times (d - j + 1)\alpha_j = 0 \iff P = 0$

(car on est en caractéristique 0)

- $u \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E)$ est dit nilpotent s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0$, c'est-à-dire X^p est annulateur de u.
  Propriété :
  u est nilpotent si et seulement si il admet un polynôme minimal de la forme X^r ; r s'appelle alors l'indice de nilpotence de u.
  Même définition et propriété pour les matrices carrées.

Exemples

◇ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est nilpotente (matrice de Jordan)

On a : $A^n = 0$, et $A^{n-1} \neq 0$.

En effet, A est la matrice dans la base canonique de $u \colon \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ (x_1, \dots x_n) & \longmapsto & (x_2, \dots x_{n-1}, 0) \end{array}$.

Pour $j \in [\![1, n]\!]$, A^j est la matrice dans la base canonique de $u^j \colon \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ (x_1, \dots x_n) & \longmapsto & (x_{j+1}, \dots x_{n-1}, 0, \dots 0) \end{array}$.

Comme $u^{n-1}(x_1, \dots x_n) = (x_n, 0 \dots, 0)$, on a $u^{n-1} \neq 0$, et $u^n = 0$.

◇ $\Delta \colon \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$, $\mathbb{K}$ étant de caractéristique p non nulle, est nilpotente.

En effet, $\Delta^p(X^k) = k \times (k-1) \cdots (k-p+1) X^{k-p} = 0$:

— Si $k \leqslant p-1$, ok

— Si $k \geqslant 1$, alors l'un des p entiers consécutifs $k, \dots, (k-p+1)$ est multiple de p.

D) Réduction de Jordan des nilpotents en dimension finie

Théorème :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n.

Soit $u \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E)$, nilpotent.

Alors :

1. $u^n = 0$
2. Si r est l'indice de nilpotence, on a $\{0\} \subsetneq \ker u \subsetneq \ker u^2 \cdots \subsetneq \ker u^r = E$
3. $d_k = \dim \ker u^k$ est concave (et croissante) : $\forall k \in \mathbb{N}^*, d_{k+1} - d_k \leqslant d_k - d_{k-1}$

Démonstration :

1. Soit r l'indice de nilpotence.

   Alors $u^r = 0$, et $u^{r-1} \neq 0$. Soit $v \in E$ tel que $u^{r-1}(v) \neq 0$.

   Alors $(v, u(v) \dots u^{r-1}(v))$ est libre.

   En effet : soient $\lambda_0, \dots \lambda_{r-1} \in \mathbb{K}$, supposons que $\sum_{i=0}^{r-1} \lambda_i u^i(v) = 0$.

   Alors en appliquant u^{r-1}, il reste $\lambda_0 u^{r-1}(v) = 0$, donc $\lambda_0 = 0$, Donc...la famille est libre, et $r \leqslant n$, d'où $u^n = 0$

   Remarque :

   C'est une application du théorème de Cayley–Hamilton (plus tard)

2. On a déjà $\forall i \in [\![0, r-1]\!], \ker u^i \subset \ker u^{i+1}$.

   On a aussi $\ker u^r = E$ et $\ker u^{r-1} \neq E$.

   On va montrer que si $\ker u^i = \ker u^{i+1}$ pour $i \in \mathbb{N}^*$, alors $\forall j \geqslant i, \ker u^j = \ker u^i$, ce qui établira le résultat voulu puisque cela signifie alors que $i \geqslant r$

   Par récurrence :

   Si $j = i$, ok ; si $j = i+1$, ok.

   Supposons que pour $j \geqslant i, \ker u^j = \ker u^i$.

   Soit alors $x \in \ker u^{j+1}$. Alors $u^{j+1}(x) = 0$. Donc $u(x) \in \ker u^j$. Donc $u(x) \in \ker u^i$. Donc $x \in \ker u^{i+1} = \ker u^i$.

   Donc $\ker u^{j+1} \subset \ker u^i$, et on a l'égalité, l'autre inclusion étant vraie.

3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, montrons que $d_{k+1} - d_k \leqslant d_k - d_{k-1}$.

   On a $d_{k+1} - d_k = \dim\ker u^{k+1} - \dim\ker u^k = \dim\ker \tilde{u}_k$, où $\tilde{u}_k = u_{|\operatorname{Im} u^k}$.
   En effet : $\dim\operatorname{Im} u^k = \dim\ker\tilde{u}_k + \dim\operatorname{Im}\tilde{u}$ (on est en dimension finie).

   Comme $\operatorname{Im}\tilde{u}_k = \operatorname{Im} u^{k+1}$, on a $\dim\operatorname{Im} u^k = \dim\ker\tilde{u}_k + \dim\operatorname{Im} u^{k+1}$,

   soit $\dim E - d_k = \dim\ker\tilde{u}_k + \dim E - d_{k+1}$ ou $d_{k+1} - d_k = \dim\ker\tilde{u}_k$

   Et $d_k - d_{k-1} = \dim\ker\tilde{u}_{k-1}$.

   Montrons maintenant que $\ker\tilde{u}_k \subset \ker\tilde{u}$, ce qui montrera l'inégalité.

   On a : $\operatorname{Im} u^{k-1} \supset \operatorname{Im} u^k$. Donc $\tilde{u}_k = u_{|\operatorname{Im} u^k} = (u_{|\operatorname{Im} u^{k-1}})_{|\operatorname{Im} u^k} = (\tilde{u}_{k-1})_{|\operatorname{Im} u^k}$

   Soit $\ker\tilde{u}_k = \ker\tilde{u}$, donc $\ker\tilde{u}_k \subset \ker\tilde{u}$.

4. Autre démonstration du dernier point :

   Il suffit de montrer qu'un supplémentaire S_k de $\ker u^k$ dans $\ker u^{k+1}$ est de dimension inférieure ou égale à celle d'un supplémentaire de $\ker u^{k-1}$ dans $\ker u^k$:

   Soit S_k tel que $S_k \oplus \ker u^k = \ker u^{k+1}$.

   Alors $u(S_k) \subset u(\ker u^{k+1}) \subset \ker u^k$,

   Et $u(S_k) \cap \ker(u^{k-1}) = \{0\}$ (En effet, soit $x \in S_k$ tel que $u(x) \in \ker u^{k-1}$. Alors $x \in S_k \cap \ker u^k = \{0\}$, donc $x = 0$ et $u(x) = 0$)

   Donc comme de plus $u(S_k) \subset \ker u^k$ (et $\ker u^{k-1} \subset \ker u^k$), on a :

   $u(S_k) \oplus \ker u^{k-1} \subset \ker u^k$, et donc d'après le théorème de Grassmann, $\dim(u(S_k)) \leqslant d_k - d_{k-1}$.

   Or, $\dim(u(S_k)) = \dim(\operatorname{Im} u_{|S_k}) = \dim S_k - \dim\ker u_{|S_k}$.

   Donc comme $\dim\ker u_{|S_k} = \dim(\ker u \cap S_k) \leqslant \dim(\ker u^k \cap S_k) = 0$, on a :

   $\dim(u(S_k)) = \dim S_k = d_{k+1} - d_k$, d'où l'inégalité voulue.

Théorème (Théorème de Jordan – Hors programme) :

Soit E de dimension finie.

Si $u \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E)$ est nilpotent, alors il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que :

$$\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} J_{k_1} & & & (0) \\ & J_{k_2} & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & J_{k_p} \end{pmatrix} \tag{7.51}$$

Où $J_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_k(\mathbb{K})$ (et $J_1 = (0)$)

Démonstration :

On note r l'indice de nilpotence de u.

Soit S_{r-1} tel que $\ker u^{r-1} \oplus S_{r-1} = E$.

Alors comme dans la fin de la démonstration précédente :

$u(S_{r-1}) \subset \ker u^{r-1}$ et $u(S_{r-1}) \cap \ker u^{r-2} = \{0\}$.

Soit alors S_{r-2} contenant $u(S_{r-1})$ et tel que $S_{r-2} \oplus \ker u^{r-2} = \ker u^{r-1}$.

(C'est possible : prendre par exemple un supplémentaire S de $\ker u^{r-2} \oplus u(S_{r-1})$ dans $\ker u^{r-1}$. En posant $S_{r-2} = u(S_{r-1}) + S = u(S_{r-1}) \oplus S$, on a $S_{r-2} + \ker u^{r-2} = \ker u^{r-1}$ et la somme est directe)

On construit ainsi une suite $S_{r-1} \dots S_0$ telle que $\forall k \leqslant r-1$, on ait :

$$\begin{cases} S_k \oplus \ker u^k = \ker u^{k+1} \\ u(S_k) \subset S_{k-1} \end{cases} \tag{7.52}$$

Si on prend maintenant une base $\mathscr{B}_{r-1}$ de S_{r-1}, alors $u(\mathscr{B}_{r-1})$ est une famille libre de $S_{r-2} \subset \ker u^{r-1}$ (car $u_{|S_{r-1}}$ est injectif : $\ker u_{|S_{r-1}} = \ker u \cap S_{r-1} \subset \ker u^{r-1} \cap S_{r-1} = \{0\}$).

On peut ainsi compléter $u(\mathscr{B}_{r-1})$ en $\mathscr{B}_{r-2}$, base de S_{r-2}.

Plus généralement, si $\mathscr{B}_{k+1}$, base de S_{k+1}, est construite, $u(\mathscr{B}_{k+1})$ est une famille libre de $S_k \subset \ker u^{k+1}$; on la complète en une base $\mathscr{B}_k$ de S_k.

Comme on a $\underbrace{S_0 \oplus S_1 \oplus \cdots}_{\ker u^i} \oplus S_i \oplus \cdots \oplus S_{r-1} = E$, $\bigcup_{k=0}^{r-1} \mathscr{B}_k$ est une base de E.

Il faut ensuite ordonner la base pour obtenir la matrice voulue...

Exemple sur un cas particulier Si $n = 6$ et $r = 3$:

On a $\{0\} \subsetneq \ker u \subsetneq \ker u^2 \subsetneq \ker u^3 = E$

On note $\mathscr{B}_2$ une base d'un supplémentaire de $\ker u^2$ dans E.

$\mathscr{B}_1 \supset u(\mathscr{B}_2)$ une base d'un supplémentaire de $\ker u$ dans $\ker u^2$.

$\mathscr{B}_0 \supset u(\mathscr{B}_1)$ une base d'un supplémentaire de $\{0\}$ dans $\ker u$.

Si par exemple $d_3 - d_2 = 1$, $d_2 - d_1 = 2$, $d_1 - d_0 = 3$ ($\#\mathscr{B}_2 = 1$, $\#\mathscr{B}_1 = 2$, $\#\mathscr{B}_0 = 3$),

$\mathscr{B}_2 = \{e_1\}$, $\mathscr{B}_1 = \{u(e_1), e_2\}$, $\mathscr{B}_0 = \left\{u^2(e_1), u(e_2), e_3\right\}$.

Alors

$$\operatorname{mat}_{(u^2(e_1),u(e_1),e_1,u(e_2),e_2,e_3)} = \left(\begin{array}{ccc|cc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{7.53}$$

E) Polynômes annulateurs, valeurs propres

Lemme :

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, valeur propre de $u \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E)$, et $\vec{v}$ un vecteur propre associé à λ.

Alors pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(\lambda)$ est valeur propre de $\tilde{P}(u)$ et $\vec{v}$ est vecteur propre associé, c'est-à-dire : $\tilde{P}(u)(\vec{v}) = P(\lambda)\vec{v}$.

Démonstration :

Si $u(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u^n(\lambda) = \lambda^n\vec{v}$ (par récurrence)

Donc par combinaison linéaire, pour $P = \sum_{j=0}^{d} a_j X^j \in \mathbb{K}[X]$, on a :

$$\tilde{P}(u)(\vec{v}) = \sum_{j=0}^{d} a_j u^j(\vec{v}) = \sum_{j=0}^{d} a_j \lambda^j \vec{v} = P(\lambda)\vec{v} \tag{7.54}$$

Théorème :

Si $P \in \mathbb{K}[X]$ est annulateur de u, toute valeur propre de u est racine de P.

Complément (Hors programme) : si u admet le polynôme minimal $\mu \in \mathbb{K}[X]$, λ est valeur propre de u si et seulement si λ est racine de μ.

Remarque :

Plus généralement, si P est un facteur de μ (c'est-à-dire que μ est multiple de P), alors $\tilde{P}(u)$ n'est pas injectif.

Démonstration :

- Si $\tilde{P}(u) = 0 \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E)$ et $u(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$ pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, alors d'après le lemme, $\vec{0} = \tilde{P}(u)(\vec{v}) = P(\lambda)\vec{v}$. Donc comme $\vec{v} \neq \vec{0}$, on a $P(\lambda) = 0$.
- Pour la remarque :

  Supposons que $\mu = P \times Q$ où $\mu = \min_u$ et $\deg P \geqslant 1$.

  Alors $\tilde{\mu}(u) = 0 \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E)$. Donc $\tilde{P}(u) \circ \tilde{Q}(u) = 0$ (Ev_u est un morphisme d'algèbre)

  Si $\tilde{P}(u)$ était injectif, on aurait $\tilde{Q}(u) = 0$, donc Q serait un multiple de μ ce qui est faux.
- Pour le complément :

  Déjà, comme μ est annulateur de u, toute valeur propre de u est racine de μ d'après le théorème.

  Inversement, si α est racine de μ, alors $X - \alpha$ divise μ, donc $(\widetilde{X-\alpha})(u) = \tilde{u} - \alpha\,\mathrm{Id}$ n'est pas injectif, et α est bien valeur propre de u.

Exemples

1. Soit u un projecteur ; alors $X^2 - X$ est annulateur de u donc les seules valeurs propres possibles sont 0 et 1.

   Mais la réciproque n'est pas toujours vraie, par exemple 1 n'est pas valeur propre du projecteur nul.
2. Si u est nilpotent, la seule valeur propre possible de u est 0, car il a un polynôme annulateur de la forme X^r avec $r \geqslant 1$.

Remarque :

Si $\dim E \geqslant 1$ et si u est nilpotent, alors 0 est valeur propre de u. En effet, son polynôme minimal est aussi de la forme X^r, $r \geqslant 1$, dont 0 est racine.

F) Théorème de décomposition des noyaux

Pour ce théorème, E peut être de dimension quelconque :

Théorème :

1. Soit $u \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E)$.

   Soient $P_1, P_2 \in \mathbb{K}[X]$ premiers entre eux.

   Alors $\ker((\widetilde{P_1 \times P_2})(u)) = \ker \tilde{P}_1(u) \oplus \ker \tilde{P}_2(u)$

2. Plus généralement, si $P_1, \dots P_k \in \mathbb{K}[X]$ sont premiers entre eux deux à deux, alors $\ker\left(\left(\widetilde{\prod_{i=1}^{k} P_i}\right)(u)\right) = \bigoplus_{i=1}^{k} \ker \tilde{P}_i(u)$.

Démonstration :

- On a $\ker \tilde{P}_1(u) \subset \ker(\widetilde{P_1 \times P_2})(u)$ et $\ker \tilde{P}_2(u) \subset \ker(\widetilde{P_1 \times P_2})(u)$.

  En effet, $(\widetilde{P_1 \times P_2})(u) = (\widetilde{P_2 \times P_1})(u) = \tilde{P}_2(u) \circ \tilde{P}_1(u)$

- De plus, $\ker \tilde{P}_1(u) \cap \ker \tilde{P}_2(u) = \{0\}$.

  On applique le théorème de Bézout :

  Il existe $A, B \in \mathbb{K}[X]$ tels que $AP_1 + BP_2 = 1$.

  Donc $\mathrm{Id}_E = (\widetilde{AP_1 + BP_2})(u) = \tilde{A}(u) \circ \tilde{P}_1(u) + \tilde{B}(u) \circ \tilde{P}_2(u)$

  Donc si $x \in \ker \tilde{P}_1(u) \cap \ker \tilde{P}_2(u)$, on a :

$$x = \tilde{A}(u) \circ \underbrace{\tilde{P}_1(u)(x)}_{=\vec{0}} + \tilde{B}(u) \circ \underbrace{\tilde{P}_2(u)(x)}_{=\vec{0}} \tag{7.55}$$

- Enfin, $\ker(\widetilde{P_1 \times P_2})(u) \subset \ker \tilde{P}_1(u) + \ker \tilde{P}_2(u)$:

  Si $x \in \ker(\widetilde{P_1 \times P_2})(u)$, alors :

$$x = \underbrace{\tilde{A}(u) \circ \tilde{P}_1(u)(x)}_{\in \ker \tilde{P}_2(u)} + \underbrace{\tilde{B}(u) \circ \tilde{P}_2(u)(x)}_{\in \ker \tilde{P}_1(u)} \tag{7.56}$$

  En effet, $\tilde{P}_2(u)(\tilde{P}_1(u) \circ \tilde{A}(u)(x)) = (\tilde{A}(u) \circ \widetilde{P_1 \times P_2}(u))(x) = 0$

Exemple :

Si $u^2 = u$, on a : $E = \ker u \oplus \ker(u - \mathrm{Id}_E)$

En effet : $X^2 - X = X(X-1)$ est annulateur, et $X \wedge (X-1) = 1$.

