



Chapitre 6 : Algèbre linéaire

I Catégorie des \mathbb{K} -ev

On considère un corps commutatif \mathbb{K} quelconque

Voir cours de sup pour les différentes définitions...

A) Combinaisons linéaires quelconques

Soit E un \mathbb{K} -ev, $(v_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E , $(\lambda_i)_{i \in I}$ une famille de scalaires (de \mathbb{K}) à support fini.

On pose $\sum_{i \in I} \lambda_i v_i = \sum_{i \in \text{supp}(\alpha_i)} \lambda_i v_i$: combinaison linéaire des v_i .

Cas particulier :

Combinaison linéaire triviale : $\forall i \in I, \lambda_i = 0$

Combinaison linéaire nulle : $\sum_{i \in I} \lambda_i v_i = 0$.

Remarque :

Si une combinaison linéaire est triviale, alors elle est nulle.

B) Espace vectoriel engendré par une partie ou une famille

Théorème, définition :

Soit E un \mathbb{K} -ev et A une partie de E .

1. L'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant A est un espace vectoriel, appelé espace vectoriel engendré par A , noté $\text{Vect}_{\mathbb{K}}(A)$.
2. $\text{Vect}_{\mathbb{K}}(A)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A (au sens de l'inclusion)
3. $\text{Vect}_{\mathbb{K}}(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de A .

Définition :

On dit que A est génératrice lorsque $\text{Vect}_{\mathbb{K}}(A) = E$.

C) Famille ou partie libre**Définition :**

La famille $(v_i)_{i \in I}$ est dite libre lorsque la combinaison linéaire triviale est la seule combinaison linéaire nulle, c'est-à-dire :

Pour tout $(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$ à support fini, $\sum_{i \in I} \lambda_i v_i = 0 \implies \forall i \in I, \lambda_i = 0$.

Elle est dite liée sinon, c'est-à-dire lorsqu'il existe $(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$ famille de scalaires non tous nuls telle que $\sum_{i \in I} \lambda_i v_i = 0$.

Théorème :

1. Toute sous famille d'une famille libre est libre
2. Une famille est libre si et seulement si toute sous-famille finie est libre.

Démonstration :

1. Soit $(v_i)_{i \in I}$ une famille libre de E , et soit J une partie de I .

Soit $(\mu_i)_{i \in J} \in \mathbb{K}^J$ à support fini, supposons que $\sum_{i \in J} \mu_i v_i = 0$.

On pose, pour $i \in I$, $\lambda_i = \begin{cases} \mu_i & \text{si } i \in J \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Alors $(\lambda_i)_{i \in I}$ est à support fini, et $\sum_{i \in I} \lambda_i v_i = \sum_{i \in J} \mu_i v_i = 0$.

Donc $\forall i \in I, \lambda_i = 0$. Donc $\forall i \in J, \mu_i = 0$.

Donc $(v_i)_{i \in J}$ est libre.

2. Un premier sens découle déjà du point précédent.

Pour l'autre, montrons la contraposée :

Supposons $(v_i)_{i \in I}$ liée. Alors il existe $(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$ à support fini non tous nuls tel que $\sum_{i \in I} \lambda_i v_i = 0$.

Si on prend $J = \text{supp}(\lambda)$, alors J est fini, et $\sum_{i \in J} \lambda_i v_i = 0$.

D) Base

C'est une famille \mathcal{F} libre et génératrice, ou une famille de E telle que tout élément x de E s'écrive de manière unique comme combinaison linéaire des éléments de \mathcal{F} .

Exemples

- $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$ car tout polynôme s'écrit de manière unique $\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k X^k$ où $\text{supp}(a)$ est fini.
- Famille orthogonale pour un produit scalaire :

Soit $E = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \forall x \in \mathbb{R}, f(x + 2\pi) = f(x)\}$.

Pour $k \in \mathbb{Z}$, on pose $e_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$
 $t \longmapsto e^{ikt}$.

Proposition :

$(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est libre dans E .

Démonstration :

Déjà, $\forall (k, l) \in \mathbb{Z}^2, \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e_k(t) \overline{e_l(t)} dt = S_{k,l}$ est un produit scalaire, et $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est orthonormale pour ce produit scalaire.

Soit $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ une famille de complexes à support fini, supposons que $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \lambda_k e_k = 0$.

Alors $\forall l \in \mathbb{Z}, \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\sum_{k \in \mathbb{Z}} \lambda_k e_k(t)) \bar{e}_l(t) dt = 0$

Donc $\forall l \in \mathbb{Z}, \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \text{supp } \lambda} \lambda_k \int_0^{2\pi} e_k(t) \bar{e}_l(t) dt = \lambda_l = 0$

Donc $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est libre.

- Application aux équations différentielles linéaires

Rappel :

Résolution de $(D) : y'' + ay' + by = 0, a, b \in \mathbb{C}$

Équation caractéristique :

$$r^2 + ar + b = 0 \tag{6.1}$$

(Condition nécessaire et suffisante pour que $t \mapsto e^{rt}$ soit solution)

- ◇ 1^{er} cas : Si $\Delta = a^2 - 4b \neq 0$, alors l'ensemble des solutions de D est $\text{Vect}_{\mathbb{C}} \{t \mapsto e^{r_1 t}, t \mapsto e^{r_2 t}\}$ où r_1 et r_2 sont les racines de (6.1).
- ◇ 2^{ème} cas : si $\Delta = 0$, l'ensemble des solutions de D est $\text{Vect}_{\mathbb{C}} \{t \mapsto e^{rt}, t \mapsto te^{rt}\}$ où r est racine de (6.1).

Avec second membre exponentiel et polynôme :

$$y'' + ay' + by = f(t) = \sum_{j=1}^n e^{\alpha_j t} P_j(t) \quad \text{où } \alpha_j \in \mathbb{C}, P_j \in \mathbb{C}[X] \tag{6.2}$$

On cherche une solution particulière en superposant (= en ajoutant) des solutions particulières des équations $(D_j) : y'' + ay' + by = e^{\alpha_j t} P_j(t) :$

Si α_j est racine de multiplicité m ($m = 0, 1, 2$) de (6.1), alors D_j a une solution de la forme $t \mapsto t^m Q_i(t) e^{\alpha_i t}$ où Q_i est de même degré que P_i .

Théorème :

La famille des applications $t \mapsto t^m e^{\alpha t}, m \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{C}$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

L'espace engendré par cette famille s'appelle l'espace des exponentielles polynômes.

