Chapitre 6 : Algèbre linéaire

I Catégorie des $\mathbb{K}$-ev

On considère un corps commutatif $\mathbb{K}$ quelconque

Voir cours de sup pour les différentes définitions…

A) Combinaisons linéaires quelconques

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $(v_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E, $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille de scalaires (de $\mathbb{K}$) à support fini.

On pose $\sum_{i\in I} \lambda_i v_i = \sum_{i\in \mathrm{supp}(\alpha_i)} \lambda_i v_i$: combinaison linéaire des v_i.

Cas particulier :
Combinaison linéaire triviale : $\forall i \in I, \lambda_i = 0$

Combinaison linéaire nulle : $\sum_{i\in I} \lambda_i v_i = 0$.

Remarque :
Si une combinaison linéaire est triviale, alors elle est nulle.

B) Espace vectoriel engendré par une partie ou une famille

Théorème, définition :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et A une partie de E.

1. L'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant A est un espace vectoriel, appelé espace vectoriel engendré par A, noté $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(A)$.
2. $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(A)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A (au sens de l'inclusion)
3. $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de A.

Définition :
On dit que A est génératrice lorsque $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(A) = E$.

C) Famille ou partie libre

Définition :

La famille $(v_i)_{i\in I}$ est dite libre lorsque la combinaison linéaire triviale est la seule combinaison linéaire nulle, c'est-à-dire :

Pour tout $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ à support fini, $\sum_{i\in I} \lambda_i v_i = 0 \implies \forall i \in I, \lambda_i = 0$.

Elle est dite liée sinon, c'est-à-dire lorsqu'il existe $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ famille de scalaires non tous nuls telle que $\sum_{i\in I} \lambda_i v_i = 0$.

Théorème :

1. Toute sous famille d'une famille libre est libre
2. Une famille est libre si et seulement si toute sous-famille finie est libre.

Démonstration :

1. Soit $(v_i)_{i\in I}$ une famille libre de E, et soit J une partie de I.

   Soit $(\mu_i)_{i\in J} \in \mathbb{K}^J$ à support fini, supposons que $\sum_{i\in J} \mu_i v_i = 0$.

   On pose, pour $i \in I$, $\lambda_i = \begin{cases} \mu_i & \text{si } i \in J \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

   Alors $(\lambda_i)_{i\in I}$ est à support fini, et $\sum_{i\in I} \lambda_i v_i = \sum_{i\in J} \mu_i v_i = 0$.

   Donc $\forall i \in I, \lambda_i = 0$. Donc $\forall i \in J, \mu_i = 0$.

   Donc $(v_i)_{i\in J}$ est libre.
2. Un premier sens découle déjà du point précédent.

   Pour l'autre, montrons la contraposée :

   Supposons $(v_i)_{i\in I}$ liée. Alors il existe $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ à support fini non tous nuls tel que $\sum_{i\in I} \lambda_i v_i = 0$.
   Si on prend $J = \mathrm{supp}(\lambda)$, alors J est fini, et $\sum_{i\in J} \lambda_i v_i = 0$.

D) Base

C'est une famille $\mathscr{F}$ libre et génératrice, ou une famille de E telle que tout élément x de E s'écrive de manière unique comme combinaison linéaire des éléments de $\mathscr{F}$.

Exemples

- $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$ car tout polynôme s'écrit de manière unique $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k X^k$ où $\mathrm{supp}(a)$ est fini.
- Famille orthogonale pour un produit scalaire :

  Soit $E = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \forall x \in \mathbb{R}, f(x + 2\pi) = f(x)\}$.

  Pour $k \in \mathbb{Z}$, on pose $e_k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & e^{ikt} \end{array}$.

Proposition :

$(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est libre dans E.

Démonstration :

Déjà, $\forall (k,l) \in \mathbb{Z}^2$, $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e_k(t)\overline{e_l(t)}\,\mathrm{d}t = S_{k,l}$ est un produit scalaire, et $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est orthonormale pour ce produit scalaire.

Soit $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ une famille de complexes à support fini, supposons que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \lambda_k e_k = 0$.

Alors $\forall l \in \mathbb{Z}$, $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \lambda_k e_k(t)\right)\bar{e}_l(t)\,\mathrm{d}t = 0$

Donc $\forall l \in \mathbb{Z}$, $\frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathrm{supp}\,\lambda} \lambda_k \int_0^{2\pi} e_k(t)\bar{e}_l(t)\,\mathrm{d}t = \lambda_l = 0$

Donc $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est libre.

- Application aux équations différentielles linéaires

Rappel :

Résolution de (D) : $y'' + ay' + by = 0$, $a, b \in \mathbb{C}$

Équation caractéristique :

$$r^2 + ar + b = 0 \tag{6.1}$$

(Condition nécessaire et suffisante pour que $t \mapsto e^{rt}$ soit solution)

- ◇ 1^{er} cas : Si $\Delta = a^2 - 4b \neq 0$, alors l'ensemble des solutions de D est $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\left\{t \mapsto e^{r_1 t}, t \mapsto e^{r_2 t}\right\}$ où r_1 et r_2 sont les racines de (6.1).
- ◇ $2^{\text{ème}}$ cas : si $\Delta = 0$, l'ensemble des solutions de D est $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\left\{t \mapsto e^{rt}, t \mapsto te^{rt}\right\}$ où r est racine de (6.1).

Avec second membre exponentiel et polynôme :

$$y'' + ay' + by = f(t) = \sum_{j=1}^{n} e^{\alpha_j t} P_j(t) \qquad \text{où } \alpha_j \in \mathbb{C}, P_j \in \mathbb{C}[X] \tag{6.2}$$

On cherche une solution particulière en superposant (= en ajoutant) des solutions particulières des équations (D_j) : $y'' + ay' + by = e^{\alpha_j t}P_j(t)$:

Si α_j est racine de multiplicité m $(m = 0, 1, 2)$ de (6.1), alors D_j a une solution de la forme $t \mapsto t^m Q_i(t) e^{\alpha_i t}$ où Q_i est de même degré que P_i.

Théorème :

La famille des applications $t \mapsto t^m e^{\alpha t}, n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{C}$ est libre dans $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

L'espace engendré par cette famille s'appelle l'espace des exponentielles polynômes.

Démonstration :

- ◇ Cas particulier :

  Déjà, la famille $f_\alpha : t \mapsto e^{\alpha t}$ est libre.

  En effet, vérifions que toute sous-famille finie G de $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{C}}$ est libre.

  Par récurrence sur $\mathrm{card}(G) = p$.

  — Pour $p = 0$ ok.

  — Pour $p = 1$ ok car $\forall \alpha \in \mathbb{C}, f_\alpha \neq 0$

  — Soit $p \in \mathbb{N}$, supposons que toute sous-famille G de cardinal p est libre.

  Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{p+1} \in \mathbb{C}$ distincts.

  Supposons que $\sum_{j=1}^{p+1} \lambda_j f_{\alpha_j} = 0$ pour $(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_{p+1}) \in \mathbb{C}^{p+1}$

  Alors $\forall t \in \mathbb{R}, \sum_{j=1}^{p+1} \lambda_j e^{\alpha_j t} = 0$

  Donc $\forall t \in \mathbb{R}, \sum_{j=1}^{p+1} \lambda_j e^{(\alpha_j - \alpha_p + 1)t} = 0$

Donc en dérivant $\forall t \in \mathbb{R}, \sum_{j=1}^{p} \lambda_j(\alpha_j - \alpha_{p+1})e^{(\alpha_j-\alpha_{p+1})t} = 0$

Donc, par hypothèse de récurrence appliquée à $(\lambda_j(\alpha_j - \alpha_{p+1}))_{j\in[\![1,p]\!]}$, on a :

$\forall j \in [\![1,p]\!], \lambda_j(\alpha_j - \alpha_{p+1}) = 0$. Donc $\forall j \in [\![1,p]\!], \lambda_j = 0$, puis $\lambda_{p+1} = 0$

◇ Cas général :

On pose $f_{\alpha,n} : t \mapsto t^n e^{\alpha t}$.

Une combinaison linéaire non triviale des $f_{\alpha,n}$ s'écrit $\varphi(t) = \sum_{j=1}^{r} P_j(t)e^{\alpha_j t}$.

Montrons par récurrence sur $p = \sum_{j=1}^{r} \deg P_j$ qu'une telle somme n'est pas nulle.

— Si $\sum_{j=1}^{r} \deg P_j = 0$, on est ramené au cas précédent.

— Soit $p \in \mathbb{N}$, supposons que si $\sum_{j=1}^{r} \deg P_j \leqslant p$, alors $\sum_{j=1}^{r} P_j(t)e^{\alpha_j t} \neq 0$.

Si maintenant $\sum_{j=1}^{r} \deg P_j = p+1$:

Supposons que $\sum_{j=1}^{r} P_j(t)e^{\alpha_j t} = 0$.

On peut supposer par exemple que $\deg P_r \geqslant 1$.

Alors $\forall t \in \mathbb{R}, 0 = \varphi(t)e^{-\alpha_r t} = \sum_{j=1}^{r} P_j(t)e^{(\alpha_j-\alpha_r)t} = \sum_{j=1}^{r} P_j(t)e^{\beta_j t}$.

En dérivant, $\forall t \in \mathbb{R}, \sum_{j=1}^{r} (P_j'(t) + \beta_j P_j(t))e^{\beta_j t} = 0$.

Ainsi, comme $\beta_r = 0$, si on pose $Q_j = P_j' + \beta_j P_j$, on obtient :

$$\deg Q_j \leqslant \begin{cases} \deg P_j & \text{si } j < r \\ \deg P_j - 1 & \text{si } j = r \end{cases} \tag{6.3}$$

Donc par hypothèse de récurrence (on a ainsi $\sum_{j=1}^{r} \deg Q_j \leqslant p$), on a :

$$\forall j \in [\![1,r]\!], Q_j = 0 \tag{6.4}$$

Donc en particulier $P_r = \text{cte}$, ce qui est impossible car $\deg P_r \geqslant 1$.

E) Familles de polynômes

Proposition (Utilisation du degré – hors programme) :

Soit $A \subset \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$.

1. Si $\deg_{|A} : A \to \mathbb{N}$ est injective, alors A est libre.
2. Si $\deg_{|A} : A \to \mathbb{N}$ est surjective, alors A est génératrice.

Proposition :

Soient $P_0, P_1, \dots P_n \in \mathbb{K}[X]$ tels que $\forall i, \operatorname{val}(P_i) = i$ (c'est-à-dire $X^i | P_i$ et $X^{i+1} \nmid P_i$, ou encore 0 est racine de multiplicité i de P_i). Alors $(P_0, P_1, \dots P_n)$ est libre.

Cas particulier :

Pour $n \geqslant 1$ fixé, on pose $B_p = X^p(1-X)^p$ (polynôme de Bernstein)

Alors $(B_0, \dots B_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Démonstration :

La famille est libre :

Si $\sum_{j=0}^{n} \lambda_j P_j = 0$, alors en remplaçant X par 0 on obtient $\lambda_0 = 0$.

Comme 0 est racine d'ordre i de P_i, on a $0 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_j'(0) = \lambda_1$, donc $\lambda_1 = 0$...

F) Application linéaire

Comment définir une application linéaire de E dans F ?

À l'aide d'une base de E :

Théorème :

Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base de E (éventuellement infinie)

Soit $(v_i)_{i\in I} \in F^I$. Alors il existe une unique application linéaire de E dans F telle que $\forall i \in I, f(e_i) = v_i$.

Remarques

- Si $(e_i)_{i\in I}$ est supposée seulement génératrice, il y a au plus une application linéaire :

  Si f et g conviennent, alors :

  $\forall i \in I, e_i \in \ker(f-g)$, donc $\mathrm{Vect}((e_i)_{i\in I}) \subset \ker(f-g)$.

  Donc $f = g$ (car $\mathrm{Vect}((e_i)_{i\in I}) = E$).

  Pour l'existence d'une application linéaire, il faut que si il y a une relation de liaison entre les e_i, il y ait la même entre les v_i.

- Si $(e_i)_{i\in I}$ est supposée libre, il existe au moins une application linéaire :

  Si on note $E' = \mathrm{Vect}((e_i)_{i\in I})$, il existe alors une unique application linéaire f' de E' dans F telle que $\forall i \in I, f'(e_i) = v_i$.

  On peut de plus prolonger f' à E de manière linéaire si et seulement si E' admet un supplémentaire dans E, ce qui est toujours vrai si on admet l'axiome du choix.

Compléments

Base télescopique

Soit $\mathbb{K}$ un corps, $\mathbb{L}$ une extension de $\mathbb{K}$ (c'est-à-dire que $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{L}$)

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{L}$-ev (en particulier, $\cdot : \mathbb{L} \times E \to E$)

Proposition :

La restriction du produit externe à $\mathbb{K} \times E$ munit E d'une structure de $\mathbb{K}$-ev. On note $E_{\mathbb{L}}$ le $\mathbb{L}$-ev initial, $E_{\mathbb{K}}$ l'espace vectoriel $(E, +, \cdot_{|\mathbb{K}\times E})$ en tant que $\mathbb{K}$-ev.

Exemple :

$\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-ev, ou un $\mathbb{Q}$-ev.