Donc $E = \ker X(\widetilde{X-1})(u) = \ker \tilde{X}(u) \oplus \ker(\widetilde{X-1})(u) = \ker u \oplus \ker(u - \mathrm{Id}_E)$

G) Application au caractère diagonalisable

(On est de nouveau en dimension finie)

Théorème :

Soit $u \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E)$, E étant de dimension finie. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) u est diagonalisable

(2) u admet un polynôme annulateur non nul scindé à racines simples

(3) Le polynôme minimal de u est scindé à racines simples.

On a le même énoncé pour les matrices.

Complément (Hors programme) :

Si u est diagonalisable de valeurs propres $\lambda_1, \dots \lambda_p$ deux à deux distinctes, alors $\min_u = \prod_{i=1}^p X - \lambda_i$.

Démonstration :

(1) $\Longrightarrow$ (3) On va montrer le complément, ce qui établira l'implication :

Déjà, $\prod_{i=1}^p X - \lambda_i$ est annulateur.

En effet, notons $\left(\prod_{i=1}^p X - \lambda_i\right)(u) = (u - \lambda_1 \mathrm{Id}) \circ \dots \circ (u - \lambda_p \mathrm{Id}) = v$

Donc v est nulle sur chaque $E_{\lambda_k} = \ker(u - \lambda_k \mathrm{Id})$.

Donc v est nulle sur E.

On a $\prod_{i=1}^p X - \lambda_i | \min_u$ car toute valeur propre de u est racine de $\min_u$.

D'autre part, $\prod_{i=1}^p X - \lambda_i$ est annulateur, donc $\min_u | \prod_{i=1}^p X - \lambda_i$.

D'où $\min_u = \prod_{i=1}^p X - \lambda_i$

(3) $\Longrightarrow$ (2) ok...

(2) $\Longrightarrow$ (1) Soit $P = \prod_{i=1}^n X - \alpha_i$, les α_i étant deux à deux distincts.

Supposons que P est annulateur de u. Alors, d'après le théorème de décomposition des noyaux, $\ker \tilde{P}(u) = E = \bigoplus_{i=1}^n \ker(X - \alpha_i \mathrm{Id})$

Or, $\ker(X - \alpha_i \mathrm{Id})$ est soit un sous-espace propre de u, soit $\{0\}$.

Donc E est engendré par des vecteurs propres de u, donc u est diagonalisable.

Exercice Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que $M = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$ soit diagonalisable. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $u \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))$ définie par $\forall X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), u(X) = A \times X$ est diagonalisable.

On a : $M^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^k \\ 0 & A^k \end{pmatrix}$, d'où $\forall P \in \mathbb{K}[X], P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & AP'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$.

Analyse Si M est diagonalisable, M admet un polynôme annulateur scindé à racines simples P_M, et $P_M(M) = 0 = \begin{pmatrix} P_M(A) & AP'_M(A) \\ 0 & P_M(A) \end{pmatrix}$, donc $\begin{cases} P_M(A) = 0 \\ AP'_M(A) = 0 \quad (7.57) \end{cases}$.

On a : $P_M \wedge P'_M = 1$ (car P_M est scindé à racines simples)

D'après le théorème de Bézout, il existe $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P_M U + P'_M V = 1$.

Donc $\underbrace{P_M(A)}_{=0} U(A) + P'_M(A)V(A) = I_n$, soit $P'_M(A)V(A) = I_n$.

Ainsi, $P'_M(A)$ est inversible, et (7.57) devient $A = 0$.

Réciproquement, si $A = 0$, M est bien diagonal(isabl)e !

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\quad G_A \colon \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array}$.

Alors A est diagonalisable si et seulement si G_A est diagonalisable.

En effet, $G_A \circ G_A = G_{A^2}$, d'où $\forall k \in \mathbb{N}, G_A^k = G_{A^k}$, puis $\forall P \in \mathbb{K}[X], \tilde{P}(G_A) = G_{\tilde{P}(A)}$.

(En fait, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto G_A \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))$ est un morphisme d'algèbres)

Si A est diagonalisable, $P = \min_A$ est scindé à racines simples, et $\tilde{P}(G_A) = G_{\tilde{P}(A)} = G_0 = 0$. Donc comme P est scindé à racines simples, G_A est diagonalisable.

Inversement, si G_A est diagonalisable, il existe $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ scindé à racines simples tel que $\tilde{P}(G_A) = 0$. Alors $\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \tilde{P}(A) \times M = 0$, et en particulier avec $M = I_n$, $\tilde{P}(A) = 0$ donc A est diagonalisable.

H) Calcul de $\tilde{P}(u)$ pour u diagonalisable

Théorème :

Soit $u \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E)$ diagonalisable de valeurs propres $\lambda_1, \dots \lambda_k$ deux à deux distinctes, et les projecteurs spectraux π_j sur $\ker(u - \lambda_j \operatorname{Id})$ parallèlement à $\displaystyle\bigoplus_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} \ker(u - \lambda_i \operatorname{Id})$.

Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, on a alors $\tilde{P}(u) = \sum_{j=1}^{k} P(\lambda_j)\pi_j$.

Démonstration :

vu en I.

III Utilisation du polynôme caractéristique (en dimension finie)

A) Trace et déterminant d'un endomorphisme

1) Cas d'une matrice carrée

Propriétés du déterminant et de la trace connues…

En particulier, si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ $B \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, alors :

$$\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} A_{i,j} B_{j,i} \tag{7.58}$$

En particulier, deux matrices semblables ont même trace et même déterminant.

2) Cas d'un endomorphisme

Définition :

La trace, le déterminant de $u \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E)$ sont ceux de la matrice de u dans une base quelconque de E.

Il sont indépendants du choix de la base puisque si $A = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(u)$ et $A' = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}'}(u)$, alors $A' = P^{-1}AP$ où $P = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$.

3) Définition intrinsèque de la trace et du déterminant d'un endomorphisme

On note $\overset{p}{\Lambda}(E)$ le $\mathbb{K}$-ev des formes $\varphi \colon E^p \to \mathbb{K}$ p-linéaires alternées.

Théorème :

Si $p = \dim E$, $\overset{p}{\Lambda}(E)$ est de dimension 1 ; pour toute base $\mathscr{B}$ de E, $\overset{p}{\Lambda}(E) = \mathbb{K} \det_{\mathbb{B}}$ (voir théorie du déterminant, vue en sup).

Proposition :

Pour tout $u \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E)$ et tout $\varphi \in \overset{n}{\Lambda}(E)$ ($n = \dim E$), on définit les applications $\varphi_1, \varphi_2 \colon E^n \to \mathbb{K}$ par :

$$\varphi_1(v_1, \dots v_n) = \varphi(u(v_1), \dots u(v_n)) \tag{7.59}$$

$$\varphi_2(v_1, \dots v_n) = \varphi(u(v_1), v_2 \dots v_n) + \varphi(v_1, u(v_2) \dots v_n) + \dots + \varphi(v_1, v_2 \dots u(v_n)) \tag{7.60}$$

Alors les applications $\begin{array}{ccc} \overset{n}{\Lambda}(E) & \longrightarrow & \overset{n}{\Lambda}(E) \\ \varphi & \longmapsto & \varphi_1 \end{array}$ et $\begin{array}{ccc} \overset{n}{\Lambda}(E) & \longrightarrow & \overset{n}{\Lambda}(E) \\ \varphi & \longmapsto & \varphi_2 \end{array}$ sont linéaires. Ce sont les homothéties de rapports respectifs $\det u$ et $\mathrm{Tr}(u)$, c'est-à-dire :

$$\forall \varphi \in \overset{n}{\Lambda}(E), \varphi_1 = (\det u)\varphi \text{ et } \varphi_2 = (\mathrm{Tr}(u))\varphi \tag{7.61}$$

Démonstration :

On vérifie que pour u et φ donnés, φ_1 et φ_2 sont n-linéaires (ok) et alternées :

Pour φ_1, ok. Pour φ_2 :

$$\varphi_2(v_1, \dots \underbrace{v_i}_{i}, \dots \underbrace{v_i}_{j}, \dots v_n) = \varphi(v_1, \dots \underbrace{u(v_i)}_{i}, \dots \underbrace{v_i}_{j}, \dots v_n) + \varphi(v_1, \dots \underbrace{v_i}_{i}, \dots \underbrace{u(v_i)}_{j}, \dots v_n) \tag{7.62}$$

(Les autres termes de la somme sont nuls car on a deux fois v_i et φ est alternée)

Mais comme φ est antisymétrique,

$$\varphi(v_1, \dots \underbrace{u(v_i)}_{i}, \dots \underbrace{v_i}_{j}, \dots v_n) = -\varphi(v_1, \dots \underbrace{v_i}_{i}, \dots \underbrace{u(v_i)}_{j}, \dots v_n) \tag{7.63}$$

Donc $\varphi_2(v_1, \dots \underbrace{v_i}_{i}, \dots \underbrace{v_i}_{j}, \dots v_n) = 0$, et φ_2 est bien alternée.

Ensuite :

$\varphi \mapsto \varphi_1$ et $\varphi \mapsto \varphi_2$ sont linéaires par rapport à φ, et $\varphi \mapsto \varphi_1$ $\varphi \mapsto \varphi_2$ sont des endomorphismes de $\overset{n}{\Lambda}(E)$ qui est de dimension 1. Ce sont donc des homothéties.

Pour les rapports :

Soit $\mathscr{B}$ une base de E et on prend $\varphi = \det_{\mathscr{B}}$.

Alors $\varphi_1 \colon (v_1, \dots v_n) \mapsto \det_{\mathscr{B}}(u(v_1), \dots, u(v_n))$ est une forme n-linéaire alternée.

On a $\varphi_1(\mathscr{B}) = \det_{\mathscr{B}}(u(e_1), \dots u(e_n)) = \det(\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u)) = \det u$

Donc φ_1 est *la* forme n-linéaire alternée telle que $\varphi_1(\mathscr{B}) = \det u$ donc $\varphi_1 = \det u \times \det_{\mathscr{B}}$.

Ensuite, pour $\varphi \in \overset{n}{\Lambda}$ quelconque, on a $\varphi = \lambda \det_{\mathscr{B}}$ pour $\lambda \in \mathbb{K}$, et donc :

$$\varphi_1(\mathscr{B}) = \lambda \det_{\mathscr{B}}(u(e_1), \dots u(e_n)) = \det(\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u)) = \lambda \det u \tag{7.64}$$

Soit $\varphi_1 = \lambda \det u \det_{\mathscr{B}} = \det u \varphi$

Pour φ_2 : C'est la même chose avec

$$\begin{aligned} \varphi_2(\mathscr{B}) &= \det_{\mathscr{B}}(u(e_1), \dots e_n) + \dots + \det_{\mathscr{B}}(e_1, \dots u(e_n)) \\ &= \begin{vmatrix} a_{1,1} & & & \\ \vdots & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n,1} & & & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a_{1,2} & & \\ & \vdots & & \\ & \vdots & \ddots & \\ & a_{n,2} & & 1 \end{vmatrix} + \dots = a_{1,1} + a_{2,2} + \dots = \mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(u) \end{aligned} \tag{7.65}$$

B) Polynômes caractéristiques

1) Pour une matrice (cf I)

Définition :

Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on a $A - XI_n \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}[X])$

On pose alors $\chi_A = \det(A - XI_n) \in \mathbb{K}[X]$

Théorème :

χ_A est un polynôme de degré n de terme dominant $(-1)^n$, de la forme

$$\chi_A = (-1)^n (X^n - \operatorname{Tr}(A) X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det A) \tag{7.66}$$

$\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de A si et seulement si $\chi_A(\lambda) = 0$

Démonstration :

Vu en I.

Propriété :

- Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.
- Une matrice carrée et sa transposée aussi.
- $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \forall \lambda \in \mathbb{K}, \det(A - \lambda I_n) = \chi_A(\lambda)$

En effet : Si $A' = P^{-1}AP$,

$$\chi_{A'} = \det(P^{-1}AP - XI_n) = \det(P^{-1}(A - XI_n)P) = \cdots = \det(A - XI_n) = \chi_A \tag{7.67}$$

Proposition :

Pour $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

En effet : il suffit de vérifier que :

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -B & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} AB - XI_n & A \\ 0 & XI_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -B & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -XI_n & A \\ 0 & XI_n - BA \end{pmatrix} \tag{7.68}$$

Et alors $\det((7.68)) = 1 \times \chi_{AB} X^n \times 1$ d'une part

Et $\det((7.68)) = (-X)^n \det(XI_n - BA) = X^n \det(BA - XI_n) = X^n \chi_{BA}$ d'autre part.

Donc $\chi_{AB} = \chi_{BA}$

2) Cas particulier

Théorème :

Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonale (supérieure ou inférieure), alors

$$\chi_A = \prod_{i=1}^{n}(a_{i,i} - X) \tag{7.69}$$

Si $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, alors $\chi_M = \chi_A \times \chi_C$ (où $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$)

3) Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

Définition :

On appelle polynôme caractéristique de $u \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E)$ le polynôme caractéristique de la matrice A de u dans n'importe quelle base. Il est indépendant de la base choisie puisque si $A = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(u)$, $A' = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}'}(u)$, alors A et A' sont semblables donc ont même polynôme caractéristique.

Proposition :

Le spectre de $u \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E)$ est l'ensemble des racines de χ_u, polynôme caractéristique de u.

Démonstration :

λ est valeur propre de u si et seulement si λ est valeur propre de $A = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(u)$ c'est-à-dire si et seulement si $\chi_A(\lambda) = 0 = \chi_u(\lambda)$

C) Multiplicité des valeurs propres

Soit $u \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E)$, où $\dim E = n \in \mathbb{N}$, ou $u \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

- **Définition :**

  On appelle multiplicité de λ comme valeur propre de u la multiplicité de λ comme racine de χ_u

  Définition (HP) :

  La multiplicité de λ comme racine de χ_u s'appelle multiplicité algébrique.

  La dimension de $\ker(u - \lambda \operatorname{Id})$ s'appelle multiplicité géométrique de λ.

Théorème :

- Pour toute valeur propre λ de u, on a $1 \leqslant m_{\text{géo}}(\lambda) \leqslant m_{\text{alg}}(\lambda)$

Démonstration :

Soit $p = m_{\text{géo}}(\lambda)$, et soit $(e_1, \dots e_n)$ une base de E où $(e_1, \dots e_p)$ est une base de $E_\lambda(u)$. Alors $\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(u) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda I_p & A \\ 0 & B \end{array}\right)$, donc $\chi_u = (\lambda - X)^p \chi_B$, soit $(\lambda - X)^p | \chi_u$.

Donc $m_{\text{alg}} \geqslant p$.

- Si χ_u est scindé :

Théorème :

Si χ_u est scindé, $\chi_u = \prod_{i=1}^{d}(\lambda_i - X)^{m_i}$, λ_i valeurs propres distinctes, m_i leur multiplicité (algébrique), alors $\mathrm{Tr}(u) = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i m_i$ et $\det(u) = \prod_{i=1}^{d} \lambda_i^{m_i}$

Démonstration :

On a $\chi_u = \prod_{i=1}^{d}(\lambda_i - X)^{m_i} = (-1)^n(X^n - \mathrm{Tr}(u)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det u)$

D) Lien entre polynôme caractéristique et polynôme minimal : théorème de Cayley–Hamilton

Théorème (Cayley–Hamilton) :

Pour tout endomorphisme u en dimension finie, ou toute matrice carrée u, $\min u$ divise χ_u.

Autrement dit, $\tilde{\chi}_u(u) = 0$ (le polynôme χ_u est annulateur)

Démonstration :

- Cas simple où u est diagonalisable de valeurs propres $\lambda_1, \dots \lambda_p$ et de multiplicités respectives m_i :

  Alors $\min_u = \prod_{i=1}^{p}(X - \lambda_i)$

  Et $\chi_u = \prod_{i=1}^{p}(X - \lambda_i)^{m_i}$. En effet, soit pour $j \in [\![1, p]\!]$ B_j une matrice de $E_{\lambda_j}(u)$.

  Alors $\mathscr{B} = (B_1, \dots B_p)$ est une base de E, et $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\delta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_p I_{\delta_p} \end{pmatrix}$ où $\delta_i = \dim E_{\lambda_i}(u)$.

  Donc $\chi_u = \prod_{i=1}^{p}(X - \lambda_i)^{\delta_i}$ et par définition des multiplicités, on a $\forall j \in [\![1, p]\!], m_j = \delta_j$

- Cas général :

  Soit $\chi_u = (-1)^n(X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0)$

  On veut montrer que $u^n + a_{n-1}u^{n-1} + \dots + a_0 \,\mathrm{Id}$ est l'application nulle.

  C'est-à-dire que $\forall \vec{v} \in E, u^n(\vec{v}) + a_{n-1}u^{n-1}(\vec{v}) \dots + a_0\vec{v} = \vec{0}$

  Soit $\vec{v} \in E \setminus \{0\}$. On considère $F = \mathrm{Vect}(u^k(\vec{v}), k \in \mathbb{N}) = \left\{\tilde{P}(u), P \in \mathbb{K}[X]\right\}$

  Donc F est un sous-espace vectoriel de E, de dimension $d \leqslant n$

  Alors $(\vec{v}, u(\vec{v}), \dots u^{d-1}(\vec{v}))$ est une base de F

  En effet, soit i le plus petit indice tel que $u^i(\vec{v})$ soit combinaison linéaire de $\vec{v}, u(\vec{v}), \dots u^{i-1}(\vec{v})$ (i existe car $\dim F \in \mathbb{N}$)

  Alors $(\vec{v}, u(\vec{v}), \dots u^{i-1}(\vec{v}))$ est libre, et $u^i(\vec{v}) = \sum_{k=0}^{i-1} \alpha_k u^k(\vec{v})$.