Démonstration :

- ◇ Cas particulier :

Déjà, la famille $f_\alpha : t \mapsto e^{\alpha t}$ est libre.

En effet, vérifions que toute sous-famille finie G de $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{C}}$ est libre.

Par récurrence sur $\text{card}(G) = p$.

- Pour $p = 0$ ok.
- Pour $p = 1$ ok car $\forall \alpha \in \mathbb{C}, f_\alpha \neq 0$
- Soit $p \in \mathbb{N}$, supposons que toute sous-famille G de cardinal p est libre.

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p+1} \in \mathbb{C}$ distincts.

Supposons que $\sum_{j=1}^{p+1} \lambda_j f_{\alpha_j} = 0$ pour $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{p+1}) \in \mathbb{C}^{p+1}$

Alors $\forall t \in \mathbb{R}, \sum_{j=1}^{p+1} \lambda_j e^{\alpha_j t} = 0$

Donc $\forall t \in \mathbb{R}, \sum_{j=1}^{p+1} \lambda_j e^{(\alpha_j - \alpha_p + 1)t} = 0$

Donc en dérivant $\forall t \in \mathbb{R}, \sum_{j=1}^p \lambda_j (\alpha_j - \alpha_{p+1}) e^{(\alpha_j - \alpha_{p+1})t} = 0$

Donc, par hypothèse de récurrence appliquée à $(\lambda_j (\alpha_j - \alpha_{p+1}))_{j \in \llbracket 1, p \rrbracket}$, on a :

$\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \lambda_j (\alpha_j - \alpha_{p+1}) = 0$. Donc $\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \lambda_j = 0$, puis $\lambda_{p+1} = 0$

◇ Cas général :

On pose $f_{\alpha, n} : t \mapsto t^n e^{\alpha t}$.

Une combinaison linéaire non triviale des $f_{\alpha, n}$ s'écrit $\varphi(t) = \sum_{j=1}^r P_j(t) e^{\alpha_j t}$.

Montrons par récurrence sur $p = \sum_{j=1}^r \deg P_j$ qu'une telle somme n'est pas nulle.

— Si $\sum_{j=1}^r \deg P_j = 0$, on est ramené au cas précédent.

— Soit $p \in \mathbb{N}$, supposons que si $\sum_{j=1}^r \deg P_j \leq p$, alors $\sum_{j=1}^r P_j(t) e^{\alpha_j t} \neq 0$.

Si maintenant $\sum_{j=1}^r \deg P_j = p + 1$:

Supposons que $\sum_{j=1}^r P_j(t) e^{\alpha_j t} = 0$.

On peut supposer par exemple que $\deg P_r \geq 1$.

Alors $\forall t \in \mathbb{R}, 0 = \varphi(t) e^{-\alpha_r t} = \sum_{j=1}^r P_j(t) e^{(\alpha_j - \alpha_r)t} = \sum_{j=1}^r P_j(t) e^{\beta_j t}$.

En dérivant, $\forall t \in \mathbb{R}, \sum_{j=1}^r (P_j'(t) + \beta_j P_j(t)) e^{\beta_j t} = 0$.

Ainsi, comme $\beta_r = 0$, si on pose $Q_j = P_j' + \beta_j P_j$, on obtient :

$$\deg Q_j \leq \begin{cases} \deg P_j & \text{si } j < r \\ \deg P_j - 1 & \text{si } j = r \end{cases} \quad (6.3)$$

Donc par hypothèse de récurrence (on a ainsi $\sum_{j=1}^r \deg Q_j \leq p$), on a :

$$\forall j \in \llbracket 1, r \rrbracket, Q_j = 0 \quad (6.4)$$

Donc en particulier $P_r = \text{cte}$, ce qui est impossible car $\deg P_r \geq 1$.

E) Familles de polynômes

Proposition (Utilisation du degré – hors programme) :

Soit $A \subset \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$.

1. Si $\deg|_A : A \rightarrow \mathbb{N}$ est injective, alors A est libre.
2. Si $\deg|_A : A \rightarrow \mathbb{N}$ est surjective, alors A est génératrice.

Proposition :

Soient $P_0, P_1, \dots, P_n \in \mathbb{K}[X]$ tels que $\forall i, \text{val}(P_i) = i$ (c'est-à-dire $X^i | P_i$ et $X^{i+1} \nmid P_i$, ou encore 0 est racine de multiplicité i de P_i). Alors (P_0, P_1, \dots, P_n) est libre.

Cas particulier :

Pour $n \geq 1$ fixé, on pose $B_p = X^p(1 - X)^p$ (polynôme de Bernstein)

Alors (B_0, \dots, B_n) est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Démonstration :

La famille est libre :

Si $\sum_{j=0}^n \lambda_j P_j = 0$, alors en remplaçant X par 0 on obtient $\lambda_0 = 0$.

Comme 0 est racine d'ordre i de P_i , on a $0 = \sum_{j=1}^n \lambda_j P_j'(0) = \lambda_1$, donc $\lambda_1 = 0 \dots$

F) Application linéaire

Comment définir une application linéaire de E dans F ?

À l'aide d'une base de E :

Théorème :

Soit $(e_i)_{i \in I}$ une base de E (éventuellement infinie)

Soit $(v_i)_{i \in I} \in F^I$. Alors il existe une unique application linéaire de E dans F telle que $\forall i \in I, f(e_i) = v_i$.

Remarques

- Si $(e_i)_{i \in I}$ est supposée seulement génératrice, il y a au plus une application linéaire :

Si f et g conviennent, alors :

$$\forall i \in I, e_i \in \ker(f - g), \text{ donc } \text{Vect}((e_i)_{i \in I}) \subset \ker(f - g).$$

Donc $f = g$ (car $\text{Vect}((e_i)_{i \in I}) = E$).

Pour l'existence d'une application linéaire, il faut que si il y a une relation de liaison entre les e_i , il y ait la même entre les v_i .

- Si $(e_i)_{i \in I}$ est supposée libre, il existe au moins une application linéaire :

Si on note $E' = \text{Vect}((e_i)_{i \in I})$, il existe alors une unique application linéaire f' de E' dans F telle que $\forall i \in I, f'(e_i) = v_i$.

On peut de plus prolonger f' à E de manière linéaire si et seulement si E' admet un supplémentaire dans E , ce qui est toujours vrai si on admet l'axiome du choix.