Théorème :

Soit $(\vec{v}_i)_{i\in I}$ une $\mathbb{L}$-base de $E_{\mathbb{L}}$

Soit $(e_j)_{j\in J}$ une $\mathbb{K}$-base du $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{L}$.

Alors $(e_j \cdot \vec{v}_i)$ est une $\mathbb{K}$-base de $E_{\mathbb{K}}$, appelée base télescopique.

Conséquence :
Si E est de $\mathbb{L}$-dimension finie, et $\mathbb{L}$ de $\mathbb{K}$-dimension finie,
alors E est de $\mathbb{K}$-dimension finie, et $\dim_{\mathbb{K}} E = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{L} \times \dim_{\mathbb{L}} E$.

Cas particulier :
Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{L} = \mathbb{C}$, alors $\dim_{\mathbb{R}} E = 2\dim_{\mathbb{C}} E$, et si $(v_1, \dots v_n)$ est une $\mathbb{C}$-base de E, alors $(v_1, \dots v_n, \boldsymbol{i}v_1, \dots \boldsymbol{i}v_n)$ est une $\mathbb{R}$-base de E.

Démonstration (du théorème) :
Montrons que $(e_j \cdot \vec{v}_i)$ est libre :

Soit $(e_{j_k} \cdot \vec{v}_{i_k})_{k\in[\![1,p]\!]}$ une sous famille finie de $(e_j \cdot \vec{v}_i)$.

Soient $\lambda_1, \dots \lambda_p \in \mathbb{K}$, supposons que $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k e_{j_k} \cdot \vec{v}_{i_k} = 0$.

Quitte à agrandir la famille des $e_{j_k} \cdot \vec{v}_{i_k}$, on peut supposer qu'elle est de la forme $(e_j \cdot \vec{v}_i)$ (où on a alors $I_0 = \{i \in I, \exists k \in [\![1,p]\!], i = i_k\}$, idem pour J_0 et $p = \#J_0 \times \#I_0$)

On a ainsi $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k e_{j_k} \cdot \vec{v}_{i_k} = \sum_{\substack{j\in J_0\\ i\in I_0}} \lambda_{i,j} e_j \cdot \vec{v}_i$ (où $\lambda_{i,j} = \lambda_k$, k étant tel que $i = i_k$, $j = j_k$)

Donc $\sum_{i\in I_0} \underbrace{\Big(\sum_{j\in J_0} \lambda_{i,j} e_j\Big)}_{\in\mathbb{L}} \cdot \vec{v}_i = 0$

Donc comme $(\vec{v}_{i_k})_{k\in[\![1,p]\!]}$ est libre, on a :

$$\forall i \in I_0, \sum_{j\in J_0} \lambda_{i,j} e_j = 0 \tag{6.5}$$

D'où, comme $(e_{j_k})_{k\in[\![1,p]\!]}$ est libre : $\forall i \in I_0, \forall j \in J_0, \lambda_{i,j} = 0$

Donc $(e_j \cdot \vec{v}_i)$ est bien libre.

Soit maintenant $\vec{v} \in E$.

Il existe une famille $(\mu_i)_{i\in I}$ de $\mathbb{L}$ à support fini telle que $\vec{v} = \sum_{i\in I} \mu_i \vec{v}_i$.

Comme $\forall i \in I, \mu_i \in \mathbb{L}$, il existe alors pour tout $i \in I$ une famille $(\lambda_{i,j})_{j\in J}$ de $\mathbb{K}$ à support fini telle que $\mu_i = \sum_{j\in J} \lambda_{i,j} e_j$.

Alors le support de $(\lambda_{i,j})$ est fini :

En effet, si $\lambda_{i,j} \neq 0$, alors $\mu_i \neq 0$ (car $(e_j)_{j\in J}$ est $\mathbb{K}$-libre).

Il y a donc un nombre fini de valeurs de i possibles.

Pour chacun de ces i, il y a un nombre fini de valeurs de j possibles, donc $(\lambda_{i,j})$ est à support fini.

Et on a enfin :

$$\vec{v} = \sum_{i\in I} \mu_i \vec{v}_i = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} (\lambda_{i,j} e_j) \cdot \vec{v}_i = \sum_{\substack{i\in I\\ j\in J}} \lambda_{i,j} e_j \cdot \vec{v}_i \tag{6.6}$$

Donc la famille est génératrice.

C'est donc bien une base.

Exemples On considère trois corps $\mathbb{K} \subset \mathbb{L} \subset \mathbb{M}$. On suppose que toutes les dimensions sont finies. Alors $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{M} = \dim_{\mathbb{L}} \mathbb{M} \times \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{L}$.

1. Soit $P = X^3 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$. Alors P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$:

   En effet, sinon il aurait un facteur de degré 1, disons $X - \alpha \in \mathbb{Q}[X]$.

   On aurait alors $P(\alpha) = 0$, soit $\alpha^3 = 2$, ce qui est impossible (pour $\alpha \in \mathbb{Q}$)

2. Soit $\mathbb{L} = \left\{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}, a, b, c \in \mathbb{Q}\right\}$

   Alors $\mathbb{L}$ est une sous-$\mathbb{Q}$-algèbre de $\mathbb{C}$ de dimension 3 :

   $(1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$ est libre (d'après le résultat du point précédent), et génératrice par définition.

3. Ainsi, $\mathbb{L}$ est un sous–corps de $\mathbb{C}$.

4. On cherche tous les sous–corps de $\mathbb{L}$:

   Il y a $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{L}$, et c'est tout :

   Soit $\mathbb{K}$ un sous–corps de $\mathbb{L}$. Alors $\mathbb{K}$ contient $\mathbb{Q}$.

   On a de plus $\underbrace{\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{L}}_{=3} = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{L} \times \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{K}$

   Donc soit $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{L} = 1$ et $\mathbb{K} = \mathbb{L}$, soit $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{L} = 1$ et $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$.

II Dimension

A) Théorèmes fondamentaux

Théorème (Théorème de la dimension) :
Si un espace vectoriel E admet une famille génératrice finie, alors il admet une base finie, et toutes ses bases ont même cardinal appelé dimension de E.

Théorème (Théorème de la base incomplète) :
Soit V un système libre de E, G une famille génératrice de E.
Alors il existe $H \subset G$ tel que $V \cup H$ soit une base de E.

B) Théorème(s) du rang

- Version géométrique :

Théorème :
Soient E et F deux espaces vectoriels, $f : E \to F \in \mathscr{L}(E, F)$.
Soit S un supplémentaire de $\ker f$ dans E. Alors $f_{|S} : S \to \operatorname{Im} f$ est un isomorphisme.

- Version numérique :

Théorème :
On suppose E de dimension finie.
Alors $\operatorname{Im} f$ est de dimension finie, et $\dim E = \dim \operatorname{Im} f + \dim \ker f$

- Version matricielle :

Théorème :
On suppose E, F de dimensions finies p et n.