  Donc par récurrence, $\forall k \in \mathbb{N}, u^k(\vec{v}) \in (\vec{v}, u(\vec{v}), \dots u^{i-1}(\vec{v}))$

  D'où $F = \mathrm{Vect}(\vec{v}, u(\vec{v}), \dots u^{i-1}(\vec{v}))$, et $(\vec{v}, u(\vec{v}), \dots u^{i-1}(\vec{v}))$ est une base de F, soit $d = i$

  Maintenant :

  Comme $u^d(\vec{v}) \in F$, on peut écrire $u^d(\vec{v}) = \alpha_0\vec{v} + \dots + \alpha_{d-1}u^{d-1}(\vec{v})$

  Considérons alors une base $(e_1, \dots e_n)$ de E où $\forall i \leqslant d, e_i = u^{i-1}(\vec{v})$.

Alors

$$\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(u) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & & & & \alpha_0 & \\ 1 & 0 & & & \vdots & \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & A \\ \vdots & & \ddots & 0 & & \\ 0 & & & 1 & \alpha_{d-1} & \\ \hline & & 0 & & & B \end{array}\right) \tag{7.70}$$

On a en effet $u(e_1) = e_2$, ...$u(e_i) = e_{i+1}$ pour $i \leqslant d-1$

Et $u(e_d) = u^d(\vec{v}) = \sum_{k=0}^{d-1} \alpha_k u^k(\vec{v})$

Donc $\chi_u = \chi_M \times \chi_B$ où M est la transposée d'une matrice compagnon :

$\chi_M = (-1)^d(X^d - \alpha_{d-1}X^{d-1} - \alpha_0)$.

On a donc $\tilde{\chi}_u(u) = \tilde{\chi}_B(u) \circ \tilde{\chi}_M(u) = (-1)^d \tilde{\chi}_B(u) \circ (u^d - \alpha_{d-1}u^{d-1} - \cdots \alpha_0 \operatorname{Id})$

Donc $\tilde{\chi}_u(u)(\vec{v}) = (-1)^d \tilde{\chi}_B(u) \underbrace{\left(u^d(\vec{v}) - \alpha_{d-1}u^{d-1}(\vec{v}) - \cdots \alpha_0 \vec{v}\right)}_{=\vec{0}}$

Comme ceci est valable pour tout $\vec{v} \in E \setminus \{0\}$, et que $\tilde{\chi}_u(u)(\vec{0}) = \vec{0}$, χ_u est bien annulateur de u.

E) Application du polynôme caractéristique au caractère diagonalisable

Théorème :

Soit $u \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E)$, E étant de dimension finie.

Alors u est diagonalisable si et seulement si χ_u est scindé et pour toute valeur propre λ, la multiplicité algébrique et la multiplicité géométrique sont égale (c'est-à-dire $\dim E_{\lambda_i}(u) = m_i$)

Démonstration :

Supposons que u est diagonalisable, de valeurs propres $\lambda_1, \dots \lambda_p$.

Soient $d_1, \dots d_p$ les dimensions des espaces propres associés.

On note $\mathscr{B} = \bigcup_{\lambda \in \operatorname{sp}(u)} \mathscr{B}_\lambda$, où $\mathscr{B}_\lambda$ est une base de E_λ pour $\lambda \in \operatorname{sp}(u)$.

Ainsi, $\mathscr{B}$ est une base de E.

La matrice de u dans $\mathscr{B}$ est $\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{d_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_p I_{d_p} \end{pmatrix}$

Donc $\chi_u = \prod_{i=1}^{p} (\lambda_i - X)^{d_i}$. Donc χ_u est scindé, et $m_i = d_i$.

Inversement :

On appelle défaut de la valeur propre λ l'entier $m_\lambda - \dim E_\lambda(u) = d_\lambda \geqslant 0$

Comme χ_u est scindé, on a $\sum_{\lambda \in \operatorname{sp}(u)} m_\lambda = \dim E$

Or, par hypothèse, $m_\lambda = \dim E_\lambda(u)$. Donc $\sum_{\lambda \in \operatorname{sp}(u)} \dim E_\lambda(u) = \dim E$, et u est diagonalisable.

Remarque pratique Si χ_u est scindé à racines simples, alors u est diagonalisable, mais la réciproque est fausse ; par exemple l'identité est diagonalisable, mais son polynôme caractéristique est $\chi_{\operatorname{Id}} = (1-X)^n$, qui n'est pas à racines simples.

F) Caractère trigonalisable (en dimension finie)

1) Définition

Définition :
Un endomorphisme u de E est dit trigonalisable s'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que la matrice de u dans $\mathscr{B}$ soit trigonale supérieure.

Remarque :
Si $\mathrm{mat}_{(e_1,\dots e_n)}(u) = (a_{i,j})$, alors $\mathrm{mat}_{(e_n,\dots e_1)}(u) = (a_{n+1-i,n+1-j})$

En effet, en notant $e'_i = e_{n-i+1}$ pour $i \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$u(e'_j) = u(e_{n+1-j}) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,n+1-j} e_i = \sum_{i=1}^{n} a_{i,n+1-j} e'_{n+1-i} \tag{7.71}$$

Conclusion :
On peut aussi bien travailler avec les matrices trigonales supérieures $(T_n^+(\mathbb{K}))$ que trigonales inférieures $(T_n^-(\mathbb{K}))$.

Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice trigonale (supérieure)

Proposition :
$u \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E)$ est trigonalisable si et seulement si sa matrice dans une base quelconque l'est.

$A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable si et seulement si $\begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array}$ l'est.

Trigonaliser un endomorphisme u, c'est trouver une base de E dans laquelle la matrice de u est trigonale.

Trigonaliser une matrice A, c'est trouver $P \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP$ est trigonale

2) Caractérisation

Théorème :
Soit $u \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E)$, E étant de dimension n finie, ou $u \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) u est trigonalisable

(2) χ_u est scindé

(3) u admet un polynôme annulateur scindé

(4) $\min_u$ est scindé.

Corollaire :
Lorsque $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, toute matrice carrée est trigonalisable.

Démonstration :

(1) $\implies$ (2) Si $\text{mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & & a_{i,j} \\ & \ddots & \\ & & a_{n,n} \end{pmatrix}$, alors $\chi_u = \prod_{i=1}^{n} (a_{i,i} - X)$ est scindé.

(2) $\implies$ (3) C'est le théorème de Cayley–Hamilton

(3) $\implies$ (4) Si R est annulateur et scindé, $\min_u$ qui divise R est scindé.

(4) $\implies$ (1) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \mathscr{P}(n)$ où $\mathscr{P}(n)$ désigne « si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est tel que $\min_A$ est scindé, alors A est trigonalisable ».

- Pour $n = 1$: toutes les matrices sont diagonales donc trigonalisables.
- Soit $n \geqslant 2$, supposons $\mathscr{P}(n-1)$.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, supposons que $\min_A$ est scindé.

Soit λ une racine de $\min_A$. Alors λ est valeur propre de A.

(Sinon, $\min_A = (X - \lambda)Q$, et on aurait $0 = (A - \lambda I_n)\tilde{Q}(A)$, soit $\tilde{Q}(A) = 0$ et $\min_A |Q$ ce qui est impossible)

Soit $X_\lambda \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \backslash \{0\}$ un vecteur propre de $u_A \colon \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array}$ associé à λ.

On complète $v_1 = X_\lambda$ en une base $\mathscr{B}' = (v_1, \dots v_n)$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Alors $\text{mat}_{\mathscr{B}'}(u_A) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & l \\ \hline 0 & A' \end{array}\right) = B$

On a $\forall k \in \mathbb{N}, B^k = \left(\begin{array}{c|c} \lambda^k & l(k) \\ \hline 0 & A'^k \end{array}\right)$

Donc $\min_A(B) = \left(\begin{array}{c|c} \min_A(\lambda) & \dots \\ \hline 0 & \min_A(A') \end{array}\right)$

Or, A et B sont semblables, donc $\min_A(B) = 0$, d'où $\min_A(A') = 0$

Donc $\min_{A'} | \min_A$ qui est scindé, donc $\min_{A'}$ est scindé.

Donc par hypothèse de récurrence, A' est trigonalisable, disons $A' = RT'R^{-1}$ où $R \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ et $T' \in T_n^+(\mathbb{K})$.

On a donc :

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & l \\ 0 & RTR^{-1} \end{pmatrix} \tag{7.72}$$

On cherche alors $l' \in \mathscr{M}_{1,n-1}(\mathbb{K})$ tel que $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & l \\ 0 & T' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{pmatrix}$

On a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & l \\ 0 & T' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & l'R^{-1} \\ 0 & RTR^{-1} \end{pmatrix}$, on peut donc prendre $l' = lR$

Ainsi, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & l' \\ 0 & T' \end{pmatrix}$

Donc B est semblable à une matrice trigonale, donc trigonalisable.

Donc comme A est semblable à B, elle est aussi trigonalisable.

Exemple :
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Soit $u \in \mathscr{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ tel que $\mathrm{mat}_{\mathrm{cano}}\, u = A$.

On a :

$$\begin{aligned}\chi_A &= \begin{vmatrix} 1-X & 0 & -2 \\ 1 & 1-X & 3 \\ 0 & 1 & 1-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-X & 2-X & 2-X \\ 1 & 1-X & 3 \\ 0 & 1 & 1-X \end{vmatrix} \\ &= (2-X)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-X & 3 \\ 0 & 1 & 1-X \end{vmatrix} = (2-X)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -X & 2 \\ 0 & 1 & 1-X \end{vmatrix} \\ &= -(2-X)^2(1+X)\end{aligned} \tag{7.73}$$

Donc d'après le théorème de Cayley–Hamilton et de décomposition des noyaux, $\mathbb{R}^3 = \ker(u + \mathrm{Id}) \oplus \underbrace{\ker(u - 2\,\mathrm{Id})^2}_{C_2}$

- Base de $\ker(u + \mathrm{Id})$:

$$\begin{cases} 2x + 2z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = -2z = -2x \end{cases} \tag{7.74}$$

Donc $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

- $\ker(u - 2\,\mathrm{Id})$:

$$\begin{cases} -x - 2z = 0 \\ x - y + 3z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = y \\ x = -2z \end{cases} \tag{7.75}$$

Donc $V_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- $\ker(u - 2\,\mathrm{Id})^2 = (u - 2\,\mathrm{Id})^{-1}\{\ker(u - 2\,\mathrm{Id})\}$

$$\begin{cases} -x - 2z = -2 \\ x - y + 3z = 1 \\ y - z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} y = z + 1 \\ x = 2 - 2z \end{cases} \tag{7.76}$$

Donc $(u - 2\,\mathrm{Id})^{-1}\{V_2\} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{V_3} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(V_1, V_2, V_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ $(\det(\cdots) = -9)$

Dans cette base,

$$\operatorname{mat}_{(V_1,V_2,V_3)} u = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad ((u-2\,\mathrm{Id})(V_3) = V_2,\ \text{donc } u(V_3) = 2V_3 + V_2) \tag{7.77}$$

Ainsi, $A = P\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Remarque :

On pouvait simplement compléter (V_1, V_2) en une base de $\mathbb{R}^3$, ici on a fait une décomposition de Jordan–Dumford (cf plus loin)

G) Compléments (Hors programme) : sous-espaces caractéristiques et décomposition de Jordan–Dumford

Problème On suppose χ_u scindé, on veut trigonaliser u avec une forme réduite la plus simple possible.

On pose $\chi_u = \prod_{i=1}^{p} (\lambda_i - X)^{m_i}$, les λ_i étant deux à deux distincts, $m_i \geqslant 1$

D'après le théorème de Cayley–Hamilton,

$$(\lambda_1 \,\mathrm{Id} - u)^{m_1} \circ (\lambda_2 \mathrm{Id} - u)^{m_2} \circ \cdots \circ (\lambda_p \,\mathrm{Id} - u)^{m_p} = 0 \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E) \tag{7.78}$$

De plus, les $(\lambda_i - X)^{m_i}$ étant premiers entre eux deux à deux, le théorème de décomposition des noyaux donne :

$$E = \ker 0 = \bigoplus_{i=1}^{p} \ker((u - \lambda_i \,\mathrm{Id})^{m_i}) \tag{7.79}$$

Définition :

Le sous-espace $C_i = \ker((u - \lambda_i \,\mathrm{Id})^{m_i})$ s'appelle sous-espace caractéristique associé à la valeur propre λ_i.

Proposition :

- Si χ_u est scindé, E est la somme directe des sous-espaces caractéristiques.
- Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $\dim C_i = m_i$
- Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $\ker(u - \lambda_i \,\mathrm{Id}) \subset C_i$, avec égalité si et seulement si $\dim E_{\lambda_i} = m_i$

Démonstration :

Le premier point est clair. Pour le deuxième :

Soit, pour $i \in [\![1, p]\!]$, $\mathscr{B}_i$ une base de C_i et $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2 \dots \mathscr{B}_p)$.

Soit $i \in [\![1, p]\!]$

Pour tout $x \in C_i$, $u(x) \in C_i$. En effet, $(u - \lambda_i \,\mathrm{Id})^{m_i}(u(x)) = u \circ (u - \lambda_i \,\mathrm{Id})^{m_i}(x) = 0$

Donc $u(x) \in \ker((u - \lambda_i \,\mathrm{Id})^{m_i}) = C_i$

Donc si on prend un vecteur $e_k \in \mathscr{B}_i$, $u(e_k) \in C_i$ se décompose uniquement sur $\mathscr{B}_i$, et :

$$\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(u) = \left(\begin{array}{c|c|c} M_1 & & 0 \\ \hline & \ddots & \\ \hline 0 & & M_p \end{array}\right) \text{avec } \forall j \in [\![1, p]\!], M_j = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}_j}(u_{|C_j}).$$

Ainsi, $\chi_u = \prod_{j=1}^{p} \chi_{u_{|C_j}}$

Soit $j \in [\![1,p]\!]$

Si on pose $v_j = u_{|C_j} - \lambda_j \operatorname{Id}_{C_j} \in \mathscr{L}(C_j)$, alors v_j est nilpotent, et $v_j^{m_j} = 0$

En effet, pour $x \in C_j$, on a $v_j^{m_j}(x) = (u - \lambda_j \operatorname{Id})^{m_j}(x) = 0$.

Que dire de $\chi_{u_{|C_j}}$?

Déjà, $\chi_{u_{|C_j}}$ divise χ_u donc est scindé.

De plus, $(X - \lambda_j)^{m_j}$ est annulateur de $u_{|C_j}$. Donc $u_{|C_j}$ a une seule valeur propre, à savoir λ_j.

Ainsi, $\chi_{u_{|C_j}}$ est de la forme $(\lambda_j - X)^{\gamma_j}$ où $\gamma_j = \dim C_j$

On a donc $\chi_u = \prod_{j=1}^{p} (\lambda_j - X)^{\gamma_j}$.

Or, on a d'autre part $\chi_u = \prod_{j=1}^{p} (\lambda_j - X)^{m_j}$

Donc $\forall j \in [\![1,p]\!], \gamma_j = \dim C_j = m_j$

Pour le troisième point :

Pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $\ker(u - \lambda_i \operatorname{Id})$ est un sous-espace vectoriel de $\ker((u - \lambda_i \operatorname{Id})^{m_i})$ car $m_i \geqslant 1$.

Donc il y a égalité si et seulement si $\dim \ker(u - \lambda_i \operatorname{Id}) = \dim C_i = m_i$

Théorème (Décomposition de Jordan–Dumford – Hors programme) :
Soit $u \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E)$, on suppose χ_u scindé. Alors il existe $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ tels que $d = \tilde{P}(u)$ soit diagonalisable, $n = \tilde{Q}(u)$ soit nilpotent et $\tilde{P}(u) + \tilde{Q}(u) = u$.

C'est-à-dire $u = d + n$ avec $d \circ n = n \circ d$.

Démonstration :

Soit $\chi_u = \prod_{i=1}^{p} (\lambda_i - X)^{m_i}$, $C_i = \ker(u - \lambda_i \operatorname{Id})^{m_i}$.

On a alors $C_1 \oplus C_2 \oplus \cdots \oplus C_p = E$.

Considérons alors $d \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\forall i \in [\![1,p]\!], d_{|C_i} = \lambda_i \operatorname{Id}_{C_i}$

Et n tel que $\forall i \in [\![1,p]\!], n_{|C_i} = u_{|C_i} - \lambda_i \operatorname{Id}_{C_i}$

Alors :

d est diagonalisable car les C_i sont les sous-espaces propres de d et $\bigoplus_{i=1}^{p} C_i = E$

n est nilpotent :

Pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $n(C_i) \subset C_i$ car $u(C_i) \subset C_i$.

Donc pour tout $x \in C_i$, $n^{m_i}(x) = (u - \lambda_i \operatorname{Id})^{m_i}(x) = 0$

Prenons alors $M = \max_{i \in [\![1,p]\!]}(m_i)$. On a alors $\forall i \in [\![1,p]\!], (n_{|C_i})^M = 0$, et comme $\bigoplus_{i=1}^{p} C_i = E$, on a $n^M = 0$.