Compléments**Base télescopique**

Soit \mathbb{K} un corps, \mathbb{L} une extension de \mathbb{K} (c'est-à-dire que \mathbb{K} est un sous-corps de \mathbb{L})

Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{L} -ev (en particulier, $\cdot : \mathbb{L} \times E \rightarrow E$)

Proposition :

La restriction du produit externe à $\mathbb{K} \times E$ munit E d'une structure de \mathbb{K} -ev. On note $E_{\mathbb{L}}$ le \mathbb{L} -ev initial, $E_{\mathbb{K}}$ l'espace vectoriel $(E, +, \cdot|_{\mathbb{K} \times E})$ en tant que \mathbb{K} -ev.

Exemple :

\mathbb{C} est un \mathbb{R} -ev, ou un \mathbb{Q} -ev.

Théorème :

Soit $(\vec{v}_i)_{i \in I}$ une \mathbb{L} -base de $E_{\mathbb{L}}$

Soit $(e_j)_{j \in J}$ une \mathbb{K} -base du \mathbb{K} -ev \mathbb{L} .

Alors $(e_j \cdot \vec{v}_i)$ est une \mathbb{K} -base de $E_{\mathbb{K}}$, appelée base télescopique.

Conséquence :

Si E est de \mathbb{L} -dimension finie, et \mathbb{L} de \mathbb{K} -dimension finie,

alors E est de \mathbb{K} -dimension finie, et $\dim_{\mathbb{K}} E = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{L} \times \dim_{\mathbb{L}} E$.

Cas particulier :

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{L} = \mathbb{C}$, alors $\dim_{\mathbb{R}} E = 2 \dim_{\mathbb{C}} E$, et si (v_1, \dots, v_n) est une \mathbb{C} -base de E , alors $(v_1, \dots, v_n, \mathbf{i}v_1, \dots, \mathbf{i}v_n)$ est une \mathbb{R} -base de E .

Démonstration (du théorème) :

Montrons que $(e_j \cdot \vec{v}_i)$ est libre :

Soit $(e_{j_k} \cdot \vec{v}_{i_k})_{k \in [1, p]}$ une sous famille finie de $(e_j \cdot \vec{v}_i)$.

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$, supposons que $\sum_{k=1}^p \lambda_k e_{j_k} \cdot \vec{v}_{i_k} = 0$.

Quitte à agrandir la famille des $e_{j_k} \cdot \vec{v}_{i_k}$, on peut supposer qu'elle est de la forme $(e_j \cdot \vec{v}_i)$ (où on a alors $I_0 = \{i \in I, \exists k \in [1, p], i = i_k\}$, idem pour J_0 et $p = \#J_0 \times \#I_0$)

On a ainsi $\sum_{k=1}^p \lambda_k e_{j_k} \cdot \vec{v}_{i_k} = \sum_{\substack{j \in J_0 \\ i \in I_0}} \lambda_{i,j} e_j \cdot \vec{v}_i$ (où $\lambda_{i,j} = \lambda_k$, k étant tel que $i = i_k$, $j = j_k$)

Donc $\sum_{i \in I_0} \underbrace{\left(\sum_{j \in J_0} \lambda_{i,j} e_j \right)}_{\in \mathbb{L}} \cdot \vec{v}_i = 0$

Donc comme $(\vec{v}_{i_k})_{k \in [1, p]}$ est libre, on a :

$$\forall i \in I_0, \sum_{j \in J_0} \lambda_{i,j} e_j = 0 \quad (6.5)$$

D'où, comme $(e_{j_k})_{k \in [1, p]}$ est libre : $\forall i \in I_0, \forall j \in J_0, \lambda_{i,j} = 0$

Donc $(e_j \cdot \vec{v}_i)$ est bien libre.

Soit maintenant $\vec{v} \in E$.

Il existe une famille $(\mu_i)_{i \in I}$ de \mathbb{L} à support fini telle que $\vec{v} = \sum_{i \in I} \mu_i \vec{v}_i$.

Comme $\forall i \in I, \mu_i \in \mathbb{L}$, il existe alors pour tout $i \in I$ une famille $(\lambda_{i,j})_{j \in J}$ de \mathbb{K} à support fini telle que $\mu_i = \sum_{j \in J} \lambda_{i,j} e_j$.

Alors le support de $(\lambda_{i,j})$ est fini :

En effet, si $\lambda_{i,j} \neq 0$, alors $\mu_i \neq 0$ (car $(e_j)_{j \in J}$ est \mathbb{K} -libre).

Il y a donc un nombre fini de valeurs de j possibles.

Pour chacun de ces i , il y a un nombre fini de valeurs de j possibles, donc $(\lambda_{i,j})$ est à support fini.

Et on a enfin :

$$\vec{v} = \sum_{i \in I} \mu_i \vec{v}_i = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} (\lambda_{i,j} e_j) \cdot \vec{v}_i = \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} \lambda_{i,j} e_j \cdot \vec{v}_i \quad (6.6)$$

Donc la famille est génératrice.

C'est donc bien une base.

Exemples On considère trois corps $\mathbb{K} \subset \mathbb{L} \subset \mathbb{M}$. On suppose que toutes les dimensions sont finies. Alors $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{M} = \dim_{\mathbb{L}} \mathbb{M} \times \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{L}$.

1. Soit $P = X^3 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$. Alors P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$:

En effet, sinon il aurait un facteur de degré 1, disons $X - \alpha \in \mathbb{Q}[X]$.

On aurait alors $P(\alpha) = 0$, soit $\alpha^3 = 2$, ce qui est impossible (pour $\alpha \in \mathbb{Q}$)

2. Soit $\mathbb{L} = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}, a, b, c \in \mathbb{Q}\}$

Alors \mathbb{L} est une sous- \mathbb{Q} -algèbre de \mathbb{C} de dimension 3 :

$(1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$ est libre (d'après le résultat du point précédent), et génératrice par définition.

3. Ainsi, \mathbb{L} est un sous-corps de \mathbb{C} .

4. On cherche tous les sous-corps de \mathbb{L} :

Il y a \mathbb{Q} et \mathbb{L} , et c'est tout :

Soit \mathbb{K} un sous-corps de \mathbb{L} . Alors \mathbb{K} contient \mathbb{Q} .

On a de plus $\underbrace{\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{L}}_{=3} = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{L} \times \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{K}$

Donc soit $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{L} = 1$ et $\mathbb{K} = \mathbb{L}$, soit $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{L} = 1$ et $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$.