Alors il existe une base $\mathscr{B}_E$ de E et une base $\mathscr{B}_F$ de F tels que :
$\operatorname{mat}_{(\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F)} f = \begin{pmatrix} I_r & 0_{M_{r,p-r}} \\ 0_{M_{n-r,r}} & 0_{M_{n-r,p-r}} \end{pmatrix}$, où r est le rang de f.

Démonstration (dernière version) :

Soit S un supplémentaire de $\ker f$ et $(e_1, \dots e_r)$ une base de S complétée en une base $\mathscr{B}_E = (e_1, \dots e_p)$ de E où $(e_{r+1}, \dots e_p)$ est une base de $\ker f$.

Alors $(f_1, \dots f_r) = (f(e_1), \dots f(e_r))$ est libre, c'est une base de $\operatorname{Im} f$.

On complète $(f_1, \dots f_r)$ en une base $\mathscr{B}_F$ de F.

Par construction, on a bien $\operatorname{mat}_{(\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F)} f = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

C) Méthodes de calcul

1. détermination d'une base
2. Paramétrage isomorphique
3. Paramétrage épimorphique (morphisme surjectif) :

   Si $u \colon E \to F$ est un morphisme surjectif, alors $\dim F = \dim E + \dim \ker u$.

D) Exemples

On suppose ici les espaces de dimension finie :

1. Espaces munis d'une base canonique (c'est-à-dire une base qui définit l'espace)
   Exemple :

$$\mathbb{K}^n, \quad \mathbb{K}_n[X], \quad \mathbb{K}[X], \quad \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \tag{6.7}$$

2. $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$, une base étant $((v_i, 0), (0, w_j))_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$
3. $\dim \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E, F) = \dim E \times \dim F$.
4. On veut $\dim_{\mathbb{R}} H$ où

$$H = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z + t = 0 \text{ et } 2x - y - t = 0 \text{ et } x + 4y + 3z + 4t = 0\right\} \tag{6.8}$$

Méthode du pivot $\operatorname{rg} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}}_{A} = 2$; donc $\dim_{\mathbb{R}} H = \dim \ker A = 2$

(Le noyau d'une matrice A, c'est le noyau de l'application $\begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(K) \\ X & \longmapsto & AX \end{array}$)

Autre méthode

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ 2x - y - t = 0 \\ x + 4y + 3z + 4t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ 3y - 2z - 3t = 0 \\ 3y + 2z + 3t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{-1}{3} z \\ y = -t - \frac{2}{3} z \end{cases} \tag{6.9}$$

Donc $H = \left\{(\frac{-1}{3} z, -t - \frac{2}{3} z, z, t), (z, t) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

III Sommes, sommes directes de sous-espaces vectoriels

A) Somme d'une famille de sous-espaces vectoriels

- **Définition :**

  Soit E un espace vectoriel, $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E.

  $\sum_{i\in I} F_i$ est le sous-espace vectoriel engendré par $\bigcup_{i\in I} F_i$.

Théorème :

Soit H un sous-espace vectoriel de E.

Alors $H = \sum_{i\in I} F_i$ si et seulement si ces deux conditions sont réalisées :

1. $\forall i \in I, F_i \subset H$
2. $\forall h \in H, \exists (v_i)_{i\in I}$ à support fini, $\forall i \in I, v_i \in F_i$ et $h = \sum_{i\in I} v_i$. C'est-à-dire que tout élément de H est somme d'un nombre fini d'éléments des F_i.

- Cas d'une famille finie de sous-espaces vectoriels, application linéaire associée

  Soient $F_1, \dots F_p$ p sous-espaces vectoriels de E.

  On note $\begin{array}{rccc} \psi\colon & F_1 \times \dots \times F_p & \longrightarrow & E \\ & (v_1, \dots v_p) & \longmapsto & \sum_{i=1}^{p} v_i \end{array}$.

Proposition :

ψ est une application linéaire d'image $\sum_{i=1}^{p} F_i$.

NB : ψ reflète les propriétés du système des F_i.

- Somme directe d'une famille finie :

  Définition :

  La somme $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est dite directe lorsque ψ est injective. On note alors $\bigoplus_{i=1}^{p} F_i$.

Théorème :

Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe
2. ψ est injective
3. Tout élément $\vec{v}$ de $\sum_{i=1}^{p} F_i$ s'écrit de manière unique sous la forme $\vec{v} = \sum_{i=1}^{p} \vec{f_i}$ où $\forall i \in [\![1, p]\!], \vec{f_i} \in F_i$.

- Cas de la dimension finie :

Théorème (Formule de Grassmann) :

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E, E étant de dimension finie.

Alors $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.

Démonstration :

Soit $\begin{array}{rccc} \psi\colon & F \times G & \longrightarrow & E \\ & (f, g) & \longmapsto & f + g \end{array}$.

Alors ψ est linéaire, $\operatorname{Im}\psi = F + G$, $\ker\psi = \{(f, -f), f \in F \cap G\}$.

Pour $\ker\psi$: Si $f,g \in \ker\psi$, alors $f+g=0$, donc $\underbrace{f}_{\in F} = \underbrace{-g}_{\in G}$.

Donc $f \in F \cap G$ et $(f,g) = (f,-f)$.

Réciproquement, si $f \in F \cap G$, $(f,-f) \in \ker\psi$.

Enfin, d'après le théorème du rang :

$$\underbrace{\dim F \times G}_{=\dim F + \dim G} = \dim(F+G) + \dim(F \cap G) \tag{6.10}$$

Théorème (caractérisation d'une somme directe en dimension finie) :

$\sum_{i=1}^p F_i$ est directe si et seulement si $\sum_{i=1}^p \dim F_i = \dim \sum_{i=1}^p F_i$.

Démonstration :

$\Longrightarrow$ ψ est un isomorphisme entre $F_1 \times \ldots \times F_p$ et $\sum_{i=1}^p F_i$, donc les deux espaces ont la même dimension.

$\Longleftarrow$ supposons que $\sum_{i=1}^p \dim F_i = \dim \sum_{i=1}^p F_i$. Alors $\psi \colon F_1 \times \ldots \times F_p \to \sum\limits_{i=1}^p F_i$ est linéaire, surjective entre deux espaces de même dimension, donc ψ est bijective, et $\sum_{i=1}^p F_i$ est directe.

Proposition :

Si $\sum_{i=1}^p F_i$ est directe, et si pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $\mathscr{B}_i$ est une base de F_i, alors $\bigcup_{i\in[\![1,p]\!]} \mathscr{B}_i$ est une base de $\sum_{i=1}^p F_i$.

Démonstration :

Soient $\mathscr{B}_1, \ldots \mathscr{B}_p$ des bases de $F_1, \ldots F_p$.