On va chercher maintenant $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\tilde{P}(u) = d$, c'est-à-dire tel que $\forall j \in [\![1,p]\!], \tilde{P}(u)_{|C_j} = \lambda_j \operatorname{Id}_{C_j}$

D'après le théorème de Bezout, il existe $A_1, \dots A_p$ tels que $\sum_{i=1}^{p} A_i R_i = 1$, où $R_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p} (X - \lambda_j)^{m_j}$.

Prenons alors $P = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j A_j R_j$. Alors $\tilde{P}(u) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \tilde{A}_j(u) \circ \tilde{R}_j(u)$.

Si $x \in C_k$ $(k \in [\![1,p]\!])$, $(u - \lambda_k \operatorname{Id})^{m_k}(x) = 0$, donc pour $j \neq k$, $\tilde{R}_j(u)(x) = 0$

Donc $\tilde{P}(u)(x) = \lambda_k \tilde{A}_k(u) \circ \tilde{R}_k(u)(x)$

Or, on a $\operatorname{Id}_E = \sum_{i=1}^{p} \tilde{A}_i(u) \circ \tilde{R}_i(u)$. Donc pour $x \in C_k$, $x = \tilde{A}_k(u) \circ \tilde{R}_k(u)(x)$.

Ce qui donne $\forall x \in C_k, \tilde{P}(u)(x) = \lambda_k x$.

Ainsi, $\tilde{P}(u)$ et d coïncident sur tous les $C_k, k \in [\![1,p]\!]$. Donc $\tilde{P}(u) = d$

Comme $u = d + n$ par construction, on a $n = \tilde{Q}(u)$ avec $Q = X - P$

Remarque :

Le théorème permet parfois de ramener l'étude générale des endomorphismes à d'une part celle des endomorphismes diagonalisables et d'autre part celle des endomorphismes nilpotents.

La décomposition est unique dans le sens suivant :

Si $u = d_1 + n_1 = d_2 + n_2$, avec $\begin{cases} d_1 \circ n_1 = n_1 \circ d_1 \\ d_2 \circ n_2 = n_2 \circ d_2 \end{cases}$, alors $\begin{cases} d_1 = d_2 \\ n_1 = n_2 \end{cases}$

(Utiliser la diagonalisation simultanée, cf. section suivante C))

H) Applications topologiques : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

- Le déterminant est continu sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, car polynomial en les coefficients.

  Conséquence : $\mathscr{GL}_n(\mathbb{K}) = \det^{-1} \mathbb{K}^*$ est ouvert.
- La fonction $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \chi_A \in \mathbb{K}_n[X]$ est continue.

  En effet : $\chi_A = (-1)^n(X^n - \alpha_{n-1}(A)X^{n-1} + \cdots + \alpha_0(A)(-1)^n)$, avec $\alpha_{n-1}(A) = \text{Tr}(A)$, $\alpha_0(A) = \det(A)$

  Et $\alpha_j(A)$ est un polynôme en les coefficients de A.

  Ainsi, $\forall j \in [\![0, n-1]\!], A \mapsto \alpha_j(A)$ est continu.

  Comme ce sont (à peu près) les coordonnées de χ_A dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$, $A \mapsto \chi_A$ est continu.

  Cependant, $A \mapsto \min_A$ n'est pas continu, par exemple :

  On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1/n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

  Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, \min_{A_n} = X^2$

  Mais $\lim_{n\to+\infty} A_n = 0$, et $\min_0 = X$.

Théorème (hors programme) :

- $\mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

En effet : soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, posons $A_p = A - \frac{1}{p}I_n$.

On a alors $\lim_{p\to+\infty} A_p = A$

De plus, $A_p \notin \mathscr{GL}_n(K) \iff \frac{1}{p} \in \text{sp}(A)$

Comme $\text{sp}(A)$ est fini, il existe N tel que $\forall p \geqslant N, \frac{1}{p} \notin \text{sp}(A)$

Donc $A = \lim\limits_{\substack{p\to+\infty \\ p\geqslant N}} A_p \in \overline{\mathscr{GL}_n(\mathbb{K})}$

Exemples

- Exprimer $\text{com}(AB)$ avec $\text{com}(A)$ et $\text{com}(B)$ pour $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$

  Si $A, B \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{C})$, alors $AB \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{C})$. Donc :

$$\text{com}(AB) = \det(AB) \times {}^t((AB)^{-1}) = \det A \times \det B \times {}^t(A^{-1}) \times {}^t(B^{-1}) \,\text{com}(A) \times \text{com}(B) \tag{7.80}$$

  Cas général :

  Les deux membres de l'égalité précédente sont des fonctions continues (car polynomiales) de A et B, donc si $A_p \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{C})$ tend vers A et si $B_p \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{C})$ tend vers B, on a $A_pB_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} AB$, et :

$$\text{com}(AB) = \lim_{p\to+\infty} \text{com}(A_pB_p) = \lim_{p\to+\infty} \text{com}(A_p)\,\text{com}(B_p) = \text{com}(A)\,\text{com}(B) \tag{7.81}$$

- L'ensemble des matrices $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisables à valeurs propres simples est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ (faux pour $\mathbb{R}$)

  Démonstration :

  Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Alors A est trigonalisable, disons $A = PTP^{-1}$ où $T \in T_n^+(\mathbb{C})$

  On a $T = \begin{pmatrix} t_{1,1} & & t_{i,j} \\ & \ddots & \\ (0) & & t_{n,n} \end{pmatrix}$

  Posons $A(p) = P \begin{pmatrix} t_{1,1} + \frac{1}{p} & & t_{i,j} \\ & \ddots & \\ (0) & & t_{n,n} + \frac{n}{p} \end{pmatrix} P^{-1}$

  Alors les valeurs propres de $A(p)$ sont les $t_{i,i} + \frac{i}{p}, i \in [\![1, n]\!]$

  Pour que $A(p)$ ait une valeur propre au moins double, il faut qu'il existe i j avec $i \neq j$, tels que $t_{i,i} + \frac{i}{p} = t_{j,j} + \frac{j}{p}$, ce qui est impossible si $t_{i,i} = t_{j,j}$, et il y a au plus une valeur de p possible sinon.

  Ainsi, l'ensemble des entiers p tels que $A(p)$ a une valeur propre multiple est fini, donc il existe N tel que pour tout $p \geqslant N$, $A(p)$ a n valeurs propres simples, donc $A(p)$ est diagonalisable à valeurs propres simples à partir du rang N.

  Comme de plus $\lim_{p\to+\infty} A_p = A$, A est dans l'adhérence de l'ensemble des matrices diagonalisables à valeurs propres simples.

- L'adhérence de l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices réelles trigonalisables.

  En effet : La même démonstration que précédemment montre déjà que :

  $$T_n^+(\mathbb{R}) \subset \overline{\{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), A \text{ est diagonalisable}\}} \tag{7.82}$$

  Montrons maintenant que $T_n^+(\mathbb{R})$ est fermé.

  Lemme :

  L'ensemble des polynômes unitaires de degré n réels scindés dans $\mathbb{R}$ est fermé dans $\mathbb{R}_n[X]$.

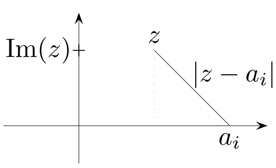
  Conséquence de lemme Pour une suite $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de $T_n^+(\mathbb{R})$ qui converge vers $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors par continuité de $A \mapsto \chi_A$, $\chi_{A_p} \to \chi_B$. Donc χ_B est scindé d'après le lemme, et B est trigonalisable, donc $T_n^+(\mathbb{R})$ est fermé.

  Démonstration (du lemme) :

  Astuce : Un polynôme P unitaire de $\mathbb{R}_n[X]$ est scindé si et seulement si $\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geqslant |\operatorname{Im}(z)|^n$

  En effet, soit $P = \prod_{i=1}^n (X - a_i) \in \mathbb{R}_n[X]$

  Pour $z \in \mathbb{C}$, on a $|P(z)| = \prod_{i=1}^n |z - a_i|$, et $|z - a_i| \geqslant |\operatorname{Im}(z)|$, d'où $|P(z)| \geqslant |\operatorname{Im}(z)|^n$:

  Si $\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geqslant |\operatorname{Im}(z)|^n$, alors $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = 0 \implies \operatorname{Im}(z) = 0 \implies z \in \mathbb{R}$

  Donc P est scindé dans $\mathbb{R}[X]$

Soit maintenant une suite $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de polynômes scindés unitaires de $\mathbb{R}_n[X]$ qui converge vers Q.

Alors $\forall z \in \mathbb{C}, P_k(z) \to Q(z)$

Donc $\forall z \in \mathbb{C}, |Q(z)| \geqslant |\operatorname{Im}(z)|^n$ et Q est scindé.

Remarque :

- Les méthodes topologiques permettent de prouver des identités matricielles valables sur tout anneau.

Exemple (Autre démonstration du théorème de Cayley Hamilton) :

1. Pour tout corps $\mathbb{K}$ et toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable, $\tilde{\chi}_A(A) = 0$

   En effet, $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, alors $\chi_A = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - X)$.

   Or, $\forall R \in \mathbb{K}[X], \tilde{R}(A) = P\tilde{R}(D)P^{-1} = P \begin{pmatrix} R(\lambda_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & R(\lambda_n) \end{pmatrix} P^{-1}$

   Donc avec $R = \chi_A$, on obtient $\tilde{R}(A) = 0$

2. Avec $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: l'ensemble des matrices $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisables est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

   On peut montrer sans le théorème de Cayley–Hamilton que si χ_A est scindé, alors A est trigonalisable.

   Puis montrer que si A (réelle ou complexe) est trigonalisable, A est limite d'une suite (A_p) de matrices diagonalisables à valeurs propres deux à deux distinctes.

3. On doit montrer que le théorème de Cayley–Hamilton est vrai dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$,

   C'est-à-dire que $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}), \tilde{\chi}_A(A) = 0$

   Or, la matrice $\tilde{\chi}_A(A)$ est une matrice complexe dont les coefficients sont des fonctions continues (car polynomiales) des coefficients de A.

   Soit alors A_p une suite de matrices diagonalisables qui converge vers A.

   Alors, par continuité, $\tilde{\chi}_A(A) = \lim_{p\to+\infty} \tilde{\chi}_{A_p}(A_p) = \lim_{p\to+\infty} 0 = 0$

4. Prolongement des identités algébriques :

   Si $P \in \mathbb{Z}[X_1, \dots X_n]$ est tel que $\forall (z_1, \dots z_n) \in \mathbb{C}^n, P(z_1, \dots z_n) = 0$, alors $P = 0$

   (On peut mettre un corps $\mathbb{K}$ quelconque infini à la place de $\mathbb{C}$)

   En effet, montrons par récurrence que

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall P \in \mathbb{Z}[X_1, \dots X_n], (\forall (z_1, \dots z_n) \in \mathbb{K}^n, P(z_1, \dots z_n) = 0) \implies P = 0 \tag{7.83}$$

   Pour $n = 1$: ok ; $P \in \mathbb{Z}[X]$

   Soit $n \geqslant 2$, supposons la propriété vraie pour $n-1$.

   Soit $P \in \mathbb{Z}[X_1, \dots X_n]$, supposons que $\forall (z_1, \dots z_n) \in \mathbb{K}^n, P(z_1, \dots z_n) = 0$

   P s'écrit $P = \sum_{k=0}^d Q_k(X_1, \dots X_{n-1})X_n^k$

   Pour $z_1, \dots z_{n-1} \in \mathbb{K}^{n-1}$ fixés, on a alors $\forall x_n \in \mathbb{K}, \sum_{k=0}^d Q_k(z_1, \dots z_{n-1})x_n^k = 0$

   Donc le polynôme $\sum_{k=0}^d Q_k(z_1, \dots z_{n-1})X^k \in \mathbb{K}[X]$ a une infinité de racines, donc

   $$\forall z_1, \dots z_{n-1} \in \mathbb{K}^{n-1}, \forall k \in [\![0, d]\!], Q_k(z_1, \dots z_{n-1}) = 0 \tag{7.84}$$

   Donc par hypothèse de récurrence, $\forall k \in [\![0, d]\!], Q_k = 0$, et donc $P = 0$ ce qui achève la récurrence.

5. Preuve du théorème de Cayley–Hamilton pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$:

   Soit $A = (X_{i,j})_{\substack{i\in[\![1,n]\!]\\ j\in[\![1,n]\!]}} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z}[X_{i,j}]_{\substack{i\in[\![1,n]\!]\\ j\in[\![1,n]\!]}})$

   Soient $k, l \in [\![1,n]\!]$.

   On a $(\tilde{\chi}_A(A))_{k,l} = P((X_{i,j})_{\substack{i\in[\![1,n]\!]\\ j\in[\![1,n]\!]}}) \in \mathbb{Z}[X_{i,j}]_{\substack{i\in[\![1,n]\!]\\ j\in[\![1,n]\!]}}$

   On sait que pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $\tilde{\chi}_A(A) = 0$

   Donc $\forall (a_{i,j})_{\substack{i\in[\![1,n]\!]\\ j\in[\![1,n]\!]}} \in \mathbb{C}^{n^2}, P((a_{i,j})_{\substack{i\in[\![1,n]\!]\\ j\in[\![1,n]\!]}}) = 0$. Donc $P = 0$

   Ceci étant vrai pour tous $k, l \in [\![1,n]\!]$, on a $\tilde{\chi}_A(A) = 0$.

   Conséquence :

   Soit $\mathbb{K}$ un anneau commutatif, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $A = (x_{i,j})_{\substack{i\in[\![1,n]\!]\\ j\in[\![1,n]\!]}}$

   $\tilde{\chi}_A(A)$ est obtenu en remplaçant les $X_{i,j}$ par $x_{i,j}$. Donc $\tilde{\chi}_A(A) = 0$

- Cas d'une matrice nilpotente :

Théorème :

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) A est nilpotente

(2) $A^n = 0$

(3) A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & & (X) \\ & \ddots & \\ (0) & & 0 \end{pmatrix}$

(4) $\chi_A = (-X)^n$

(5) (Uniquement si $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle – $\chi_{\mathbb{K}} = 0$) $\forall k \in [\![1,n]\!], \mathrm{Tr}(A^k) = 0$

Démonstration :

(1) $\implies$ (2) Soit p l'indice de nilpotence de A.

Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $A^{p-1}X \neq 0$

Alors $(X, AX, \dots A^{p-1}X)$ est libre.

En effet : Soient $\lambda_0, \dots \lambda_{p-1} \in \mathbb{K}$, supposons que $\lambda_0 X + \lambda_1 AX + \cdots \lambda_{p-1}A^{p-1}X = 0$

Alors en multipliant par A^{p-1}, on obtient $\lambda_0 A^{p-1}X = 0$ et donc $\lambda_0 = 0$ etc.

Donc $p \leqslant n$, et $A^n = 0$

(2) $\implies$ (3) X^n est annulateur, scindé donc A est trigonalisable avec des valeurs propres qui sont racines de X^n. Donc A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & & X \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

(3) $\implies$ (4) clair.

(4) $\implies$ (1) c'est le théorème de Cayley–Hamilton.

On suppose maintenant $\chi_{\mathbb{K}} = 0$.

(1) $\implies$ (5) Soit A une matrice nilpotente.

Alors $A = P \begin{pmatrix} 0 & & X \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$ où $P \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$.

Donc $\forall k \in \mathbb{N}, A^k = P \begin{pmatrix} 0 & & X \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}^k P^{-1}$ et $\mathrm{Tr}(A^k) = 0$

(On n'a pas utilisé le fait que $\chi_{\mathbb{K}} = 0$)

(5) $\Longrightarrow$ (1) Montrons le résultat par récurrence sur n :

Pour $n = 1$: clair (la seule matrice de trace nulle est (0))

Soit $n \geqslant 2$, supposons le résultat vrai pour $n - 1$.

Montrons déjà que 0 est valeur propre de A :

On a $\chi_A = (-1)^n(X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0)$

D'après le théorème de Cayley–Hamilton, $A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_0 I_n = 0$

Donc $\mathrm{Tr}(A^n) + a_{n-1}\mathrm{Tr}(A^{n-1}) + \cdots + a_0 \mathrm{Tr}(I_n) = 0$

Donc $na_0 = 0$, soit $a_0 = 0$ (on est en caractéristique nulle)

Donc $\chi_A(0) = 0$, et 0 est valeur propre de A.

Soit $\vec{v}_1$ un vecteur propre associé à 0, qu'on complète en une base $(\vec{v}_1, \dots \vec{v}_n)$ de E.

Alors A est semblable à une matrice de la forme $\left(\begin{array}{c|c} 0 & l \\ \hline \vdots & \\ 0 & B \end{array}\right)$ où $B \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{K})$.

Donc $\forall k \geqslant 1, \mathrm{Tr}(A^k) = \mathrm{Tr}(B^k) = 0$.

Donc par hypothèse de récurrence, B est nilpotente et $\chi_B = (-X)^{n-1}$

Or, $\chi_A = (-X)(-X)^{n-1}$, donc $\chi_A = (-X)^n$ et A est nilpotente.

IV Sous-espaces stables et formes réduites

On considère un corps $\mathbb{K}$, E un $\mathbb{K}$-ev quelconque (de dimension finie à partir du C))

A) Sous-espaces stables, endomorphismes restreints

- **Définition :**

  On dit qu'un sous-espace F de E est stable par $u \in \mathscr{L}(E)$ si $u(F) \subset F$.