II Dimension

A) Théorèmes fondamentaux

Théorème (Théorème de la dimension) :

Si un espace vectoriel E admet une famille génératrice finie, alors il admet une base finie, et toutes ses bases ont même cardinal appelé dimension de E .

Théorème (Théorème de la base incomplète) :

Soit V un système libre de E , G une famille génératrice de E .

Alors il existe $H \subset G$ tel que $V \cup H$ soit une base de E .

B) Théorème(s) du rang

- Version géométrique :

Théorème :

Soient E et F deux espaces vectoriels, $f: E \rightarrow F \in \mathcal{L}(E, F)$.

Soit S un supplémentaire de $\ker f$ dans E . Alors $f|_S: S \rightarrow \text{Im } f$ est un isomorphisme.

- Version numérique :

Théorème :

On suppose E de dimension finie.

Alors $\text{Im } f$ est de dimension finie, et $\dim E = \dim \text{Im } f + \dim \ker f$

- Version matricielle :

Théorème :

On suppose E, F de dimensions finies p et n .

Alors il existe une base \mathcal{B}_E de E et une base \mathcal{B}_F de F tels que :

$$\text{mat}_{(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)} f = \begin{pmatrix} I_r & 0_{M_{r, p-r}} \\ 0_{M_{n-r, r}} & 0_{M_{n-r, p-r}} \end{pmatrix}, \text{ où } r \text{ est le rang de } f.$$

Démonstration (dernière version) :

Soit S un supplémentaire de $\ker f$ et (e_1, \dots, e_r) une base de S complétée en une base $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ de E où (e_{r+1}, \dots, e_p) est une base de $\ker f$.

Alors $(f_1, \dots, f_r) = (f(e_1), \dots, f(e_r))$ est libre, c'est une base de $\text{Im } f$.

On complète (f_1, \dots, f_r) en une base \mathcal{B}_F de F .

Par construction, on a bien $\text{mat}_{(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)} f = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

C) Méthodes de calcul

- détermination d'une base
- Paramétrage isomorphique
- Paramétrage épimorphique (morphisme surjectif) :

Si $u: E \rightarrow F$ est un morphisme surjectif, alors $\dim F = \dim E + \dim \ker u$.

D) Exemples

On suppose ici les espaces de dimension finie :

- Espaces munis d'une base canonique (c'est-à-dire une base qui définit l'espace)

Exemple :

$$\mathbb{K}^n, \mathbb{K}_n[X], \mathbb{K}[X], \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \quad (6.7)$$

- $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$, une base étant $((v_i, 0), (0, w_j))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$
- $\dim \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F) = \dim E \times \dim F$.
- On veut $\dim_{\mathbb{R}} H$ où

$$H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z + t = 0 \text{ et } 2x - y - t = 0 \text{ et } x + 4y + 3z + 4t = 0\} \quad (6.8)$$

Méthode du pivot $\text{rg} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}}_A = 2$; donc $\dim_{\mathbb{R}} H = \dim \ker A = 2$

(Le noyau d'une matrice A , c'est le noyau de l'application $\begin{matrix} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(K) \\ X & \longmapsto & AX \end{matrix}$)

Autre méthode

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ 2x - y - t = 0 \\ x + 4y + 3z + 4t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ 3y - 2z - 3t = 0 \\ 3y + 2z + 3t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{1}{3}z \\ y = -t - \frac{2}{3}z \end{cases} \quad (6.9)$$

Donc $H = \{(-\frac{1}{3}z, -t - \frac{2}{3}z, z, t), (z, t) \in \mathbb{R}^2\}$.

III Sommes, sommes directes de sous-espaces vectoriels

A) Somme d'une famille de sous-espaces vectoriels

Définition :

- Soit E un espace vectoriel, $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E .
 $\sum_{i \in I} F_i$ est le sous-espace vectoriel engendré par $\bigcup_{i \in I} F_i$.

Théorème :

Soit H un sous-espace vectoriel de E .

Alors $H = \sum_{i \in I} F_i$ si et seulement si ces deux conditions sont réalisées :

1. $\forall i \in I, F_i \subset H$
2. $\forall h \in H, \exists (v_i)_{i \in I}$ à support fini, $\forall i \in I, v_i \in F_i$ et $h = \sum_{i \in I} v_i$. C'est-à-dire que tout élément de H est somme d'un nombre fini d'éléments des F_i .

- Cas d'une famille finie de sous-espaces vectoriels, application linéaire associée

Soient F_1, \dots, F_p p sous-espaces vectoriels de E .

$$\begin{aligned} \text{On note } \psi: F_1 \times \dots \times F_p &\longrightarrow E \\ (v_1, \dots, v_p) &\longmapsto \sum_{i=1}^p v_i \end{aligned}$$

Proposition :

ψ est une application linéaire d'image $\sum_{i=1}^p F_i$.

NB : ψ reflète les propriétés du système des F_i .

- Somme directe d'une famille finie :

Définition :

La somme $\sum_{i=1}^p F_i$ est dite directe lorsque ψ est injective. On note alors $\bigoplus_{i=1}^p F_i$.

Théorème :

Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\sum_{i=1}^p F_i$ est directe
2. ψ est injective
3. Tout élément \vec{v} de $\sum_{i=1}^p F_i$ s'écrit de manière unique sous la forme $\vec{v} = \sum_{i=1}^p \vec{f}_i$ où $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \vec{f}_i \in F_i$.

- Cas de la dimension finie :

Théorème (Formule de Grassmann) :

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E , E étant de dimension finie.

Alors $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.

Démonstration :

$$\begin{aligned} \text{Soit } \psi: F \times G &\longrightarrow E \\ (f, g) &\longmapsto f + g \end{aligned}$$

Alors ψ est linéaire, $\text{Im } \psi = F + G$, $\ker \psi = \{(f, -f), f \in F \cap G\}$.

Pour $\ker \psi$: Si $f, g \in \ker \psi$, alors $f + g = 0$, donc $\underbrace{f}_{\in F} = \underbrace{-g}_{\in G}$.

Donc $f \in F \cap G$ et $(f, g) = (f, -f)$.

Réciproquement, si $f \in F \cap G$, $(f, -f) \in \ker \psi$.

Enfin, d'après le théorème du rang :

$$\underbrace{\dim F \times G}_{=\dim F + \dim G} = \dim(F + G) + \dim(F \cap G) \quad (6.10)$$

Théorème (caractérisation d'une somme directe en dimension finie) :

$\sum_{i=1}^p F_i$ est directe si et seulement si $\sum_{i=1}^p \dim F_i = \dim \sum_{i=1}^p F_i$.