Alors $\mathscr{B}_1 \times \{(0,..,0)\} \cup \{0\} \times \mathscr{B}_2 \times \{(0,\ldots 0)\} \cup \ldots \cup \{(0,\ldots 0)\} \times \mathscr{B}_p$ est une base de $\prod_{i=1}^p F_i$.

Son image par ψ est $\bigcup_{i=1}^p \mathscr{B}_i$. Comme ψ, $\bigcup_{i=1}^p \mathscr{B}_i$ est une base de $\operatorname{Im}\psi = \sum_{i=1}^p F_i$.

B) Cas particulier de deux sous-espaces vectoriels

Proposition :

La somme de deux sous-espaces vectoriels F et G est directe si et seulement si $F \cap G = \{0\}$.

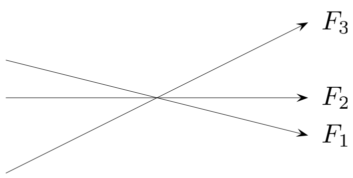
Démonstration :

Soit $\begin{array}{rccc}\psi\colon & F \times G & \longrightarrow & F+G \\ & (f,g) & \longmapsto & f+g\end{array}$.

Alors $\ker\psi = \{(f,-f), f \in F \cap G\}$.

Donc $F+G$ est directe si et seulement si ψ est injective c'est-à-dire si et seulement si $F \cap G = \{0\}$.

Attention : Pour p sous-espaces vectoriels ($p \geqslant 3$), l'énoncé est faux. Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$:



Remarque :

$F_1+\dots+F_p$ si et seulement si $F_1 \cap F_2=\{0\}$ et $F_3 \cap (F_1+F_2)=\{0\}$ et ...et $F_p \cap (\sum_{i=1}^{p-1} F_i)=\{0\}$.

Théorème :

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E, où E est de dimension finie.

Alors deux des conditions suivantes entraînent la troisième :

1. $F+G=E$
2. $F\cap G=\{0\}$
3. $\dim F+\dim G=\dim E$.

Dans ce cas, on a $E=F\oplus G$.

Définition :

La dimension de tout supplémentaire de F dans E s'appelle la codimension de F, notée $\operatorname{codim}(F)$. Ainsi, $\dim F+\operatorname{codim}(F)=\dim E$.

C) Sous-espaces supplémentaires et projecteurs

Définition :

Soient $F_1,\dots F_p$ des sous-espaces vectoriels de E.

$F_1,\dots F_p$ sont supplémentaires lorsque $E=\bigoplus_{i=1}^p F_i$, ou ce qui revient au même lorsque tout élément $\vec{v}$ de E s'écrit de manière unique $\vec{v}=\sum_{i=1}^p f_i$ où $\forall i\in[\![1,p]\!], f_i\in F_i$.

Théorème :

On suppose que $E=\bigoplus_{i=1}^p F_i$. Alors il existe $\pi_1,\dots\pi_p$ endomorphismes de E tels que $\pi_1+\dots+\pi_p=\mathrm{Id}_E$ et $\forall i\in[\![1,p]\!], \operatorname{Im}\pi_i=F_i$. De plus, pour tous i et j distincts, on a $\pi_i\circ\pi_j=0$ et $\pi_i^2=\pi_i$. Enfin, les π_i sont uniques.

Démonstration :

Existence Pour $\vec{v}=\sum_{i=1}^p f_i$ avec $\forall i\in[\![1,p]\!], f_i\in F_i$, on pose $\pi_i(\vec{v})=f_i$.

Alors :

Pour tout $i\in[\![1,p]\!]$, π_i est une application (la décomposition est unique)

Les π_i sont linéaires, d'image incluse dans F_i.

De plus, pour $a\in F_i$, on a $\pi_i(a)=a$, donc $F_i\subset \operatorname{Im}\pi_i$, d'où $F_i=\operatorname{Im}\pi_i$.

Enfin, $\sum_{i=1}^p \pi_i=\mathrm{Id}_E$ car $\forall\vec{v}\in E, \vec{v}=\prod_{i=1}^p \pi_i(\vec{v})$.

Unicité On suppose que deux familles $(\pi_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ et $(\pi'_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ vérifient les deux conditions.

Soit $\vec{v}\in E$. Alors $\vec{v}=\sum_{i=1}^p \underbrace{\pi_i(\vec{v})}_{\in F_i}=\sum_{i=1}^p \underbrace{\pi'_i(\vec{v})}_{\in F_i}$.

Donc par unicité de la décomposition, $\forall i\in[\![1,p]\!], \pi_i(\vec{v})=\pi'_i(\vec{v})$.

Donc $\forall i\in[\![1,p]\!], \pi_i=\pi'_i$.

Soit $\vec{v}\in E$. Alors pour tout $k\in[\![1,p]\!]$, $\pi_k(\vec{v})\in E$, et donc :

$$\underbrace{\pi_k(\vec{v})}_{\in F_k}=\sum_{i=1}^p \underbrace{\pi_i\circ\pi_k(\vec{v})}_{\in F_i} \tag{6.11}$$

Donc par unicité de la décomposition, $\pi_i \circ \pi_k(\vec{v}) = 0$ si $i \neq k$, et $\pi_k^2(\vec{v}) = \pi_k(\vec{v})$.

D'où le résultat voulu pour les applications.

Proposition (Étude réciproque) :

Soient $\pi_1, \dots \pi_p$ des endomorphismes de E tels que :

$$\sum_{i=1}^{p} \pi_i = \mathrm{Id}_E, \qquad \forall i \in [\![1,p]\!], \pi_i^2 = \pi_i, \qquad \forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, i \neq j \implies \pi_i \circ \pi_j = 0 \tag{6.12}$$

Alors $E = \bigoplus_{i=1}^{p} \operatorname{Im} \pi_i$, et les π_i sont les projecteurs associés.

Démonstration :

On doit montrer que tout élément de E s'écrit de manière unique $\sum_{i=1}^{p} f_i$ où $\forall i \in [\![1,p]\!], f_i \in \operatorname{Im} \pi_i$.

Existence de l'écriture

$$\forall \vec{v} \in E, \vec{v} = \sum_{i=1}^{p} \pi_i(\vec{v}) \quad (\text{car } \sum_{i=1}^{p} \pi_i = \mathrm{Id}_E) \tag{6.13}$$

Unicité Il suffit de la montrer pour 0 (c'est-à-dire montrer l'injectivité de ψ)

Supposons que $0 = \sum_{i=1}^{p} f_i$ où $\forall i \in [\![1,p]\!], f_i \in \operatorname{Im} \pi_i$.

Pour $i \in [\![1,p]\!]$, on a alors $f_i = \pi_i(f_i)$.