  Dans ce cas, $u_{|F}$ induit un endomorphisme de F.

Remarque :

Pour tout sous-espace vectoriel F de E, $u_{|F}$ induit un endomorphisme de F si et seulement si $u(F) \subset F$.

Propriétés :

- (1) Une intersection, une somme de sous-espaces stables est stable.

  (2) Tout sous-espace d'un espace propre d'un endomorphisme est stable (réciproque fausse)

  (3) Une droite est stable si et seulement si elle est engendrée par un vecteur propre.

Démonstration :

(1), (2) ok

(3) Si $D = \mathbb{K}\vec{v}$ est stable pour un certain $\vec{v} \neq \vec{0}$, alors $u(\vec{v}) \in D$, donc $u(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$, et $\vec{v}$ est vecteur propre.

Réciproquement, si $u(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$, alors $\forall \vec{x} = \mu\vec{v} \in D, u(\vec{x}) = u(\mu\vec{v}) = \lambda(\mu\vec{v}) = \lambda\vec{x}$

- Éléments propres de la restriction d'un endomorphisme à un sous-espace stable

Théorème :

Soit $u \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E)$, F stable par u. Alors :

1. $\forall\lambda \in \mathbb{K}, \ker(u_{|F} - \lambda\,\mathrm{Id}_F) = \ker(u - \lambda\,\mathrm{Id}) \cap F$
2. $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de $u_{|F}$ si et seulement si λ est valeur propre de u et $\ker(u-\lambda\,\mathrm{Id})\cap F \neq \{0\}$
3. Pour λ valeur propre de $u_{|F}$, $E_\lambda(u_{|F}) = E_\lambda(u) \cap F$

Démonstration :

...

- Polynômes en $u_{|F}$:

Théorème :

Soit $u \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E)$, F stable par u. Alors pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, F est stable par $\tilde{P}(u)$ et $\tilde{P}(u)_{|F} = \tilde{P}(u_{|F})$

Corollaire :

Tout polynôme annulateur de u est annulateur de $u_{|F}$.

Si u admet un polynôme minimal $\min_u$, alors $u_{|F}$ en admet un, qui divise $\min_u$.

Démonstration (du théorème) :

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on compare $(u_{|F})^k$ et $(u^k)_{|F}$

On montre par récurrence que $(u_{|F})^k = (u^k)_{|F}$ car F est stable par u.

Puis par linéarité, le résultat est valable pour tout polynôme.

Démonstration (du corollaire) :

$\tilde{P}(u) = 0$, alors $\tilde{P}(u_{|F}) = \tilde{P}(u)_{|F} = 0$

En particulier, si $P = \min_u$, on a $\tilde{P}(u_{|F}) = 0$

Donc $\min_{u_{|F}} | P = \min_u$

B) Exemples de sous-espaces stables

- Existence de sous-espaces stables non triviaux en dimension finie :

Théorème :

1. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (ou algébriquement clos), tout endomorphisme en dimension $n \geqslant 1$ admet au moins une droite stable.
2. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, tout endomorphisme en dimension $n \geqslant 1$ admet au moins un sous-espace stable de dimension 1 ou 2.

Intérêt du théorème : permet de démarrer les récurrences.

Démonstration :

Soit $u \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E)$, E étant de dimension finie $n \geqslant 1$.

Alors u admet un polynôme minimal μ et $\deg \mu \geqslant 1$.

- ◇ Si μ admet au moins une racine λ, alors λ est valeur propre de u.

  Si on note $\vec{v}$ un vecteur propre associé à λ, la droite $\mathbb{K}\vec{v}$ est stable par u.

- ◇ Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et si μ n'a pas de racine réelle, soit $X^2 + aX + b$ un facteur irréductible de μ ($\Delta = a^2 - 4b < 0$). Alors $u^2 + au + b$ n'est pas injectif.

  (En effet, si $\mu = R \times (X^2 + aX + b)$, alors $0 = (u^2 + au + b\,\mathrm{Id}) \circ \underbrace{\tilde{R}(u)}_{\substack{\neq 0 \\ \text{car } \mu \text{ est} \\ \text{minimal}}}$).

  Soit alors $\vec{v} \neq \vec{0}$ tel que $(u^2 + au + b\,\mathrm{Id})(\vec{v}) = 0$

  On pose $F = \mathrm{Vect}(\vec{v}, u(\vec{v}))$

  Alors F est un plan car $(\vec{v}, u(\vec{v}))$ est libre (sinon $\vec{v}$ serait valeur propre et μ aurait une racine réelle)

  Et F est stable par u car $u(\vec{v}) \in F$ et $u(u(\vec{v})) = -b\vec{v} - au(\vec{v}) \in F$.

- Hyperplans stables en dimension finie :

Lemme :

Soit $u \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E)$, E étant de dimension n finie. Soit H un hyperplan de E.

On introduit $\varphi \in E^*\backslash\{0\}$ tel que $H = \ker \varphi$.

Alors :

1. H est stable par u si et seulement si il existe λ tel que $\varphi \circ u = \lambda\varphi$.
2. Autrement dit, si $A = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u) \in M_n(K)$ et $L = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K})$, H est stable par u si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que ${}^tA \times {}^tL = \lambda {}^tL$.

Démonstration :

1. Si $\varphi \circ u = \lambda\varphi$ pour $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\forall x \in \ker \varphi, \varphi \circ u(x) = \lambda\varphi(x) = 0$.

   Donc $u(x) \in H = \ker \varphi$

   Inversement, supposons que $H = \ker \varphi$ est stable par u.

   Considérons $G = \ker(\varphi \circ u)$.

   - ◇ Si $\varphi \circ u = 0_{E^*}$, c'est-à-dire si $G = E$, alors $\varphi \circ u = \lambda\varphi$ avec $\lambda = 0$
   - ◇ Si $\varphi \circ u = \psi \neq 0_{E^*}$, alors $G = \ker \psi$ donc G est un hyperplan de E.

   De plus, G contient H. En effet, pour tout $x \in H$, on a $u(x) \in H$ car H est stable par u, et donc $\varphi(u(x)) = 0$, c'est-à-dire $\psi(x) = 0$, d'où $x \in G$.

   Comme on est en dimension finie, on a ainsi $G = H$.

   Donc $\varphi \circ u$ et φ sont proportionnelles, ce qui établit le résultat.

2. Avec les notations de l'énoncé,

   $\varphi \circ u = \lambda\varphi$ équivaut à $L \times A = \lambda L$, c'est-à-dire aussi à ${}^tA \times {}^tL = \lambda {}^tL$.

Intérêt : permet de déterminer les hyperplans stables.

- Stabilité et commutation :

Théorème :

Soient u et v deux éléments de $\mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$

Alors $\ker u$ et $\operatorname{Im} u$ sont stables par v.

Plus généralement, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $\ker(\tilde{P}(u))$ et $\operatorname{Im}(\tilde{P}(u))$ sont stables par u.

En particulier, les sous-espaces propres de u sont stables par v.

Démonstration :

Pour $x \in \ker u$, alors $u(v(x)) = v(u(x)) = 0$ donc $v(x) \in \ker u$

Pour $x \in \operatorname{Im} u$, il existe $y \in E$ tel que $x = u(y)$

Alors $v(x) = v(u(y)) = u(v(y)) \in \operatorname{Im} u$

Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, on a $\tilde{P}(u) \circ v = v \circ \tilde{P}(u)$. En effet, c'est vrai pour $P = X^k, k \in \mathbb{N}$ par récurrence, puis par linéarité pour $P \in \mathbb{K}[X]$.

On peut ensuite appliquer le résultat précédent à $\tilde{P}(u)$ et v.

On a $E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda \operatorname{Id})$, stable par v : il suffit de prendre $P = X - \lambda$

- Autres exemples :
  - $D \colon P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P' \in \mathbb{R}[X]$

    $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{R}_n[X]$ sont stables, et ce sont les seuls :

    Si P de degré d est élément de F, et si F est stable par D, alors $P, P', \dots P^{(d)} \in F$. Mais $(P, P', \dots P^{(d)})$ est une base de $\mathbb{R}_d[X]$. Donc $\mathbb{R}_d[X] \subset F$.

    Donc F est de la forme $\mathbb{R}_d[X]$.

    Parmi ces espaces stables, seul $\mathbb{R}_0[X]$ est propre.
  - Rotation de $\mathbb{R}^2$ d'angle θ. $\{0\}$ et $\mathbb{R}^2$; si $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$, c'est tout.

C) Cas de la dimension finie

Base adaptée à un sous-espace stable

Théorème :

1. Soit $u \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E)$, E étant de dimension finie n.

   Soit F un sous-espace stable par u, de dimension p.

   Soit $(e_1, \dots e_p)$ une base de F, qu'on complète en une base $(e_1, \dots e_n)$ de E.

   Alors $\operatorname{mat}_{(e_1,e_2,\dots e_n)}(u) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} & \begin{array}{c} p \\ n-p \end{array} \\ \begin{array}{cc} p & n-p \end{array} & \end{array}$ avec $A = \operatorname{mat}_{(e_1,\dots e_p)}(u_{|F})$

   En particulier, $\chi_u = \chi_A \times \chi_C$, donc $(\chi_u)_{|F} = \chi_A$ divise χ_u

2. Inversement, si $\operatorname{mat}_{(e_1,e_2,\dots e_n)}(u) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} & \begin{array}{c} p \\ n-p \end{array} \\ \begin{array}{cc} p & n-p \end{array} & \end{array}$, alors $F = \operatorname{Vect}(e_1, \dots e_p)$ est stable par u.

Démonstration :

Soit $A = (a_{i,j})$

On a, pour $j \leqslant p$, $u(e_j) = (u_{|F})(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{i,j} e_i$. Donc la j-ième colonne de $\mathrm{mat}_{(e_1,e_2,\dots e_n)}(u)$ est $\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{p,j} \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$. Inversement, pour $j \leqslant p$, on a $u(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{i,j} e_i \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots e_p) = F$, donc F est stable par u.

Diagonalisation par blocs

Théorème :

On suppose que $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$ où les F_i sont stables par u.

Soit, pour $i \in [\![1, p]\!]$, $\mathscr{B}_i$ une base de F_i, on note $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_1, \dots \mathscr{B}_p)$

Alors $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_p \end{pmatrix}$, où $A_j = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_j}(u_{|F_j})$.

De plus, $\chi_u = \prod_{i=1}^{p} \chi_{u_{|F_i}}$, et $\min u = PPCM((\min(u_{|F_i}), i = 1..p)$.

Démonstration :

Le premier point est clair

Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, on a $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\tilde{P}(u)) = \tilde{P}(\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u)) = \begin{pmatrix} \tilde{P}(A_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \tilde{P}(A_p) \end{pmatrix}$

Donc l'idéal annulateur de u est :

$$\left\{P \in \mathbb{K}[X], \forall j, \tilde{P}(u_{|F_j}) = 0\right\} = \bigcap_{i=1}^{p} \left\{P \in \mathbb{K}[X], \tilde{P}(u_{|F_j}) = 0\right\} = \bigcap_{i=1}^{p} \min(u_{|F_j}) \cdot \mathbb{K}[X] \tag{7.85}$$

C'est l'idéal engendré par le ppcm des $\min(u_{|F_j})$.

Restriction d'un endomorphisme diagonalisable

Lemme :

Si u est diagonalisable, et si F est stable par u, alors $u_{|F}$ est diagonalisable.

Démonstration :

Soit P annulateur de u scindé à racines simples (il en existe car u est diagonalisable)

On a alors $\tilde{P}(u_{|F}) = \tilde{P}(u)_{|F} = 0$, donc P est annulateur de $u_{|F}$ et scindé à racines simples, donc $u_{|F}$ est diagonalisable.

Sous-espaces stables par un endomorphisme diagonalisable

Remarque :

Soit u diagonalisable, de valeurs propres $\lambda_1, \dots \lambda_p$ deux à deux distinctes, et pour $j = 1..p$, $F_j = E_{\lambda_j}(u)$, sous-espace propre de u associé à λ_j.

Alors tout sous-espace G_j d'un sous-espace propre F_j est stable par u car $u_{|G_j} = \lambda_j \mathrm{Id}_{G_j}$

Si, pour tout $j \in [\![1,p]\!]$, G_j est un sous-espace de F_j, alors $F = G_1 \oplus \dots \oplus G_p$ est stable par u.

Réciproquement, tout sous-espace stable par u est du type ci-dessus :

Soit F un espace stable par u.

On pose $v = u_{|F}$. Ainsi, $v \in \mathscr{L}(F)$

De plus, v est diagonalisable (vu au point précédent)

Ainsi, $F = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{sp}(v)} E_\lambda(v) = \left(\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)} E_\lambda(u)\right) \cap F = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{sp}(v)} \underbrace{(E_\lambda(u) \cap F)}_{\text{sous-espace de } F_\lambda}$

Cas particulier :

On suppose u diagonalisable en dimension n avec n valeurs propres distinctes.

Soient $D_1, D_2, \dots D_n$ les droites propres.

Les sous-espaces de D_j sont exactement $\{0\}$ et D_j, donc u admet un nombre fini de sous-espaces stables, à savoir 2^n

Remarque :

Pour $n = 2$, et D_1, D_2 deux droites distinctes de $\mathbb{R}^2$

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un sous-espace F de $\mathbb{R}^2$ vérifie

$\underbrace{F}_{=F \cap (D_1 \oplus D_2)} = F \cap D_1 \oplus F \cap D_2$ est que F soit $\{0\}, D_1, D_2$ ou $\mathbb{R}^2$.

Diagonalisation simultanée (Hors programme)

- Problème :

  Étant donnée $(u_\alpha)_{\alpha \in I}$ une famille de $\mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E)$ (E étant de dimension finie), existe-t-il une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle pour tout $\alpha \in I$, $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u_\alpha)$ est diagonale ?

- Déjà, une condition nécessaire est que les u_α soient diagonalisables individuellement.

- Il faut aussi que $\forall \alpha, \beta \in I, u_\alpha \circ u_\beta = u_\beta \circ u_\alpha$. En effet, si $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u_\alpha) = D_\alpha$ et $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u_\beta) = D_\beta$ sont diagonales, alors $D_\alpha D_\beta = D_\beta D_\alpha$, donc $u_\alpha \circ u_\beta = u_\beta \circ u_\alpha$.

- La réciproque est vraie.

  En effet : On suppose que $(u_\alpha)_{\alpha \in I}$ vérifie :

  Pour tout $\alpha \in I$, u_α est diagonalisable, et $\forall \alpha, \beta \in I, u_\alpha \circ u_\beta = u_\beta \circ u_\alpha$

  - Soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$ diagonalisables, supposons que $u \circ v = v \circ u$

    Pour $E_\lambda(u)$ sous-espace propre de u, $E_\lambda(u)$ est stable par v.

    On considère $v_\lambda = v_{|E_\lambda(u)}$, restriction de v diagonalisable donc diagonalisable.

    Soit $\mathscr{B}_\lambda$ une base de $E_\lambda(v)$ constituée de vecteurs propres de v_λ

    Chaque vecteur de $\mathscr{B}_\lambda$ est propre pour v_λ donc pour v, mais aussi pour u puisque $\mathscr{B}_\lambda \subset E_\lambda(u)$.

    Soit alors $\mathscr{B} = \bigcup_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)} \mathscr{B}_\lambda$. Comme $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{sp}(v)} E_\lambda(v)$ et comme $\mathscr{B}$ est une base de $\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{sp}(v)} E_\lambda(v)$, $\mathscr{B}$ est une base de E, et donc $\mathscr{B}$ est une base de diagonalisation simultanée de u et v.

  - Maintenant :

    On suppose I de cardinal fini p ; soit $(u_\alpha)_{\alpha \in I}$ une famille de $\mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E)$ vérifiant les propriétés.

    On peut supposer que $I = [\![1,p]\!]$.

    On va montrer alors le résultat par récurrence sur p.

Pour $p = 2$, le résultat vient d'être montré.

Soit λ une valeur propre de u_p.

Alors $E_\lambda = E_\lambda(u_p)$ est stable par les $u_i, i = 1..p-1$

De plus, les $(u_i)_{|E_\lambda}$ commutent deux à deux et sont diagonalisables.

Donc par hypothèse de récurrence, il existe une base $\mathscr{B}_\lambda$ de E_λ dans laquelle les $(u_i)_{|E_\lambda}, i = 1..p-1$ sont diagonaux (et $(u_p)_{|E_\lambda}$ est diagonale)

Ainsi, $\bigcup_{\lambda\in\mathrm{sp}(u_p)} \mathscr{B}_\lambda$ est une base de vecteurs propres communs à tous les $(u_i)_{i\in I}$ ce qui achève la récurrence.

- ◇ Si maintenant I est quelconque :

Comme on est en dimension finie, on peut prendre $(u_{\alpha 1}, \dots u_{\alpha_k})$ une base de $\mathrm{Vect}(u_\alpha)_{\alpha\in I}$

On applique alors ce qui précède à cette base, et on conclut par combinaison linéaire.

Unicité de la décomposition de Jordan–Dumford On reprend les hypothèses de 23.

Supposons que $u = d + n = d' + n'$, avec $d = P(u)$, $n = Q(u)$. d' commute avec n', donc avec u, donc avec $d = P(u)$. Donc $d - d'$ est diagonalisable (avec diagonalisation simultanée).