Démonstration :

\Rightarrow ψ est un isomorphisme entre $F_1 \times \dots \times F_p$ et $\sum_{i=1}^p F_i$, donc les deux espaces ont la même dimension.

\Leftarrow supposons que $\sum_{i=1}^p \dim F_i = \dim \sum_{i=1}^p F_i$. Alors $\psi: F_1 \times \dots \times F_p \rightarrow \sum_{i=1}^p F_i$ est linéaire, surjective entre deux espaces de même dimension, donc ψ est bijective, et $\sum_{i=1}^p F_i$ est directe.

Proposition :

Si $\sum_{i=1}^p F_i$ est directe, et si pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, \mathcal{B}_i est une base de F_i , alors $\bigcup_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket} \mathcal{B}_i$ est une base de $\sum_{i=1}^p F_i$.

Démonstration :

Soient $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$ des bases de F_1, \dots, F_p .

Alors $\mathcal{B}_1 \times \{(0, \dots, 0)\} \cup \{0\} \times \mathcal{B}_2 \times \{(0, \dots, 0)\} \cup \dots \cup \{(0, \dots, 0)\} \times \mathcal{B}_p$ est une base de $\prod_{i=1}^p F_i$.

Son image par ψ est $\bigcup_{i=1}^p \mathcal{B}_i$. Comme ψ , $\bigcup_{i=1}^p \mathcal{B}_i$ est une base de $\text{Im } \psi = \sum_{i=1}^p F_i$.

B) Cas particulier de deux sous-espaces vectoriels

Proposition :

La somme de deux sous-espaces vectoriels F et G est directe si et seulement si $F \cap G = \{0\}$.

Démonstration :

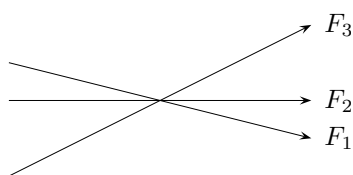
Soit $\psi: F \times G \rightarrow F + G$.

$(f, g) \mapsto f + g$

Alors $\ker \psi = \{(f, -f), f \in F \cap G\}$.

Donc $F + G$ est directe si et seulement si ψ est injective c'est-à-dire si et seulement si $F \cap G = \{0\}$.

Attention : Pour p sous-espaces vectoriels ($p \geq 3$), l'énoncé est faux. Par exemple, dans \mathbb{R}^2 :



Remarque :

$F_1 + \dots + F_p$ si et seulement si $F_1 \cap F_2 = \{0\}$ et $F_3 \cap (F_1 + F_2) = \{0\}$ et ...et $F_p \cap (\sum_{i=1}^{p-1} F_i) = \{0\}$.

Théorème :

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E , où E est de dimension finie.

Alors deux des conditions suivantes entraînent la troisième :

1. $F + G = E$
2. $F \cap G = \{0\}$
3. $\dim F + \dim G = \dim E$.

Dans ce cas, on a $E = F \oplus G$.

Définition :

La dimension de tout supplémentaire de F dans E s'appelle la codimension de F , notée $\text{codim}(F)$.

Ainsi, $\dim F + \text{codim}(F) = \dim E$.

C) Sous-espaces supplémentaires et projecteurs

Définition :

Soient F_1, \dots, F_p des sous-espaces vectoriels de E .

F_1, \dots, F_p sont supplémentaires lorsque $E = \bigoplus_{i=1}^p F_i$, ou ce qui revient au même lorsque tout élément \vec{v} de E s'écrit de manière unique $\vec{v} = \sum_{i=1}^p f_i$ où $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, f_i \in F_i$.

Théorème :

On suppose que $E = \bigoplus_{i=1}^p F_i$. Alors il existe π_1, \dots, π_p endomorphismes de E tels que $\pi_1 + \dots + \pi_p = \text{Id}_E$ et $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \text{Im } \pi_i = F_i$. De plus, pour tous i et j distincts, on a $\pi_i \circ \pi_j = 0$ et $\pi_i^2 = \pi_i$. Enfin, les π_i sont uniques.

Démonstration :

Existence Pour $\vec{v} = \sum_{i=1}^p f_i$ avec $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, f_i \in F_i$, on pose $\pi_i(\vec{v}) = f_i$.

Alors :

Pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, π_i est une application (la décomposition est unique)

Les π_i sont linéaires, d'image incluse dans F_i .

De plus, pour $a \in F_i$, on a $\pi_i(a) = a$, donc $F_i \subset \text{Im } \pi_i$, d'où $F_i = \text{Im } \pi_i$.

Enfin, $\sum_{i=1}^p \pi_i = \text{Id}_E$ car $\forall \vec{v} \in E, \vec{v} = \sum_{i=1}^p \pi_i(\vec{v})$.

Unicité On suppose que deux familles $(\pi_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$ et $(\pi'_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$ vérifient les deux conditions.

Soit $\vec{v} \in E$. Alors $\vec{v} = \sum_{i=1}^p \underbrace{\pi_i(\vec{v})}_{\in F_i} = \sum_{i=1}^p \underbrace{\pi'_i(\vec{v})}_{\in F_i}$.

Donc par unicité de la décomposition, $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \pi_i(\vec{v}) = \pi'_i(\vec{v})$.

Donc $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \pi_i = \pi'_i$.

Soit $\vec{v} \in E$. Alors pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \pi_k(\vec{v}) \in E$, et donc :

$$\underbrace{\pi_k(\vec{v})}_{\in F_k} = \sum_{i=1}^p \underbrace{\pi_i \circ \pi_k(\vec{v})}_{\in F_i} \tag{6.11}$$

Donc par unicité de la décomposition, $\pi_i \circ \pi_k(\vec{v}) = 0$ si $i \neq k$, et $\pi_k^2(\vec{v}) = \pi_k(\vec{v})$.

D'où le résultat voulu pour les applications.

Proposition (Étude réciproque) :

Soient π_1, \dots, π_p des endomorphismes de E tels que :

$$\sum_{i=1}^p \pi_i = \text{Id}_E, \quad \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \pi_i^2 = \pi_i, \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2, i \neq j \implies \pi_i \circ \pi_j = 0 \quad (6.12)$$

Alors $E = \bigoplus_{i=1}^p \text{Im } \pi_i$, et les π_i sont les projecteurs associés.