En effet : il existe $g_i \in E$ tel que $f_i = \pi_i(g_i)$, donc $\pi_i(f_i) = \pi_i^2(g_i) = \pi_i(g_i) = f_i$.

Alors $0 = \pi_i(0) = \sum_{k=1}^{p} \pi_i \circ \pi_k(f_k) = \pi_i(f_i) = f_i$. Donc $\forall i \in [\![1,p]\!], f_i = 0$.

Enfin, (6.13) montre que π_i est le projecteur sur F_i dans la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{p} \operatorname{Im} \pi_i$.

D) Sommes directes et applications linéaires

Théorème :

Soient $E_1, \dots E_p$ supplémentaires dans un espace vectoriel E, et F un espace vectoriel. Alors l'application $\begin{array}{rccl} A \colon & \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E,F) & \longrightarrow & \prod_{i=1}^{p} \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E_i,F) \\ & u & \longmapsto & (u_{|E_1}, \dots, u_{|E_p}) \end{array}$ est un isomorphisme, c'est-à-dire que se donner $u \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$, c'est se donner p applications $u_i \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E_i,F)$.

Démonstration :

Déjà, A est linéaire.

Construisons un isomorphisme réciproque :

Soient $\pi_1, \dots \pi_p$ les projecteurs relatifs à $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$.

Alors l'application $\begin{array}{rccl} B \colon & \prod_{i=1}^{p} \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E_i,F) & \longrightarrow & \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E,F) \\ & (u_1, \dots u_p) & \longmapsto & \sum_{i=1}^{p} u_i \circ \pi_i \end{array}$ est linéaire,

et $B \circ A = \mathrm{Id}_{\mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E,F)}$, $A \circ B = \mathrm{Id}_{\prod_{i=1}^{p} \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E_i,F)}$.

Donc A est bijective, donc un isomorphisme.

IV Dualité

A) Forme linéaire et espace dual

- **Définition :**
  Une forme linéaire sur E, c'est une application linéaire $E \to \mathbb{K}$.
  On note $E^* = \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E, \mathbb{K})$, espace dual de E (dual algébrique)

- Cas où E est de dimension finie :

  On a $\dim E^* \dim E$ (car $\dim \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E, \mathbb{K}) = \dim E \times \dim \mathbb{K}$)

  Attention : Il n'existe pas en général d'isomorphisme *naturel* entre E et E^*.

  Si E n'est pas de dimension finie, E^* et E n'ont aucune raison d'être isomorphes.
  Exemple :

  $\mathbb{R}[X]^*$ n'est pas isomorphe à $\mathbb{R}[X]$.

  Montrons pour cela que $\mathbb{R}[X]^*$ n'a pas une base dénombrable.

  On va chercher une famille libre équipotente à $\mathbb{R}$:

  - À tout réel a, on associe $\begin{array}{rccc} \varphi_a \colon & \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & P & \longmapsto & P(a) \end{array}$.
  - Alors $\varphi_a \in \mathbb{R}[X]^*$.
  - $(\varphi_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est libre : soit $(a_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ une famille de réels distincts.

    Supposons que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \varphi_{a_i} = 0$, c'est-à-dire que $\forall P \in \mathbb{K}[X], \sum_{i=1}^{p} \lambda_i P(a_i) = 0$.

    On prend alors, pour $i \in [\![1,p]\!]$, $P_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{p} X - a_j$, et on a alors $\lambda_i = 0$.

    Donc la famille est libre.

    Supposons maintenant que $\mathbb{K}[X]^*$ admet une base dénombrable $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

    Soit $N \in \mathbb{N}$. Alors $\{a \in \mathbb{R}, \varphi_a \in \mathrm{Vect}(\psi_0, \dots \psi_N)\} = I_N$ est fini, de cardinal $\leqslant N + 1$.

    Donc $\{a \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \varphi_a \in \mathrm{Vect}(\psi_0, \dots \psi_N)\}$ est fini ou dénombrable (c'est $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$)

    Or, $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base, donc toute forme linéaire φ_a est combinaison linéaire d'un nombre fini de ψ_k. Donc $\{a \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \varphi_a \in \mathrm{Vect}(\psi_0, \dots \psi_N)\} = \mathbb{R}$, ce qui est impossible car $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

B) Hyperplan (en dimension quelconque)

Théorème :

Soit H un sous-espace vectoriel de E. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) Il existe $\vec{v} \neq 0$ tel que $E = H \oplus \mathbb{K}\vec{v}$.

(2) Il existe $\varphi \in E^* \backslash \{0\}$ tel que $H = \ker \varphi$.

Un sous-espace vectoriel qui vérifie ces conditions s'appelle un hyperplan de E. Une forme linéaire vérifiant (2) s'appelle une équation de H.

Propriété :

deux équations de H sont proportionnelles.

Démonstration :

(1) $\Longrightarrow$ (2) supposons que $E = H \oplus \mathbb{K}\vec{v}$.

Soit π le projecteur sur $\mathbb{K}\vec{v}$ parallèlement à H.

Alors $\forall x \in E, \pi(x) = \varphi(x)\vec{v}$, où $\varphi(x) \in \mathbb{K}$.

Alors l'application φ ainsi définie est linéaire.

On a de plus $\pi(\vec{v}) = \vec{v}$, donc $\varphi(\vec{v}) = 1$, et donc $\varphi \neq 0$.

Enfin, $\ker\varphi = \ker\pi = H$.

(2) $\Longrightarrow$ (1) Soit $\varphi \in E^*\backslash\{0\}$. On pose $H = \ker\varphi$.

Soit $\vec{v} \in E$ tel que $\varphi(\vec{v}) \neq 0$, montrons qu'alors $E = H \oplus \mathbb{K}\vec{v}$.

Soit $x \in E$. Alors $x = \underbrace{\frac{\varphi(x)}{\varphi(\vec{v})}\vec{v}}_{\in\mathbb{K}\vec{v}} + \underbrace{\left(x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(\vec{v})}\vec{v}\right)}_{\in\ker\varphi}$.

Donc $E = H + \mathbb{K}\vec{v}$.

Soit $x \in H \cap \mathbb{K}\vec{v}$. Il existe alors $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x = \lambda\vec{v}$. Donc, comme $\varphi(x) = 0$ et $\varphi(\vec{v}) \neq 0$, on a nécessairement $\lambda = 0$. Donc $E = H \oplus \mathbb{K}\vec{v}$.

- Pour la propriété : Soit $(\varphi, \psi) \in (E^*\backslash\{0\})^2$ tel que $\ker\varphi = \ker\psi = H$.

  Soit $\vec{v} \in E\backslash H$. Alors $E = H \oplus \mathbb{K}\vec{v}$.

  On pose $\lambda = \frac{\varphi(\vec{v})}{\psi(\vec{v})}$. Alors φ et $\lambda\psi$ coïncident sur H (elles y sont nulles), et sur $\mathbb{K}\vec{v}$ (par définition de λ). Elles coïncident donc partout par linéarité.