De même, $n \circ n' = n' \circ n$, donc $n - n'$ est nilpotente.

Ainsi, $d - d' = n' - n$ est diagonalisable et nilpotente, donc nulle.

D) Application à la trigonalisation

- Drapeaux de sous-espaces de E, où E est de dimension n finie :

  C'est une suite $F_0 = \{0\} \subsetneq F_1 \subsetneq \dots \subsetneq F_n = E$ de sous-espaces de E avec $\forall i \in [\![1, n]\!], \dim F_i = i$
- Base adaptée à un drapeau $F_0 \subsetneq F_1 \subsetneq \dots \subsetneq F_n = E$:

  C'est une base $(e_1, \dots e_n)$ de E telle que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $(e_1, \dots e_k)$ est une base de F_k

  On peut obtenir une telle base de la façon suivante :

  On pose $e_1 \in F_1 \backslash F_0$, puis $e_2 \in F_2 \backslash F_1$...
- Remarque sur les espaces euclidiens :

Proposition :

Soit E un $\mathbb{R}$-ev euclidien de dimension n, $F_0 = \{0\} \subsetneq F_1 \subsetneq \dots \subsetneq F_n = E$ un drapeau de E. Alors il existe une base orthonormée adaptée au drapeau.

En effet : Voir le procédé d'orthonormalisation de Gramm-Schmidt :

On prend $e_1 \in F_1 \backslash F_0$ unitaire, puis $e_2 \in F_2 \backslash F_1$ orthogonal à F_1 et unitaire...

- Drapeaux et trigonalisation :

Théorème :

Un endomorphisme u est trigonalisable si et seulement si il existe un drapeau constitué de sous-espaces stables par u.

De plus, la matrice de u dans une base adaptée à un tel drapeau est trigonale supérieure.

Démonstration :

Si u est trigonalisable, il existe une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots e_n)$ de E telle que :

$$\operatorname{mat}_{(e_1,\dots e_n)} u = \begin{pmatrix} t_{1,1} & & (t_{i,j}) \\ & \ddots & \\ 0 & & t_{n,n} \end{pmatrix} \tag{7.86}$$

Posons alors pour $j \in [\![1, n]\!], F_j = \operatorname{Vect}(e_1, \dots e_j)$

Alors cette suite est un drapeau, et pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $u(e_j) = \sum_{i=1}^{j} t_{i,j} e_i \in F_j$.

Donc F_j est stable par u.

Réciproquement, si $F_0 = \{0\} \subsetneq F_1 \subsetneq \dots \subsetneq F_n = E$ est un drapeau de sous-espaces stables et $(e_1, \dots e_n)$ une base adaptée à ce drapeau, alors :

$e_1 \in F_1$, donc $u(e_1) \in F_1 = \mathbb{K} e_1$

Donc e_1 est vecteur propre de u, $u(e_1) = t_{1,1} e_1$.

$e_2 \in F_2$, et F_2 est stable par u, donc $u(e_2) = t_{1,2} e_1 + t_{2,2} e_2$...

D'où ensuite $\operatorname{mat}_{(e_1,\dots e_n)} u = \begin{pmatrix} t_{1,1} & & (t_{i,j}) \\ & \ddots & \\ 0 & & t_{n,n} \end{pmatrix}$

E) Réduction de Jordan d'un endomorphisme trigonalisable et autres remarques (hors programme)

Problème Comment écrire qu'un endomorphisme trigonalisable n'est pas diagonalisable ?

Soit u un endomorphisme trigonalisable.

Ainsi, χ_u est scindé, disons $\chi_u = \prod_{i=1}^{p} (\lambda_i - X)^{m_i}$ où les λ_i sont deux à deux distincts.

Et donc $E = \bigoplus_{i=1}^{p} C_i$ où $C_i = \ker((u - \lambda_i \operatorname{Id})^{m_i})$.

Les C_i sont stables par u (car $(u - \lambda_i \operatorname{Id})^{m_i} \circ u = u \circ (u - \lambda_i \operatorname{Id})^{m_i}$)

Ainsi, u est diagonalisable si et seulement si $\forall i \in [\![1, p]\!], u_{|C_i}$ est diagonalisable.

Donc u n'est pas diagonalisable si et seulement si il existe $i \in [\![1, p]\!]$ tel que $u_{|C_i}$ n'est pas diagonalisable.

Or, $u_{|C_i} - \lambda_i \operatorname{Id}_{C_i}$ est nilpotent, puisque $(u - \lambda_i \operatorname{Id})_{|C_i}^{m_i} = 0$

Donc $v_i = (u - \lambda_i \operatorname{Id})_{|C_i}$ est nilpotent, non nul car $u_{|C_i} \neq \lambda_i \operatorname{Id}_{C_i}$ (u n'est pas diagonalisable)

On a donc $\{0\} \subsetneq \ker v_i \subsetneq \ker(v_i^2)$

Soit alors $x \in \ker v_i^2 \backslash \ker v_i$

Ainsi, x vérifie $(u - \lambda_i \operatorname{Id})^2(x) = 0$, c'est-à-dire $u^2(x) - 2\lambda_i u(x) + \lambda_i^2 x = 0$, et $u(x) \neq \lambda_i x$.

Intérêt : en posant $y = u(x) - \lambda_i x$, on a $y \in \ker(u - \lambda_i \operatorname{Id})$

Donc $u(y) = \lambda_i y$

Et par récurrence : $\forall n \geqslant 1, u^n(x) = n\lambda_i^{n-1} y + \lambda_i^n x$

Application Soit G un sous-groupe compact de $\mathscr{GL}_n(\mathbb{C})$. Alors tout élément de G est diagonalisable.

On considère la norme triple $|\!|\!| \ |\!|\!|$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Comme G est borné, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall h \in G, |\!|\!| h |\!|\!| \leqslant M$

Ainsi, pour tout $g \in G$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $|\!|\!| g^n |\!|\!| \leqslant M$

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, valeur propre de $g \in G$ (il en existe car χ_g est scindé : on est dans $\mathbb{C}$)

Et V de norme 1 associé à λ.

Alors $\|\|g^n\|\| = \sup_{\|X\| \leqslant 1} \|g^n X\| \geqslant \|g^n V\| = |\lambda|^n$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{Z}, |\lambda|^n \leqslant M$, donc $|\lambda| = 1$

Alors g est diagonalisable. En effet, sinon, comme χ_g est scindé, il existe une valeur propre λ et un vecteur v tels que $(g - \lambda \operatorname{Id})^2(v) = 0$ et $(g - \lambda \operatorname{Id})(v) \neq 0$.

Ainsi, en posant $w = (g - \lambda \operatorname{Id})(v)$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, g^n(v) = n\lambda^{n-1} w + \lambda^n v \tag{7.87}$$

Donc $\|g^n(v)\| = \|nw + \lambda v\| \sim_{+\infty} n\|w\|$, ce qui est impossible car $\|\|g^n\|\|$ est bornée par M.

Réduction de Jordan

Proposition :
Si $u \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E)$ est nilpotent, alors il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que : $\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \varepsilon_{n-1} \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

où $\varepsilon_i \in \{0; 1\}$

Démonstration :

- On va montrer par récurrence sur p indice de nilpotence de u la propriété suivante :

  Il existe des sous-espaces $(E_i)_{i \in [\![1,k]\!]}$ non nuls et stables par u tels que $E = \bigoplus_{i=1}^k E_i$, et tel que pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, il existe un vecteur x_i d'indice de nilpotence p_i pour lequel la famille $(x_i, u(x_i), \dots u^{p_i - 1}(x_i))$ est une base de (E_i).

  - ◇ Si $p = 1$, alors $u = 0$ et il suffit de prendre une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots e_n)$ de E et $E_i = \operatorname{Vect}(e_i)$.
  - ◇ Soit $p \in \mathbb{N}$, supposons la propriété vraie pour p. Soit u un endomorphisme nilpotent d'indice $p+1$. On considère $v = u_{|\operatorname{Im} u}$. v est nilpotent d'indice p. Il existe donc une famille $(F_i)_{i \in [\![1,k]\!]}$ telle que $\operatorname{Im} u = \bigoplus_{i=1}^k F_i$ et pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, il existe un vecteur $y_i = u(x_i)$ d'indice de nilpotence q_i tel que $(y_i, u(y_i), \dots u^{q_i - 1}(y_i)) = (u(x_i), u^2(x_i), \dots u^{q_i}(x_i))$ est une base de F_i.

    Alors la famille $\mathscr{F} = (u^j(x_i))_{\substack{i \in [\![1,k]\!] \\ j \in [\![0,q_i]\!]}}$ est libre dans E. En effet, supposons que

    $$\sum_{\substack{i \in [\![1,k]\!] \\ j \in [\![0,q_i]\!]}} \lambda_{i,j} u^j(x_i) = 0 \tag{7.88}$$

    En appliquant u, et en enlevant les termes nuls $u^{q_i + 1}(x_i)$, il reste :

    $$\sum_{\substack{i \in [\![1,k]\!] \\ j \in [\![0,q_i - 1]\!]}} \lambda_{i,j} u^{j+1}(x_i) = 0 \tag{7.89}$$

    Comme les $(u^j(x_i))_{\substack{i \in [\![1,k]\!] \\ j \in [\![1,q_i]\!]}}$ forment une base de $\operatorname{Im} u$, tous les termes $\lambda_{i,j}$ sont donc nuls pour $j < q_i$.

    Il reste donc $\sum_{i \in [\![1,k]\!]} \lambda_{i,q_i} u^{q_i}(x_i) = 0$, et donc les termes λ_{i,q_i} restant sont nuls également (car les $(u^{q_i}(x_i))_{i \in [\![1,k]\!]}$ forment une famille libre). Donc $\mathscr{F}$ est libre.

Enfin, $E = \text{Vect}(\mathscr{F}) + \ker u$ (ce n'est pas une somme directe !).

En effet, $u(\mathscr{F})$ engendre $\operatorname{Im} E$ (par construction), donc pour tout $x \in E$, $u(x)$ est combinaison linéaire d'éléments de $u(\mathscr{F})$, disons $u(x) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u(f_i)$ (où $f_i \in \mathscr{F}$). Donc $x = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i}_{\in \text{Vect}(\mathscr{F})} + \underbrace{(x - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i)}_{\in \ker u}$.

On peut donc compléter $\mathscr{F}$ en une base de E en prenant des éléments de $\ker u$, nilpotents d'indice 1, ce qui achève la récurrence.

- Dans une telle base, la matrice de u a donc bien la forme voulue.

Théorème :

Si, pour une matrice A, χ_A est scindé, alors A est semblable à une matrice de la forme $A' = \begin{pmatrix} M_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & M_p \end{pmatrix}$ où $M_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & \varepsilon_{j,1} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \varepsilon_{j,m_j-1} \\ & & & \lambda_j \end{pmatrix}$

Démonstration :

On part de la décomposition en sous-espaces caractéristiques :

$\mathbb{K}^n = \bigoplus_{j=1}^{p} C_j$ où $C_j = \ker(A - \lambda_j I_n)^{m_j}$

On applique ensuite le cas nilpotent à $u_j = u_{|C_j} - \lambda_j I_{C_j}$, qui est un endomorphisme nilpotent de C_j.

F) Réduction sur $\mathbb{R}$ ou réduction sur $\mathbb{C}$?

En pratique Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et si χ_A n'est pas scindé (dans $\mathbb{R}$), on se place dans $\mathbb{C}$ et on réduit dans $\mathbb{C}$.

Exemple important On suppose A diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et χ_A non scindé dans $\mathbb{R}$.

Comme χ_A est réel, on a $\forall \lambda \in \text{sp}_{\mathbb{C}}(A), \bar{\lambda} \in \text{sp}_{\mathbb{C}}(A)$, et $m_{\bar{\lambda}} = m_\lambda$.

On va diagonaliser A dans $\mathbb{C}$ méthodiquement :

1. Pour chaque valeur propre réelle α, on prend $\mathscr{B}_\alpha$ une base de vecteurs propres réels.
2. Pour chaque valeur propre non réelle λ, on prend $\mathscr{B}_\lambda = (v_0(\lambda), \dots v_m(\lambda))$ une base de vecteurs propres (complexe), et alors $\bar{\mathscr{B}}_\lambda = (\bar{v}_0(\lambda), \dots \bar{v}_m(\lambda))$ est une base de $\ker(A - \bar{\lambda} I_n)$.

   On prend alors comme base de vecteurs complexes :

$$\mathscr{B} = \bigcup_{\alpha \in \text{sp}_{\mathbb{R}}(A)} \mathscr{B}_\alpha \cup \bigcup_{\substack{\lambda \in \text{sp}_{\mathbb{C}}(A) \\ \text{non réel}}} (\mathscr{B}_\lambda \cup \bar{\mathscr{B}}_\lambda) \tag{7.90}$$

Proposition :

Si deux matrices *réelles* A et B sont semblables dans $\mathbb{C}$, alors elles sont semblables dans $\mathbb{R}$. (la réciproque est évidente)

Démonstration :

Déjà, il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $A = P^{-1}BP$

On peut écrire $P = P_1 + \boldsymbol{i}P_2$ où $P_1, P_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On a alors $PA = BP$, c'est-à-dire $(P_1 + \boldsymbol{i}P_2)A = B(P_1 + \boldsymbol{i}P_2)$

Donc $\begin{cases} P_1A = BP_1 \\ P_2A = BP_2 \end{cases}$

On a ainsi $\forall t \in \mathbb{R}, (P_1 + tP_2)A = B(P_1 + tP_2)$. On note, pour $t \in \mathbb{R}$, $S(t) = P_1 + tP_2$.

Alors il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $S(t) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.

En effet, $\det(S(X))$ est un polynôme à coefficients réels en X.

Et comme $\det(S(\boldsymbol{i})) \neq 0$, ce polynôme n'est pas le polynôme nul.

Il existe donc un réel t tel que $\det(S(t)) \neq 0$, c'est-à-dire tel que $S(t) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.

Et ainsi, $S(t)A = BS(t)$, et donc A et B sont semblables dans $\mathbb{R}$.

V Application de la réduction

A) Suites récurrentes linéaires

Problème On cherche les suites u telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+p} = a_0u_n + a_1u_{n+1} + \dots + a_{p-1}u_{n+p-1} \tag{7.91}$$

Où éventuellement $u_0, \dots u_p$ sont donnés.

On sait trouver u par les équations caractéristiques.

Autre méthode On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$

On a alors $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ a_0 & & & a_{p-1} \end{pmatrix}$

On reconnaît la matrice compagnon associée au polynôme $X^p - a_1 - a_1X - \dots - a_{p-1}X^{p-1}$, qui est aussi le polynôme caractéristique de (7.91)

Et on a alors $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^nX_0$

Pour trouver les u_n, il suffit donc de calculer les $A^n, n \in \mathbb{N}$.

B) Calcul de A^n pour une matrice A réelle

Méthode générale On réduit $A = PRP^{-1}$ avec si possible R trigonale voire diagonale, et on a alors $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PR^nP^{-1}$

Si A est diagonalisable On prend $(\vec{v}_1, \dots \vec{v}_p)$ une base de vecteurs propres, on note $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tel que $A\vec{v}_i = \lambda_i\vec{v}_i$

Remarque :

Avec les projecteurs spectraux $\pi_1, \dots \pi_p$, on a $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^n \pi_j$

D'où $\forall P \in \mathbb{R}[X], \tilde{P}(A) = \sum_{j=1}^{n} P(\lambda_j)\pi_j$

Calcul des π_j Si on note $P_{i_0} = \prod_{j \neq i_0} \frac{X-\lambda_{i_0}}{\lambda_j - \lambda_{i_0}}$, on a alors $\tilde{P}_{i_0}(A) = \pi_{i_0}$

Utilisation des polynômes annulateurs

Cas particulier Si $\chi_A = (\lambda_0 - X)^n$, alors d'après le théorème de Cayley–Hamilton, $A - \lambda_0 I_n$ est nilpotent.

Soit p tel que $(A - \lambda_0 I_n)^p = 0$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$A^k = (A - \lambda_0 I_n + \lambda_0 I_n)^k = \sum_{t=0}^{k} C_k^t \lambda_0^{k-t} (A - \lambda_0 I_n)^t = \sum_{t=0}^{p-1} C_k^t \lambda_0^{k-t} (A - \lambda_0 I_n)^t \tag{7.92}$$

($C_k^t = 0$ si $t \geqslant k$)

En général Soit M un polynôme annulateur de A.

La division euclidienne de X^k par M donne $X^k = Q_k M + R_k$

Et on a alors $A^k = \tilde{R}_k(A)$.

Comment obtenir R_k ?

Si $M = \prod_{i=1}^{p} (\lambda_i - X)$ où les λ_i sont deux à deux distincts (si A est diagonaliable),

on cherche R_k sous la forme $R_k = \sum_{i=0}^{p-1} a_i(k) X^i$

La relation $X^k = Q_k M + R_k$ donne $\forall i, \lambda_i^k = R_k(\lambda_i) = \sum_{j=0}^{p-1} a_j(k) \lambda_i^j$

On a ainsi un système de Vandermonde, qu'on résoud et on obtient les $a_i(k)$ puis R_k.

Dans le cas général, quittte à changer de corps, on peut supposer M scindé.

On écrit M sous la forme $M = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{\gamma_i}$ où les λ_i sont deux à deux distincts.