Démonstration :

On doit montrer que tout élément de E s'écrit de manière unique $\sum_{i=1}^p f_i$ où $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, f_i \in \text{Im } \pi_i$.

Existence de l'écriture

$$\forall \vec{v} \in E, \vec{v} = \sum_{i=1}^p \pi_i(\vec{v}) \quad (\text{car } \sum_{i=1}^p \pi_i = \text{Id}_E) \quad (6.13)$$

Unicité Il suffit de la montrer pour 0 (c'est-à-dire montrer l'injectivité de ψ)

Supposons que $0 = \sum_{i=1}^p f_i$ où $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, f_i \in \text{Im } \pi_i$.

Pour $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on a alors $f_i = \pi_i(f_i)$.

En effet : il existe $g_i \in E$ tel que $f_i = \pi_i(g_i)$, donc $\pi_i(f_i) = \pi_i^2(g_i) = \pi_i(g_i) = f_i$.

Alors $0 = \pi_i(0) = \sum_{k=1}^p \pi_i \circ \pi_k(f_k) = \pi_i(f_i) = f_i$. Donc $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, f_i = 0$.

Enfin, (6.13) montre que π_i est le projecteur sur F_i dans la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^p \text{Im } \pi_i$.

D) Sommes directes et applications linéaires

Théorème :

Soient E_1, \dots, E_p supplémentaires dans un espace vectoriel E , et F un espace vectoriel. Alors l'ap-

plication $A: \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F) \longrightarrow \prod_{i=1}^p \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E_i, F)$ est un isomorphisme, c'est-à-dire que se donner $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$, c'est se donner p applications $u_i \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E_i, F)$.

$$u \longmapsto (u|_{E_1}, \dots, u|_{E_p})$$

Démonstration :

Déjà, A est linéaire.

Construisons un isomorphisme réciproque :

Soient π_1, \dots, π_p les projecteurs relatifs à $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$.

Alors l'application $B: \prod_{i=1}^p \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E_i, F) \longrightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ est linéaire,

$$(u_1, \dots, u_p) \longmapsto \sum_{i=1}^p u_i \circ \pi_i$$

et $B \circ A = \text{Id}_{\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)}$, $A \circ B = \text{Id}_{\prod_{i=1}^p \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E_i, F)}$.

Donc A est bijective, donc un isomorphisme.

IV Dualité

A) Forme linéaire et espace dual

Définition :

- Une forme linéaire sur E , c'est une application linéaire $E \rightarrow \mathbb{K}$.
On note $E^* = \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, \mathbb{K})$, espace dual de E (dual algébrique)
- Cas où E est de dimension finie :

On a $\dim E^* = \dim E$ (car $\dim \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, \mathbb{K}) = \dim E \times \dim \mathbb{K}$)

Attention : Il n'existe pas en général d'isomorphisme *naturel* entre E et E^* .

Si E n'est pas de dimension finie, E^* et E n'ont aucune raison d'être isomorphes.

Exemple :

$\mathbb{R}[X]^*$ n'est pas isomorphe à $\mathbb{R}[X]$.

Montrons pour cela que $\mathbb{R}[X]^*$ n'a pas une base dénombrable.

On va chercher une famille libre équipotente à \mathbb{R} :

$$\diamond \text{ À tout réel } a, \text{ on associe } \begin{array}{ccc} \varphi_a : \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P(a) \end{array} .$$

\diamond Alors $\varphi_a \in \mathbb{R}[X]^*$.

\diamond $(\varphi_a)_{a \in \mathbb{R}}$ est libre : soit $(a_i)_{i \in [1, p]}$ une famille de réels distincts.

Supposons que $\sum_{i=1}^p \lambda_i \varphi_{a_i} = 0$, c'est-à-dire que $\forall P \in \mathbb{K}[X], \sum_{i=1}^p \lambda_i P(a_i) = 0$.

On prend alors, pour $i \in [1, p]$, $P_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p X - a_j$, et on a alors $\lambda_i = 0$.

Donc la famille est libre.

Supposons maintenant que $\mathbb{K}[X]^*$ admet une base dénombrable $(\psi_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Soit $N \in \mathbb{N}$. Alors $\{a \in \mathbb{R}, \varphi_a \in \text{Vect}(\psi_0, \dots, \psi_N)\} = I_N$ est fini, de cardinal $\leq N + 1$.

Donc $\{a \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \varphi_a \in \text{Vect}(\psi_0, \dots, \psi_N)\}$ est fini ou dénombrable (c'est $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$)

Or, $(\psi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base, donc toute forme linéaire φ_a est combinaison linéaire d'un nombre fini de ψ_k . Donc $\{a \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \varphi_a \in \text{Vect}(\psi_0, \dots, \psi_N)\} = \mathbb{R}$, ce qui est impossible car \mathbb{R} n'est pas dénombrable.

B) Hyperplan (en dimension quelconque)

Théorème :

Soit H un sous-espace vectoriel de E . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) Il existe $\vec{v} \neq 0$ tel que $E = H \oplus \mathbb{K}\vec{v}$.
- (2) Il existe $\varphi \in E^* \setminus \{0\}$ tel que $H = \ker \varphi$.

Un sous-espace vectoriel qui vérifie ces conditions s'appelle un hyperplan de E . Une forme linéaire vérifiant (2) s'appelle une équation de H .

Propriété :

deux équations de H sont proportionnelles.

Démonstration :

(1) \implies (2) supposons que $E = H \oplus \mathbb{K}\vec{v}$.

Soit π le projecteur sur $\mathbb{K}\vec{v}$ parallèlement à H .

Alors $\forall x \in E, \pi(x) = \varphi(x)\vec{v}$, où $\varphi(x) \in \mathbb{K}$.

Alors l'application φ ainsi définie est linéaire.

On a de plus $\pi(\vec{v}) = \vec{v}$, donc $\varphi(\vec{v}) = 1$, et donc $\varphi \neq 0$.

Enfin, $\ker \varphi = \ker \pi = H$.

(2) \implies (1) Soit $\varphi \in E^* \setminus \{0\}$. On pose $H = \ker \varphi$.

Soit $\vec{v} \in E$ tel que $\varphi(\vec{v}) \neq 0$, montrons qu'alors $E = H \oplus \mathbb{K}\vec{v}$.