Cas particulier :

Soit E de dimension finie. Alors H sous-espace vectoriel de E est un hyperplan si et seulement si $\dim H = \dim E - 1$.

C) Formes bilinéaires de dualité

Théorème, définition :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, E^* son dual. Alors l'application $\begin{array}{rccc} \langle\cdot,\cdot\rangle\colon & E^* \times E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (\varphi, \vec{v}) & \longmapsto & \varphi(\vec{v}) \end{array}$ est bilinéaire.

Cette application s'appelle forme bilinéaire de dualité.

Dans toute la suite, E est un espace de dimension finie n.

Théorème :

Si E est de dimension finie, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est une dualité parfaite, c'est-à-dire qu'elle a les propriétés fondamentales du produit scalaire, à savoir :

1. Pour $f \in E^*$, $f \neq 0$ si et seulement si il existe $\vec{v} \in E$ tel que $\langle f, \vec{v}\rangle \neq 0$.
2. Pour $\vec{v} \in E$, $\vec{v} \neq 0$ si et seulement si il existe $\varphi \in E^*$ telle que $\langle\varphi, \vec{v}\rangle \neq 0$.

Démonstration :

1. C'est la « définition » d'une fonction nulle

2. Soit $\vec{v} \in E \setminus \{0\}$.

   Soit H un supplémentaire dans E de $\mathbb{K}\vec{v}$.

   Alors H est un hyperplan (car de dimension $n-1$)

   Il existe donc $\varphi \in E^* \setminus \{0\}$ telle que $H = \ker\varphi$. Comme $\vec{v} \notin H$, on a $\varphi(\vec{v}) \neq \vec{0}$, c'est-à-dire $\langle \varphi, \vec{v} \rangle \neq 0$.

D) Formes linéaires coordonnées et bases duales

Soit $(e_1, e_2, \dots e_n)$ une base de E.

Alors tout $x \in E$ s'écrit de manière unique $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$.

Théorème :

Avec les notations précédentes, on pose pour $x \in E$, $\varphi_i(x) = x_i$ ($i \in [\![1, n]\!]$). Alors :

1. $\forall i \in [\![1, n]\!], \varphi_i \in E^*$
2. $(\varphi_1, \dots \varphi_n)$ est une base de E^*. On a : $\forall i, j \in [\![1, n]\!], \varphi_i(e_j) = \delta_{i,j}$
3. $\forall x \in E, x = \sum_{i=1}^{n} \langle \varphi_i, x \rangle e_i$; $\quad \forall \psi \in E^*, \psi = \sum_{i=1}^{n} \langle \psi, e_i \rangle \varphi_i$.

Définition :

$(\varphi_1, \dots \varphi_n)$ s'appelle la base duale de $(e_1, \dots e_n)$.

Elle est usuellement notée $(e_1^*, \dots e_n^*)$.

Attention : Cette notation peut laisser penser qu'il existe une application $u\colon \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E^* \\ e & \longmapsto & e^* \end{array}$ telle que si $(e_1, \dots e_n)$ est une base de E, alors $(u(e_1), \dots u(e_n))$ est la base duale, ce qui est faux ; en fait, e_1^* dépend de *toute* la base $(e_1, \dots e_n)$ et il en est de même pour les autres.

Exemple :

Dans $E = \mathbb{R}^2$, (e_1, e_2) la base canonique.

La base duale de (e_1, e_2) est (φ_1, φ_2), avec $\varphi_1\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x \end{array}$, $\varphi_2\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & y \end{array}$.

Nouvelle base : $v_1 = e_1$, $v_2 = e_1 + e_2$.

Base duale de (v_1, v_2) :

On a $(x, y) = xe_1 + ye_2 = xv_1 + y(v_2 - v_1) = (x - y)v_1 + yv_2$.

La base duale de (v_1, v_2) est donc (ψ_1, ψ_2) avec $\psi_1(x, y) = x - y$, $\psi_2(x, y) = y$.

Démonstration (du théorème) :

1. Clair.
2. Montrons que $(\varphi_1, \dots \varphi_n)$ est libre.

   Soient $\lambda_1, \dots \lambda_n \in \mathbb{K}$, supposons que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i = 0$.

   Soit $j \in [\![1, n]\!]$. Pour $x = e_j$, on a $\forall i \in [\![1, n]\!], \varphi_i(e_j) = \delta_{i,j}$, donc $\lambda_j = 0$.
3. Formule pour x : c'est la définition des φ_i.

   Soit $\psi \in E^*$. On note $\theta = \sum_{i=1}^{n} \langle \psi, e_i \rangle \varphi_i$.

   On a alors, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\theta(e_k) = \sum_{j=1}^{n} \psi(e_j).\varphi_j(e_k) = \psi(e_k)$.

   Donc θ et ψ coïncident sur une base, donc sont égales.

Théorème :

Pour toute base $\mathscr{B}^*$ de E^*, il existe une unique base $\mathscr{B}$ de E dont $\mathscr{B}^*$ est la base duale.

Démonstration :

Soit $(\varphi_1, \dots \varphi_n)$ une base de E^*. On cherche $(e_1, \dots e_n)$ base de E telle que $\forall i, j \in [\![1, n]\!], \varphi_i(e_j) = \delta_{i,j}$. Alors on aura $\forall x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E, \varphi_k(x) = x_k$, c'est-à-dire que $(\varphi_1, \dots \varphi_n)$ sera la base duale de $(e_1, \dots e_n)$.

Soit $\theta\colon \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ \vec{v} & \longmapsto & (\varphi_1(\vec{v}), \dots \varphi_n(\vec{v})) \end{array}$. On va montrer que θ est un isomorphisme.

Déjà, $\dim E = \dim \mathbb{K}^n$.

Soit $\vec{v} \in \ker\theta$. Alors $\forall i \in [\![1, n]\!], \varphi_i(\vec{v}) = 0$. Mais comme $(\varphi_1, \dots \varphi_n)$ est une base de E^*, on a par combinaison linéaire $\forall \psi \in E^*, \psi(\vec{v}) = 0$, donc $\vec{v} = 0$ (dualité parfaite)

Donc θ est injective, donc bijective.

Ainsi, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, il existe un unique $x_k \in E$ tel que $\theta(e_k) = (0, \dots, \underset{k}{1}, \dots 0)$.

Définition :

Si $\mathscr{B}^*$ est la base duale de $\mathscr{B}$, on dit aussi que $\mathscr{B}$ est la base antéduale de $\mathscr{B}^*$.

E) Orthogonalité

Définition :

Soit A une partie de E.