On note alors $\deg M = d = \sum_{i=1}^{r} \gamma_i$.

Ainsi,

$$X^k = MQ_k + \sum_{i=0}^{d-1} a_i(k) X^i \tag{7.93}$$

On a donc un système de r équations en les d inconnues $a_0(k), \dots a_d(k)$:

$$\forall i \in [\![1, r]\!], \sum_{j=0}^{d-1} a_j(k) \lambda_i^j = \lambda_i^k \tag{7.94}$$

Pour chaque $i \in [\![1, r]\!]$, comme λ_i est racine de M de multiplicité γ_i, on a $M(\lambda_i) = \dots = M^{(\gamma_i - 1)}(\lambda_i) = 0$

On dérive (7.93) $\gamma_i - 1$ fois et on remplace X par λ_i :

Pour tout $t \in [\![0, \gamma_i - 1]\!]$, on a $k \times (k-1) \cdots \times (k-t+1)\lambda_i^{k-t} = \sum_{j=t}^{d-1} j(j-1)\dots(j-t+1)\lambda_i^{k-t}$

Pour chaque racine λ_i, on a donc γ_i équations en les inconnues $a_j(k)$

On a donc un système à d équations, d inconnues, dont on admet qu'il est de Cramer.

On obtient ainsi les $a_j(k)$ et donc R_k, puis $A^k = R_k(A)$.

C) Équations et systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

- Équation scalaire
$$y^{(d)}(t) = \sum_{j=0}^{d-1} a_j y^{(j)}(t) + f(t) \tag{7.95}$$
Où $\forall j \in [\![1, d]\!], a_j \in \mathbb{R}$ et $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C} \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$.

  Si D est l'opérateur de dérivation,

  (7.95) $\iff P(D) = f$ où $P = X^d - \sum_{j=0}^{d-1} a_j X^j$

  - Méthode 1 : équation caractéristique

    Les solutions $t \mapsto e^{rt}$ de l'équation sans second membre sont caractérisées par $P(r) = 0$.
  - Méthode 2 : méthode matricielle

    On pose $Z = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(d-1)} \end{pmatrix}$. Ainsi, (7.95) $\iff Z' = AZ + B(t)$

    Où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ a_0 & \cdots & \cdots & a_{d-1} \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ f(t) \end{pmatrix}$

    Il faut ensuite résoudre le système, qu'on va résoudre dans un cas plus général.

- Pour un système
$$X'(t) = AX(t) + B(t) \tag{7.96}$$
où $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}/\mathbb{C})$, et $B : t \in I \mapsto B(t) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}/\mathbb{C})$ continue.

  On réduit d'abord $A = PRP^{-1}$ avec R diagonale ou trigonale supérieure réelle ou complexe.

  Ainsi, (7.96) $\iff X'(t) = PRP^{-1}X(t) + B(t)$

  On fait un changement d'inconnues $Y(t) = P^{-1}X(t)$

  Comme la matrice P est indépendante de t, X est de classe $\mathcal{C}^1$ si et seulement si Y l'est, et dans ce cas $Y'(t) = P^{-1}X'(t)$

  1. Si R est trigonale supérieure,
$$\begin{cases} y_1'(t) = \sum_{j=1}^{d} R_{1,j} y_j(t) + C_1(t) \\ y_i'(t) = \sum_{j=i}^{d} R_{i,j} y_j(t) + C_i(t) \\ y_n'(t) = R_{n,n} y_n(t) + C_n(t) \end{cases} \tag{7.97}$$
     Ce sont des équations du premier ordre à coefficients constants et 2^{nd} membre.

     On résoud $y_n' = R_{n,n} y_n + C_n$, puis on reporte dans l'équation précédente…

     Si R est diagonale, on a un système découplé de n équations indépendantes :
$$y_i'(t) = R_{i,i} y_i(t) + C_i(t) \tag{7.98}$$
  2. Cas diagonalisable :

Théorème :

Soit $(\vec{v}_1, \dots \vec{v}_n)$ une base de vecteurs propres de A où $A\vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i$.

La solution du problème de Cauchy (c'est-à-dire l'équation sans 2^{nd} membre) :

$$\begin{cases} X'(t) = A \times X(t) \\ X(t_0) = X_0 = \sum_{k=1}^n a_k \vec{v}_k \end{cases} \tag{7.99}$$

Est $X(t) = \sum_{k=1}^n a_k e^{\lambda_k (t-t_0)} \vec{v}_k$

Remarque :

Pour une équation avec le second membre $B(t) = \sum_{k=1}^n \beta_k(t)\vec{v}_k$, on résoud l'équation sans second membre et on utilise la méthode de variation des constantes, en cherchant les solutions $X(t)$ de $X' = AX + B$ sous la forme $X(t) = \sum_{j=1}^n z_j(t) e^{\lambda_i t}\vec{v}_j$ où $z_j \colon I \to \mathbb{K}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Alors $X'(t) = \sum_{j=1}^n (z_j'(t) + \lambda_j z_j(t)) e^{\lambda_j t}\vec{v}_j$

Donc $X'(t) - AX(t) = \sum_{j=1}^n z_j'(t) e^{\lambda_j t}\vec{v}_j$ (A est diagonale)

Ainsi, X est solution de $X' = AX + B$ si et seulement si $\forall j, z_j'(t) = e^{-\lambda_j t}\beta_j(t)$.

Démonstration (du théorème) :

On sait que le problème de Cauchy a une unique solution (cours sur les équations différentielles)

Il suffit de vérifier que $\varphi \colon t \mapsto \displaystyle\sum_{j=1}^n a_j e^{\lambda_j (t-t_0)}\vec{v}_j$ convient, ce qui est le cas.

En effet, φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\varphi'(t) = \sum_{j=1}^n a_j \lambda_j e^{\lambda_j (t-t_0)}\vec{v}_j = A\varphi(t)$

De plus, $\varphi(t_0) = \sum_{j=1}^n a_j \vec{v}_j = X_0$

3. Utilisation des exponentielles de matrice : voir section suivante.

VI Suites et séries d'une algèbre normée

On travaille ici avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

A) Convergence

- Définitions (rappels) :

  Espace normé, de Banach, algèbre de Banach…

  Norme d'algèbre unitaire sur A :

  C'est une norme pour l'espace vectoriel A avec en plus $\forall x, y \in A, \|xy\| \leqslant \|x\|\|y\|$ et $\|1_A\| = 1$

  En dimension finie, les normes sont équivalentes, donc on pourra changer de norme…

- Cas des séries :

  La série de terme général $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est dite convergente lorsque la suite des sommes partielles $S_n^u = \sum_{k=0}^n u_k$ converge.

  Elle est dite absolument convergente si la série de terme général $(\|u_n\|)_{n\geqslant 0}$ converge.

- Théorème (déjà vu) :

  Si E est un espace de Banach, toute série absolument convergente est convergente.

  (La réciproque est vraie…)

B) Rayon spectral d'une matrice ou d'un endomorphisme en dimension finie

Définition :

Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ ou $\mathscr{L}_{\mathbb{C}}(E)$ avec $\dim E = n$, on définit :

$\rho(A) = \sup\{|\lambda|, \lambda \in \mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(A)\}$: rayon spectral de A.

Proposition :

Pour toute valeur propre λ de A, et toute norme d'algèbre N, on a $N(A) \geqslant |\lambda|$, et donc $N(A) \geqslant \rho(A)$.

Démonstration :

1. Cas particulier où N est une norme triple, c'est-à-dire s'il existe une norme $|\ |$ sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ telle que $N(A) = \sup\limits_{|X| \leqslant 1} |AX|$.

   Si on prend X vecteur unitaire pour $|\ |$ et propre associé à une valeur propre λ,

   $$|AX| = |\lambda X| = |\lambda| \leqslant N(A) \tag{7.100}$$

2. Cas général où N est une norme d'algèbre quelconque :

   Soit $\lambda \in \mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(A)$, et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ tel que $(A - \lambda I_n)B = 0$

   (Il en existe, prendre par exemple la matrice dont toutes les colonnes sont des vecteurs propres de A associés à λ).

   On a alors $AB = \lambda B$, donc $|\lambda| \|B\| = \|AB\| \leqslant \|A\| \|B\|$

   Comme $\|B\| > 0$, on a donc $|\lambda| \leqslant \|A\|$.

Théorème (hors programme) :

Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on a $\lim_{p \to +\infty} A^p = 0$ si et seulement si $\rho(A) < 1$

Corollaire :

Pour toute norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on a $\rho(A) = \lim_{p \to +\infty} \|A^p\|^{1/p}$.

Démonstration :

Pour le théorème

- Supposons que $\lim_{p \to +\infty} A^p = 0$.

  Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A, et X un vecteur propre associé.

  On a alors $\lim_{p \to +\infty} A^p = 0$, donc $\lim_{p \to +\infty} \underbrace{A^p X}_{\lambda^p X} = 0$, soit $|\lambda| < 1$

  Ainsi, $\rho(A) < 1$ (on est en dimension finie, donc il y a un nombre fini de valeur propres)

- Supposons maintenant que $\rho(A) < 1$.

  Décomposition en sous-espaces caractéristiques :

  $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^p C_i$ où $C_i = \ker(A - \lambda_i I_n)^{m_i}$, avec $\chi_A = \prod_{i=1}^p (\lambda_i - X)^{m_i}$.

  On a $\forall i, |\lambda_i| < 1$. Comme les C_i sont stables et engendrent $\mathbb{C}^n$, il suffit de montrer que $A^p_{|C_i} \to 0$

On a $A^p_{|C_i} = (A_{|C_i})^p$. Or, $A_{|C_i} - \lambda_i \operatorname{Id}_{C_i} = v_i$ est nilpotent par définition de C_i

Donc $v_i^{m_i} = 0$.

Ainsi, $(A_{|C_i})^p = (\lambda_i \operatorname{Id}_{C_i} + v_i)^p = \sum_{t=0}^{m_i-1} C_p^t \lambda_i^{p-t} v_i^t$

C'est une matrice dont les coefficients sont de la forme $\lambda_i^{p-m_i+1}$ fois un polynôme de degré $\leqslant m_i - 1$ en p, et tendent donc vers 0 par croissance comparée ($|\lambda_i| < 1$)

Corollaire Si $\| \ \|$ est une norme triple sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ associée à une norme $| \ |$.

Comme $\operatorname{sp}(A^p) = \{\lambda^p, \lambda \in \operatorname{sp}_{\mathbb{C}}(A)\}$ (car A est trigonalisable dans $\mathbb{C}$), on a $\rho(A^p) = (\rho(A))^p$

Donc $\forall p \geqslant 1$, $\rho(A)^p \leqslant \|A^p\|$, et $\rho(A) \leqslant \|A^p\|^{1/p}$.

Soit $r > \rho(A)$. Alors $B = \frac{1}{r}A$ vérifie $\rho(B) < 1$.

D'après le théorème, on a $\lim_{p\to+\infty} B^p = 0$

Il existe donc M tel que $\forall p \geqslant M, \|B^p\| \leqslant 1$, c'est-à-dire $\forall p \geqslant M, \|A^p\| \leqslant r^p$

Pour tout $p \geqslant M$, on a donc $\rho(A) \leqslant \|A^p\|^{1/p} \leqslant r$.

Ainsi : $\forall r > \rho(A), \exists M > 0, \forall p \geqslant M, \rho(A) \leqslant \|A^p\|^{1/p} \leqslant r$

Donc $\lim_{p\to+\infty} \|A^p\|^{1/p} = \rho(A)$

Pour une norme $\| \ \|_2$ quelconque, on peut considérer une norme triple et c_1, c_2 tels que $c_1\| \ \| \leqslant \| \ \|_2 \leqslant c_2\| \ \|$

Alors $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\underbrace{c_1^{1/p}}_{\to 1} \underbrace{\|A^p\|^{1/p}}_{\to\rho(A)} \leqslant \|A^p\|_2^{1/p} \leqslant \underbrace{c_2^{1/p}}_{\to 1} \underbrace{\|A^p\|^{1/p}}_{\to\rho(A)}$

Exercice Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ pour que $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice B.

- Condition nécessaire : pour λ vp de A, $A^pV = \lambda^p V \to BV$. Donc $|\lambda| < 1$ ou $\lambda = 1$.

  Il faut de plus que $\ker(A - I) = \ker(A - I)^2$ (La valeur propre 1 doit être telle que l'espace propre soit l'espace caractéristique)

  En effet : On a déjà $\ker(A - I) \subset \ker(A - I)^2$.

  Supposons l'inclusion stricte. Soit alors $V \in \ker(A - I)^2 \backslash \ker(A - I)$.

  Pososon $W = (A - I)V \neq 0$. Alors $AV = W + V$ et $AW = W$.

  Ainsi $A^pV = A^{p-1}V + W = pW + V$, qui ne converge pas.

  Donc $\ker(A - I) = \ker(A - I)^2 = \ker(A - I)^{m_A}$.

- La condition est suffisante…

C) Séries géométriques

- Algèbre de Banach :

Théorème :

Soit $(A, \| \ \|)$ une algèbre de Banach, et $a \in A$ tel que $\|a\| < 1$. Alors :

- $1_A - a$ est inversible
- La série de terme général a^n converge absolument et $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = (1 - a)^{-1}$

Corollaire :

L'ensemble des éléments inversibles d'une algèbre de Banach est ouvert.

Démonstration :

- Déjà, on a convergence absolue car $\forall n \in \mathbb{N}, \|a^n\| \leqslant \|a\|^n = r^n$ qui est une série convergente car géométrique (réelle) de raison $r \in]-1,1[$
- On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(\sum_{k=0}^{n} a^k\right) \times (1-a) = 1 - a^{n+1}$

  Or, $\lim_{n\to+\infty} a^{n+1} = 0$.

  Par continuité du produit dans A, on a $\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a^k\right) \times (1-a) = 1$

  De même, $(1-a) \times \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a^k\right) = 1$

  D'où le résultat.
- Pour le corollaire :

  Soit $a_0 \in A^*$. On cherche une condition nécessaire sur h pour que $a_0 + h \in A^*$

  On a $a_0 + h = a_0(1 + a_0^{-1}h)$

  Donc si $\|-a_0^{-1}h\| < 1$, alors $a_0 + h \in A^*$.

  Mais $\|-a_0^{-1}h\| \leqslant \|a_0^{-1}\|\|h\|$

  Donc il suffit que $\|h\| < \frac{1}{\|a_0^{-1}\|}$

  Donc $B_0\left(a_0, \frac{1}{\|a_0^{-1}\|}\right) \subset A^*$

- Cas particulier de la dimension finie :

Théorème (Hors programme) :

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Alors la série de terme général A^n converge si et seulement si $\rho(A) < 1$

Démonstration :

Si la série de terme général converge, alors $A^n \to 0$, donc $\rho(A) < 1$

Réciproquement :

Si $\rho(A) < 1$, alors $I - A \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{C})$ (car $1 \notin \mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(A)$).

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a $(I + A + \cdots + A^p)(I - A) = I - A^{p+1}$

Donc $I + A + \cdots + A^p = (I - A^{p+1})(I - A)^{-1} \xrightarrow[p\to+\infty]{} (I - A)^{-1}$

car $A^{p+1} \to 0$ (puisque $\rho(A) < 1$)

D) Exponentielle dans une algèbre de Banach (Hors programme en dimension infinie)

Théorème :

Soit $(A, +, \times, \cdot, \|\ \|)$ une algèbre de Banach. Alors :

- Pour tout $u \in A$, la série de terme général $\frac{u^n}{n!}$ est absolument convergente.

  ($\frac{u^0}{0!} = 1_A$). On note $\exp(u)$ la somme de cette série.
- Si $u, v \in A$ commutent, on a $e^{u+v} = e^u \times e^v = e^v \times e^u$.