Soit $x \in E$. Alors $x = \underbrace{\frac{\varphi(x)}{\varphi(\vec{v})}\vec{v}}_{\in \mathbb{K}\vec{v}} + \underbrace{\left(x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(\vec{v})}\vec{v}\right)}_{\in \ker \varphi}$.

Donc $E = H + \mathbb{K}\vec{v}$.

Soit $x \in H \cap \mathbb{K}\vec{v}$. Il existe alors $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x = \lambda\vec{v}$. Donc, comme $\varphi(x) = 0$ et $\varphi(\vec{v}) \neq 0$, on a nécessairement $\lambda = 0$. Donc $E = H \oplus \mathbb{K}\vec{v}$.

- Pour la propriété : Soit $(\varphi, \psi) \in (E^* \setminus \{0\})^2$ tel que $\ker \varphi = \ker \psi = H$.

Soit $\vec{v} \in E \setminus H$. Alors $E = H \oplus \mathbb{K}\vec{v}$.

On pose $\lambda = \frac{\varphi(\vec{v})}{\psi(\vec{v})}$. Alors φ et $\lambda\psi$ coïncident sur H (elles y sont nulles), et sur $\mathbb{K}\vec{v}$ (par définition de λ). Elles coïncident donc partout par linéarité.

Cas particulier :

Soit E de dimension finie. Alors H sous-espace vectoriel de E est un hyperplan si et seulement si $\dim H = \dim E - 1$.

C) Formes bilinéaires de dualité**Théorème, définition :**

Soit E un \mathbb{K} -ev, E^* son dual. Alors l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle: E^* \times E \rightarrow \mathbb{K}$ est bilinéaire.

$$(\varphi, \vec{v}) \mapsto \varphi(\vec{v})$$

Cette application s'appelle forme bilinéaire de dualité.

Dans toute la suite, E est un espace de dimension finie n .

Théorème :

Si E est de dimension finie, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une dualité parfaite, c'est-à-dire qu'elle a les propriétés fondamentales du produit scalaire, à savoir :

1. Pour $f \in E^*$, $f \neq 0$ si et seulement si il existe $\vec{v} \in E$ tel que $\langle f, \vec{v} \rangle \neq 0$.
2. Pour $\vec{v} \in E$, $\vec{v} \neq 0$ si et seulement si il existe $\varphi \in E^*$ telle que $\langle \varphi, \vec{v} \rangle \neq 0$.

Démonstration :

1. C'est la « définition » d'une fonction nulle

2. Soit $\vec{v} \in E \setminus \{0\}$.

Soit H un supplémentaire dans E de $\mathbb{K}\vec{v}$.

Alors H est un hyperplan (car de dimension $n - 1$)

Il existe donc $\varphi \in E^* \setminus \{0\}$ telle que $H = \ker \varphi$. Comme $\vec{v} \notin H$, on a $\varphi(\vec{v}) \neq 0$, c'est-à-dire $\langle \varphi, \vec{v} \rangle \neq 0$.

D) Formes linéaires coordonnées et bases duales

Soit (e_1, e_2, \dots, e_n) une base de E .

Alors tout $x \in E$ s'écrit de manière unique $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$.

Théorème :

Avec les notations précédentes, on pose pour $x \in E$, $\varphi_i(x) = x_i$ ($i \in \llbracket 1, n \rrbracket$). Alors :

1. $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \varphi_i \in E^*$
2. $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une base de E^* . On a : $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \varphi_i(e_j) = \delta_{i,j}$
3. $\forall x \in E, x = \sum_{i=1}^n \langle \varphi_i, x \rangle e_i$; $\forall \psi \in E^*, \psi = \sum_{i=1}^n \langle \psi, e_i \rangle \varphi_i$.

Définition :

$(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ s'appelle la base duale de (e_1, \dots, e_n) .

Elle est usuellement notée (e_1^*, \dots, e_n^*) .

Attention : Cette notation peut laisser penser qu'il existe une application $u: E \longrightarrow E^*$ telle que si $e \longmapsto e^*$ (e_1, \dots, e_n) est une base de E , alors $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est la base duale, ce qui est faux; en fait, e_1^* dépend de toute la base (e_1, \dots, e_n) et il en est de même pour les autres.

Exemple :

Dans $E = \mathbb{R}^2$, (e_1, e_2) la base canonique.

La base duale de (e_1, e_2) est (φ_1, φ_2) , avec $\varphi_1: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi_2: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.
 $(x, y) \longmapsto x$ $(x, y) \longmapsto y$

Nouvelle base : $v_1 = e_1, v_2 = e_1 + e_2$.

Base duale de (v_1, v_2) :

On a $(x, y) = xe_1 + ye_2 = xv_1 + y(v_2 - v_1) = (x - y)v_1 + yv_2$.

La base duale de (v_1, v_2) est donc (ψ_1, ψ_2) avec $\psi_1(x, y) = x - y, \psi_2(x, y) = y$.

Démonstration (du théorème) :

1. Clair.

2. Montrons que $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est libre.

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, supposons que $\sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i = 0$.

Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Pour $x = e_j$, on a $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \varphi_i(e_j) = \delta_{i,j}$, donc $\lambda_j = 0$.

3. Formule pour x : c'est la définition des φ_i .

Soit $\psi \in E^*$. On note $\theta = \sum_{i=1}^n \langle \psi, e_i \rangle \varphi_i$.

On a alors, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \theta(e_k) = \sum_{j=1}^n \psi(e_j) \cdot \varphi_j(e_k) = \psi(e_k)$.

Donc θ et ψ coïncident sur une base, donc sont égaux.

Théorème :

Pour toute base \mathcal{B}^* de E^* , il existe une unique base \mathcal{B} de E dont \mathcal{B}^* est la base duale.

Démonstration :

Soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ une base de E^* . On cherche (e_1, \dots, e_n) base de E telle que $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \varphi_i(e_j) = \delta_{i,j}$. Alors on aura $\forall x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E, \varphi_k(x) = x_k$, c'est-à-dire que $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ sera la base duale de (e_1, \dots, e_n) .

Soit $\theta: E \longrightarrow \mathbb{K}^n$. On va montrer que θ est un isomorphisme.

$$\vec{v} \longmapsto (\varphi_1(\vec{v}), \dots, \varphi_n(\vec{v}))$$

Déjà, $\dim E = \dim \mathbb{K}^n$.

Soit $\vec{v} \in \ker \theta$. Alors $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \varphi_i(\vec{v}) = 0$. Mais comme $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une base de E^* , on a par combinaison linéaire $\forall \psi \in E^*, \psi(\vec{v}) = 0$, donc $\vec{v} = 0$ (dualité parfaite)

Donc θ est injective, donc bijective.