On appelle orthogonal de A dans E^* la partie ${}^\perp A$ de E^* définie par :

$$ {}^\perp A = \{\varphi \in E^*, \forall a \in A, \langle \varphi, a \rangle = 0\} \tag{6.14}$$

L'orthogonal d'une partie B de E^* dans E est la partie $B^\perp$ de E définie par :

$$ B^\perp = \{x \in E, \forall \varphi \in B, \langle \varphi, x \rangle = 0\} = \bigcap_{\varphi \in B} \ker \varphi \tag{6.15}$$

Propriétés :

1. Soit $A \subset A' \subset E$.

   Alors ${}^\perp A$ est un sous-espace vectoriel de E^*, et on a de plus :

$$ {}^\perp \varnothing = E^* \supset {}^\perp A \supset {}^\perp A' \supset {}^\perp E = 0 \tag{6.16}$$

2. Analogue pour E^*.

Théorème :

1. Soit A une partie de E.
   (a) On a ${}^\perp A = {}^\perp \operatorname{Vect}(A)$
   (b) Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors $\dim F + \dim {}^\perp F = \dim E$, et $({}^\perp F)^\perp = F$
2. De même dans E^*.

Corollaire :

Soient $\varphi_1, \dots \varphi_p$ p formes linéaires sur E, et $\psi \in E^*$. Alors ψ est combinaison linéaire des φ_i si et seulement si $\bigcap_{i=1}^p \ker \varphi_i \subset \ker \psi$.

Démonstration :

1. (a) Déjà, $A \subset \mathrm{Vect}(A)$, donc ${}^\perp\,\mathrm{Vect}(A) \subset {}^\perp A$.

   Soit $\varphi \in {}^\perp A$. Alors $\forall a \in A, \varphi(a) = 0$, donc $\forall a \in \mathrm{Vect}(A), \varphi(a) = 0$, donc $\varphi \in {}^\perp\,\mathrm{Vect}(A)$, d'où l'autre inclusion et l'égalité

   (b) Soit $(e_1, \dots e_p)$ une base de F, qu'on complète en une base $(e_1, \dots e_n)$ de E.

   Soit $(e_1^*, \dots e_n^*)$ sa base duale. Alors $\varphi = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i^* \in {}^\perp F$ si et seulement si $\forall j \in [\![1, p]\!]$, $\varphi(e_j) = 0$ (car ${}^\perp F = {}^\perp\{e_1, \dots e_p\}$)

   Or, $\forall k \in [\![1, n]\!] \lambda_k = \langle \varphi, e_k \rangle = \varphi(e_k)$.

   Donc $\varphi = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i^* \in {}^\perp F$ si et seulement si $\forall k \in [\![1, p]\!] \lambda_k = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $\varphi \in \mathrm{Vect}(e_{p+1}^*, \dots e_n^*)$.

   Donc ${}^\perp F = \mathrm{Vect}(e_{p+1}^*, \dots e_n^*)$, d'où $\dim {}^\perp F = n - p$.

   (L'autre égalité sera montrée en 3)

2. Analogue :

   Pour $B \subset E^*$, $B^\perp = (\mathrm{Vect}(B))^\perp$.

   Soit F_* un sous-espace vectoriel de E^*, $(\varphi_1, \dots \varphi_n)$ une base de E^* telle que $(\varphi_1, \dots \varphi_p)$ soit une base de F_*.

   Soit $(e_1, \dots e_n)$ la base de E antéduale de $(\varphi_1, \dots \varphi_p)$.

   Soit $\vec{v} \in E$; alors $\vec{v} = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in F_*^\perp$ si et seulement si $\forall j \in [\![1, p]\!], \varphi_j(\vec{v}) = 0$ (car $F_*^\perp = \{\varphi_1, \dots \varphi_p\}^\perp$)

   Or, $\forall k \in [\![1, n]\!], x_k = \varphi_k(\vec{v})$. Donc $\vec{v} \in F_*^\perp$ si et seulement si :

   $$\forall i \in [\![1, p]\!], x_i = 0 \tag{6.17}$$

   Donc $F_*^\perp = \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \dots e_n)$.

3. Déjà, $F \subset ({}^\perp F)^\perp$ car si on prend $f \in F$ et $\varphi \in {}^\perp F$, alors $\langle \varphi, f \rangle = 0$.

   De plus, $\dim({}^\perp F)^\perp = n - \dim {}^\perp F = \dim F$, d'où l'égalité.

   Pour le corollaire :

   Si $\psi \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \dots \varphi_p)$, ψ s'écrit $\psi = \sum_{i=1}^p \lambda_i \varphi_i$, donc $\bigcap_{i=1}^p \ker \varphi_i \subset \ker \psi$.

   Réciproquement, supposons que $\bigcap_{i=1}^p \ker \varphi_i \subset \ker \psi$.

   Alors $\{\varphi_1, \dots \varphi_p\}^\perp \subset \{\psi\}^\perp$, soit $\mathrm{Vect}(\varphi_1, \dots \varphi_p)^\perp \subset \mathrm{Vect}(\psi)^\perp$.

   Et donc ${}^\perp(\mathrm{Vect}(\varphi_1, \dots \varphi_p)^\perp) \supset {}^\perp(\mathrm{Vect}(\psi)^\perp)$, c'est-à-dire $\mathbb{K}\psi \subset \mathrm{Vect}(\varphi_1, \dots \varphi_p)$.

F) Application aux sous-espaces vectoriels

- Représentation des familles génératrices :

  Si $(v_1, \dots v_p)$ engendre F, alors $F = \{\sum_{i=1}^p \lambda_i v_i, \lambda_i \in \mathbb{K}\}$, c'est-à-dire que l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \longrightarrow & F \\ (\lambda_1, \dots \lambda_p) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^p \lambda_i v_i \end{array}$

  est un paramétrage surjectif. On a alors $\dim F = \mathrm{rg}(v_1, \dots v_p)$.

- Mode de représentation par équations linéaires :

  Soient F un sous-espace vectoriel de E, $\varphi_1, ..\varphi_p \in E^*$.

  On dit que $\varphi_1, ..\varphi_p$ est un système d'équations de F lorsque :

  $$\forall v \in E, (v \in F \iff \forall j \in [\![1, p]\!], \varphi_j(v) = 0) \tag{6.18}$$

  C'est-à-dire lorsque $F = \bigcap_{i=1}^{p} \ker \varphi_i$, ou encore lorsque $F = \{\varphi_1, \ldots \varphi_p\}^{\perp}$.

  Dans ce cas, on a $\dim F = \dim E - \mathrm{rg}(\varphi_1, \ldots \varphi_p)$.

  En effet, $\mathrm{rg}(\varphi_1, \ldots \varphi_p) = \dim(\mathrm{Vect}(\varphi_1, \ldots \varphi_p)) = \dim {}^{\perp}F$.