  En particulier, pour tout $u \in A$, e^u est inversible et $(e^u)^{-1} = e^{-u}$

- Pour tout $u \in A$, l'application $\begin{array}{rccc}\varphi_u : & \mathbb{R} & \longrightarrow & A \\ & t & \longmapsto & e^{tu}\end{array}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi_u'(t) = u \times e^{tu} = e^{tu} \times u \tag{7.101}$$

Démonstration :

1. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $\left\| \frac{u^p}{p!} \right\| \leqslant \frac{\|u\|^p}{p!}$, terme général d'une série (réelle) convergente. Donc la série de terme général $\frac{u^p}{n!}$ est absolument convergente donc convergente car A est complet.
2. Soient $u, v \in A$ qui commutent.
   Considérons $\Delta_n(u,v) = \sum_{k=0}^n \frac{(u+v)^k}{k!} - \left(\sum_{i=0}^n \frac{u^i}{i!}\right) \times \left(\sum_{j=0}^n \frac{v^j}{j!}\right)$
   On va montrer que $\Delta_n \to 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
   $$\sum_{k=0}^n \frac{(u+v)^k}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k C_k^i u^i v^{k-i} = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k \frac{u^i}{i!} \frac{v^{k-i}}{(k-i)!} = \sum_{(i,j) \in T_n} \frac{u^i}{i!} \frac{v^j}{j!} \tag{7.102}$$
   Où $T_n = \left\{(i,j) \in \mathbb{N}^2, i+j \leqslant n\right\}$
   Par ailleurs, $\sum_{i=0}^n \frac{u^i}{i!} \sum_{j=0}^n \frac{v^j}{j!} = \sum_{(i,j)\in C_n} \frac{u^i}{i!} \frac{v^j}{j!}$, où $C_n = [\![0,n]\!]^2$.
   Comme $T_n \subset C_n$, on a $\Delta_n(u,v) = -\sum_{(i,j)\in T_n \setminus C_n} \frac{u^i}{i!} \frac{v^j}{j!}$
   Donc $\|\Delta_n(u,v)\| \leqslant \sum_{(i,j)\in T_n\setminus C_n} \frac{\|u\|^i}{i!} \frac{\|v\|^j}{j!} \leqslant -\Delta_n(\|u\|, \|v\|)$
   Or, le théorème sur les séries *réelles* produits au sens de Cauchy montre que $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, e^{\alpha+\beta} = e^\alpha e^\beta$
   Donc $\lim_{n\to+\infty} -\Delta_n(\|u\|, \|v\|) = e^{\|u\|+\|v\|} - e^{\|u\|} e^{\|v\|} = 0$, d'où le résultat voulu.
   Inversibilité : comme u et $-u$ commutent, $e^u e^{-u} = e^{-u} e^u = e^0 = 1_A$
   Lemme :
3. Soit $u \in A$. Alors il existe $M > 0$ tel que $\forall t \in [-1,1], \|\varphi_u(t) - 1_A - tu\| \leqslant Mt^2$
   En effet : $\|\varphi_u(t) - 1_A - tu\| = \left\| \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{t^k u^k}{k!} \right\| \leqslant t^2 \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{|t|^{k-2}\|u\|^k}{k!} \leqslant t^2 \underbrace{\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\|u\|^k}{k!}}_{M} \leqslant t^2 M$
   Soit maintenant $t_0 \in \mathbb{R}$.
   Alors pour $h > 0$, $\varphi_u(t_0+h) - \varphi_u(t_0) = e^{(t_0+h)u} - e^{t_0.u} = e^{t_0.u}(e^{h.u} - 1)$.
   Donc $\frac{\varphi_u(t_0+h)-\varphi_u(t_0)}{h} - u \times e^{t_0 u} = e^{t_0 u} \left(\frac{e^{hu}-1-hu}{h}\right)$
   Ainsi, si $|h| < 1$, $\left\| \frac{\varphi_u(t_0+h)-\varphi_u(t_0)}{h} - u \times e^{t_0 u} \right\| \leqslant M|h| \|e^{t_0 u}\|$
   Donc $\lim_{h\to 0} \frac{\varphi_u(t_0+h)-\varphi_u(t_0)}{h} = u \times e^{t_0 u} = e^{t_0 u} \times u$ car u et $e^{t_0 u}$ commutent.

E) Exponentielle et équations différentielles linéaires

- Écriture rationnelle d'un système linéaire à coefficients constants à p inconnues :

$$\forall i \in [\![1,p]\!], x_i'(t) = \sum_{j=1}^p a_{i,j} x_j(t) + b_i(t) \tag{7.103}$$

Ou matriciellement : $X'(t) = A \times X(t) + B(t)$

Où $A = (a_{i,j})$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Problème de Cauchy : il faut résoudre $\begin{cases} X' = AX + B \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$

- Utilisation de l'exponentielle :

Théorème :

Soit E un espace de Banach.

Ainsi, $(\mathscr{L}_{\mathbb{C}}(E), \|\| \ \|\|)$ est une algèbre de Banach. Alors :

1. Pour tout $a_0 \in \mathscr{L}_{\mathbb{C}}(E)$, le problème de Cauchy $\begin{cases} x'(t) = a_0 \times x(t) \\ x(0) = \mathrm{Id}_E \end{cases}$ a une unique solution $\begin{array}{rcl} x\colon \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathscr{L}_{\mathbb{C}}(E) \\ t & \longmapsto & e^{ta_0} \end{array}$ (t décrivant un *intervalle* I)

2. Pour tout $\vec{v} \in E$, le problème de Cauchy $\begin{cases} x'(t) = a_0(x(t)) \\ x(0) = \vec{v} \in E \end{cases}$ a pour unique solution $\begin{array}{rcl} x\colon \mathbb{R} & \longrightarrow & E \\ t & \longmapsto & e^{ta_0} \end{array}$

Démonstration :

1. On sait que $\varphi\colon t \mapsto e^{ta_0}$ vérifie $\varphi(0) = \mathrm{Id}_E$ et $\forall t, \varphi'(t) = a_0 \times e^{ta_0} = a_0 \times \varphi(t)$.

   Donc φ est solution.

   Soit x solution du problème de Cauchy.

   Considérons $y(t) = e^{-ta_0}x(t)$, c'est-à-dire $x(t) = e^{ta_0} \times y(t)$.

   Comme $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto e^{-a_0 t}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ et $\begin{array}{rcl} \mathscr{L}_{\mathbb{C}}(E)^2 & \longrightarrow & \mathscr{L}_{\mathbb{C}}(E) \\ (a,b) & \longmapsto & a \times b \end{array}$ est continue,

   y est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\forall t \in \mathbb{R}, y'(t) = (-a_0 e^{-ta_0}) \times x(t) + e^{-ta_0} \times \underbrace{x'(t)}_{=a_0 \times x(t)}$

   Comme a_0 et e^{-ta_0} commutent pour tout t, on a $\forall t, y'(t) = 0$ donc $y = \text{cte} = y(0) = \mathrm{Id}_E$

   Donc $x(t) = e^{ta_0}y(0) = e^{ta_0}$

2. On fait la même chose : $t \mapsto \varphi(t) = e^{ta_0}(\vec{v})$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et de dérivée $\varphi'(t) = a_0 e^{ta_0}(\vec{v}) = a_0\varphi(t)$, et $\varphi(0) = \vec{v}$.

   Réciproquement, si x est une solution, on pose à nouveau $y(t) = e^{-ta_0}(x(t))$...

F) Calcul en dimension finie

- La réduction :

  Si $A = PRP^{-1}$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}, e^{tA} = Pe^{tR}P^{-1}$

  Ainsi, pour calculer e^{tA}, on diagonalise A si possible, sinon on trigonalise.

- Si A est diagonalisable (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) :

  Avec les projecteurs spectraux, $A = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \pi_i$ où les λ_i sont les valeurs propres de A deux à deux distinctes et π_i les projecteurs sur $E_{\lambda_i}(A)$ parallèlement à $\bigoplus_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p} E_{\lambda_j}(A)$.

  On a alors $\forall t \in \mathbb{R}, e^{tA} = \sum_{i=1}^{r} e^{t\lambda_i}\pi_i$

- Si A a une seule valeur propre $\lambda_0 \in \mathbb{R}/\mathbb{C}$ (on a alors $\chi_A = (\lambda_0 - X)^n$)

  Alors $A = \lambda_0 I_n + N$ où N est nilpotent (théorème de Cayley–Hamilton)

  Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a alors : $e^{tA} = e^{t\lambda_0 I_n + tN} = e^{t\lambda_0 I_n}e^{tN} = (e^{t\lambda_0}I_n)\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} N^k\right)$

  Donc $e^{tA} = e^{\lambda_0 t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!}(A - \lambda_0 I_n)^k$

- Cas général (Hors programme) :

  Décomposition de Jordan–Dumford :

  $A = D + N$ où D est diagonalisable, N nilpotente et $DN = ND$

  Ainsi, $\forall t \in \mathbb{R}, e^{tA} = e^{tD}e^{tN}$

- Méthode artisanale utilisant le calcul de A^n et la sommation des séries : voir méthodes de calcul de A^n (par exemple avec le polynôme annulateur...)

VII Compléments hors programme

A) Endomorphisme cyclique

Définition :
Un endomorphisme u de E en dimension finie est dit cyclique lorsqu'il existe $\vec{v} \in E$ tel que $\mathscr{B} = (\vec{v}, u(\vec{v}), \dots u^{n-1}(\vec{v}))$ est une base de E.

Dans ce cas, $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & & (0) & a_n \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ (0) & & 1 & a_1 \end{pmatrix}$

Proposition :
Si un endomorphisme u est cyclique, alors

$$\mathrm{com}(u) = \mathbb{K}[u] = \left\{\alpha_0 \,\mathrm{Id}_E + \dots + \alpha_{n-1}u^{n-1}, (\alpha_0, \dots \alpha_{n-1}) \in \mathbb{K}^n\right\} \tag{7.104}$$

Où $\mathrm{com}(u)$ est l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec u.

Démonstration :
Déjà, les inclusions $\supset$ sont évidentes.

Soit $v \in \mathrm{com}(u)$, montrons que $v \in \left\{\alpha_0 \,\mathrm{Id}_E + \dots + \alpha_{n-1}u^{n-1}, (\alpha_0, \dots \alpha_{n-1}) \in \mathbb{K}^n\right\}$

Prenons $\vec{v}_0$ tel que $(\vec{v}_0, u(\vec{v}_0), \dots u^{n-1}(\vec{v}_0))$ est une base de E.

On peut alors écrire $v(\vec{v}_0) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j u^j(v_0)$. Alors $v = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j u^j$.

En effet, pour tout $k = 0..n-1$, on a :

$$v(u^k(\vec{v}_0)) = u^k(v(\vec{v}_0)) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j u^{k+j}(\vec{v}_0) = \left(\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j u^j\right)(u^k(\vec{v}_0)) \tag{7.105}$$

Donc v et $\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j u^j$ coïncident sur une base donc sont égaux.

Application :
Soit u un endomorphisme de E avec $\dim_{\mathbb{C}}(E) = n \in \mathbb{N}$ ayant n valeurs propres simples. Alors u est cyclique.

En effet : soit $(e_1, \dots e_n)$ une base E, avec $\forall i \in [\![1, n]\!], u(e_i) = \lambda_i e_i$

On prend $\vec{v} = e_1 + \cdots + e_n$.

Alors pour tout $k \in \mathbb{N}, u^k(\vec{v}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k e_i$

Donc $\operatorname{mat}_{(e_1,\dots e_n)}(\vec{v}, \dots u^{n-1}(\vec{v})) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^n \end{pmatrix} \in \mathcal{GL}_n$ car les λ_i sont deux à deux distincts.

Donc $(\vec{v}, \dots u^{n-1}(\vec{v}))$ est une base de E.

Proposition :

Si, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $u - \lambda I$ est nilpotent d'indice n, alors u est cyclique.

En effet : soit $v = u - \lambda I$, et $\vec{v}_0$ tel que $(u - \lambda I)^{n-1}(\vec{v}_0) \neq \vec{0}$.

Alors $(\vec{v}_0, \dots v^{n-1}(\vec{v}_0))$ est libre dans E donc c'est une base de E, puis $(\vec{v}_0, \dots u^{n-1}(\vec{v}_0))$ aussi avec des transformations élémentaires.

Propriétés :

Si un endomorphisme u est cyclique, alors $\min u = \chi_u(-1)^n$

En effet : Si $(\vec{v}_0, \dots u^{n-1}(\vec{v}_0))$ est une base de E, alors $(\mathrm{Id}, u, \dots u^{n-1})$ est libre dans $\mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E)$

En effet, pour tout $(\lambda_1, \dots \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, on a les implications :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i u^i = 0 \implies \sum_{i=1}^n \lambda_i u^i(\vec{v}_0) = 0 \implies \forall j \in [\![1, n]\!], \lambda_j = 0 \tag{7.106}$$

Donc si $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ et $\tilde{P}(u) = 0$, alors $P = 0$ donc $\deg(\min u) \geqslant n$. Comme $\min u | \chi_u$, on a $\min u = \chi_u(-1)^n$.

B) Produit tensoriel

Définition :

Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), B \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$

On note $A \otimes B = (a_{i,j}B) \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$.

Propriétés

$$(A \otimes B) \times (A' \otimes B') = AA' \otimes BB' \tag{7.107}$$

Si $A, B \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}), \mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$, alors $A \otimes B \in \mathcal{GL}_{np}(\mathbb{K})$ et $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$

Application Si A et B sont deux matrices diagonalisables, alors $A \otimes B$ est diagonalisable.

En effet : Si $A = PDP^{-1}$, $B = QEQ^{-1}$, avec $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, $Q \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$, D et E diagonales, alors $A \otimes B = (PDP^{-1}) \otimes (QEQ^{-1}) = (P \otimes Q) \times (D \otimes E) \times (P^{-1} \otimes Q^{-1})$

Soit $A \otimes B = (P \otimes Q) \times (D \otimes E) \times (P \otimes Q)^{-1}$ et $D \otimes E$ est diagonale.

C) Applications à l'algèbre

- Nombre algébrique ($\mathbb{R}[X]$), entier algébrique ($\mathbb{Z}[X]$ unitaire)

Lemme :

$\alpha \in \mathbb{C}$ est un entier algébrique si et seulement si il existe $p \geqslant 1$ et $z_1, z_2, \dots z_p$, complexes non tous nuls tel quel $H = z_1\mathbb{Z} + \cdots z_p\mathbb{Z}$ soit stable par $y \mapsto \alpha y$.

Démonstration :

$\Longrightarrow$ Si α est algébrique, soit $P = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P(\alpha) = 0$.

On prend alors $z_i = \alpha^{i-1}$ pour $i \in [\![1, d]\!]$. Alors $H = z_1\mathbb{Z} + \cdots z_p\mathbb{Z}$ est stable.

$\Longleftarrow$ Il existe une famille $(m_{i,j})_{\substack{i\in[\![1,p]\!]\\ j\in[\![1,p]\!]}}$ d'éléments de $\mathbb{Z}$ telle que $\forall i \in [\![1, p]\!], \alpha z_i = \sum_{j=1}^{p} m_{i,j} z_j$.

Alors $M \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_p \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_p \end{pmatrix}$ où $M = (m_{i,j})_{\substack{i\in[\![1,p]\!]\\ j\in[\![1,p]\!]}} \in \mathscr{M}_p(\mathbb{Z})$.

Ainsi, α est vp de M donc racine de $(-1)^p\chi_M$.

Théorème :

L'ensemble $\mathscr{O}$ des entiers algébriques est un sous-anneau de $\mathbb{C}$ et $\mathscr{O} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$.

Démonstration :

- Montrons que $\mathscr{O} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$:
  - Soit $\alpha \in \mathbb{Z}$. Alors $(X - \alpha)(\alpha) = 0$ donc $\alpha \in \mathscr{O}$.
  - Si $\alpha \in \mathscr{O} \cap \mathbb{Q}$, alors il existe P tel que $P(\alpha) = 0$, disons $P = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \cdots + a_0$.

    On peut écrire $\alpha = \frac{p}{q}$, avec $p \wedge q = 1$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$.

    Alors $\left(\frac{p}{q}\right)^d + a_{d-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{d-1} + \cdots + a_0 = 0$.

    Donc $p^d + \underbrace{a_{d-1}p^{d-1}q + \cdots + a_0q^d}_{q|\cdots} = 0$.

    Donc $q|p^d$. Donc $q = 1$.
- Montrons que $\mathscr{O}$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$:
  - $1 \in \mathscr{O}$.
  - Soient $x, y \in \mathscr{O}$. Montrons que $x + y \in \mathscr{O}$.

    Soient P et Q annulant respectivement x et y. On note d et e leurs degrés.

    Soient $z_1, \dots z_p$ définits par $(x^iy^j)_{\substack{i\in[\![1,d-1]\!]\\ j\in[\![1,e-1]\!]}}$ (avec $p = d \times e$). Alors $H = \sum_{i=1}^{p} z_i\mathbb{Z}$ est stable par produit par x et y. Donc H est stable par produit par xy et $x - y$.

    Donc $xy \in \mathscr{O}$ et $x - y \in \mathscr{O}$.

Exercice :

Trouver tous les rationnels r tels que $\cos r\pi$ est rationnel.

On a :

$$\cos(r\pi) = \frac{1}{2}\underbrace{\left(e^{ir\pi} + e^{-ir\pi}\right)}_{\text{algébriques}} \tag{7.108}$$

Donc $2\cos r\pi \in \mathscr{O}$. De plus, $2\cos r\pi \in \mathbb{Q}$.

Donc $2\cos r\pi \in \mathbb{Z}$.

Donc $2\cos r\pi \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

- Déterminant d'une matrice cyclique

On cherche à calculer le déterminant d'une matrice de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \tag{7.109}$$

On note M de sorte que $A = M(a_0, a_1, \dots a_{n-1})$, et on pose $K = M(0, 1, 0, \dots) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}$.

Alors $A = \tilde{P}(K)$ où $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

On a $K^n = I_n$ donc $X^n - 1$, scindé à racines simples, est annulateur.

Donc $\mathrm{sp}(K) \subset \{z \in \mathbb{C}, z^n = 1\}$.

De plus, si $\deg P \leqslant n-1$ et $P(K) = 0$, alors $P = 0$ ($M(a_0, a_1, \dots a_{n-1}) = 0 \iff P(K) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k K^k = 0$).

Donc il existe $R \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $K = R \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \varepsilon & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varepsilon^{n-1} \end{pmatrix} R^{-1}$, avec $\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

Alors $A = R \begin{pmatrix} P(1) & & & \\ & P(\varepsilon) & & \\ & & \ddots & \\ & & & P(\varepsilon^{n-1}) \end{pmatrix} R^{-1}$

Donc $\det A = \prod_{k=0}^{n-1} (a_0 + \varepsilon^k a_1 + \dots + \varepsilon^{(n-1)k} a_{n-1})$