Ainsi, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il existe un unique $x_k \in E$ tel que $\theta(x_k) = (0, \dots, \underset{k}{1}, \dots, 0)$.

Définition :

Si \mathcal{B}^* est la base duale de \mathcal{B} , on dit aussi que \mathcal{B} est la base antéduale de \mathcal{B}^* .

E) Orthogonalité**Définition :**

Soit A une partie de E .

On appelle orthogonal de A dans E^* la partie ${}^\perp A$ de E^* définie par :

$${}^\perp A = \{\varphi \in E^*, \forall a \in A, \langle \varphi, a \rangle = 0\} \quad (6.14)$$

L'orthogonal d'une partie B de E^* dans E est la partie B^\perp de E définie par :

$$B^\perp = \{x \in E, \forall \varphi \in B, \langle \varphi, x \rangle = 0\} = \bigcap_{\varphi \in B} \ker \varphi \quad (6.15)$$

Propriétés :

1. Soit $A \subset A' \subset E$.

Alors ${}^\perp A$ est un sous-espace vectoriel de E^* , et on a de plus :

$${}^\perp \emptyset = E^* \supset {}^\perp A \supset {}^\perp A' \supset {}^\perp E = 0 \quad (6.16)$$

2. Analogue pour E^* .

Théorème :

1. Soit A une partie de E .

(a) On a ${}^\perp A = {}^\perp \text{Vect}(A)$

(b) Soit F un sous-espace vectoriel de E . Alors $\dim F + \dim {}^\perp F = \dim E$, et $({}^\perp F)^\perp = F$

2. De même dans E^* .

Corollaire :

Soient $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ p formes linéaires sur E , et $\psi \in E^*$. Alors ψ est combinaison linéaire des φ_i si et seulement si $\bigcap_{i=1}^p \ker \varphi_i \subset \ker \psi$.

Démonstration :

- (a) Déjà, $A \subset \text{Vect}(A)$, donc ${}^\perp \text{Vect}(A) \subset {}^\perp A$.

Soit $\varphi \in {}^\perp A$. Alors $\forall a \in A, \varphi(a) = 0$, donc $\forall a \in \text{Vect}(A), \varphi(a) = 0$, donc $\varphi \in {}^\perp \text{Vect}(A)$, d'où l'autre inclusion et l'égalité

- (b) Soit (e_1, \dots, e_p) une base de F , qu'on complète en une base (e_1, \dots, e_n) de E .

Soit (e_1^*, \dots, e_n^*) sa base duale. Alors $\varphi = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i^* \in {}^\perp F$ si et seulement si $\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \varphi(e_j) = 0$ (car ${}^\perp F = {}^\perp \{e_1, \dots, e_p\}$)

Or, $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \lambda_k = \langle \varphi, e_k \rangle = \varphi(e_k)$.

Donc $\varphi = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i^* \in {}^\perp F$ si et seulement si $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket \lambda_k = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $\varphi \in \text{Vect}(e_{p+1}^*, \dots, e_n^*)$.

Donc ${}^\perp F = \text{Vect}(e_{p+1}^*, \dots, e_n^*)$, d'où $\dim {}^\perp F = n - p$.

(L'autre égalité sera montrée en 3)

2. Analogue :

Pour $B \subset E^*, B^\perp = (\text{Vect}(B))^\perp$.

Soit F_* un sous-espace vectoriel de E^* , $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ une base de E^* telle que $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ soit une base de F_* .

Soit (e_1, \dots, e_n) la base de E antédual de $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$.

Soit $\vec{v} \in E$; alors $\vec{v} = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in F_*^\perp$ si et seulement si $\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \varphi_j(\vec{v}) = 0$ (car $F_*^\perp = \{\varphi_1, \dots, \varphi_p\}^\perp$)

Or, $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_k = \varphi_k(\vec{v})$. Donc $\vec{v} \in F_*^\perp$ si et seulement si :

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, x_i = 0 \tag{6.17}$$

Donc $F_*^\perp = \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$.

3. Déjà, $F \subset ({}^\perp F)^\perp$ car si on prend $f \in F$ et $\varphi \in {}^\perp F$, alors $\langle \varphi, f \rangle = 0$.

De plus, $\dim ({}^\perp F)^\perp = n - \dim {}^\perp F = \dim F$, d'où l'égalité.

Pour le corollaire :

Si $\psi \in \text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$, ψ s'écrit $\psi = \sum_{i=1}^p \lambda_i \varphi_i$, donc $\bigcap_{i=1}^p \ker \varphi_i \subset \ker \psi$.

Réciproquement, supposons que $\bigcap_{i=1}^p \ker \varphi_i \subset \ker \psi$.

Alors $\{\varphi_1, \dots, \varphi_p\}^\perp \subset \{\psi\}^\perp$, soit $\text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_p)^\perp \subset \text{Vect}(\psi)^\perp$.

Et donc ${}^\perp (\text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_p)^\perp) \supset {}^\perp (\text{Vect}(\psi)^\perp)$, c'est-à-dire $\mathbb{K}\psi \subset \text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$.

F) Application aux sous-espaces vectoriels

- Représentation des familles génératrices :

Si (v_1, \dots, v_p) engendrent F , alors $F = \{\sum_{i=1}^p \lambda_i v_i, \lambda_i \in \mathbb{K}\}$, c'est-à-dire que l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{K}^p &\longrightarrow F \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_p) &\longmapsto \sum_{i=1}^p \lambda_i v_i \end{aligned}$$

est un paramétrage surjectif. On a alors $\dim F = \text{rg}(v_1, \dots, v_p)$.

- Mode de représentation par équations linéaires :

Soient F un sous-espace vectoriel de E , $\varphi_1, \dots, \varphi_p \in E^*$.

On dit que $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ est un système d'équations de F lorsque :

$$\forall v \in E, (v \in F \iff \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \varphi_j(v) = 0) \quad (6.18)$$

C'est-à-dire lorsque $F = \bigcap_{i=1}^p \ker \varphi_i$, ou encore lorsque $F = \{\varphi_1, \dots, \varphi_p\}^\perp$.

Dans ce cas, on a $\dim F = \dim E - \text{rg}(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$.

En effet, $\text{rg}(\varphi_1, \dots, \varphi_p) = \dim(\text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_p)) = \dim {}^\perp F$.