Chapitre 2 : Séries numériques

On fixe dans ce chapitre le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Généralités

A) Suites et séries

Définition :
On appelle série à termes dans $\mathbb{K}$ tout couple $((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S_n)_{n\in\mathbb{N}})$ de suites de $\mathbb{K}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.
On appelle u_n le n-ième terme général de la série et S_n la n-ième somme partielle.

Remarque :
La donnée du terme général u_n suffit à déterminer la suite, qu'on notera alors $\sum_{n\geqslant 0} u_n$.

Remarque :
Si $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite définie à partir d'un rang n_0, on notera $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ la série de terme général $v_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n < n_0 \\ u_n \text{ si } n \geqslant n_0 \end{cases}$

La n-ième somme partielle vaut alors $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$ pour $n \geqslant n_0$.

Proposition :
L'ensemble des séries à termes dans $\mathbb{K}$ est muni d'une structure d'espace vectoriel par les lois :

$$\lambda \sum_{n\geqslant 0} u_n + \mu \sum_{n\geqslant 0} v_n = \sum_{n\geqslant 0} \lambda u_n + \mu v_n \text{ où } (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2 \text{ et } (u,v) \in \left(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}\right)^2 \tag{2.1}$$

On notera cet ensemble $S(\mathbb{K})$

Démonstration :
$S(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\left(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}\right)^2$, noyau de l'application linéaire $\begin{array}{ccc} (\mathbb{K}^{\mathbb{N}})^2 & \longrightarrow & \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ (u,S) & \longmapsto & \left(S_n - \sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$

B) Séries convergentes

Définition :
On dit que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$, à termes dans $\mathbb{K}$, est convergente lorsque la suite $(\sum_{k=0}^{n} u_k)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
On notera alors $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{k\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Attention : La notation $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ n'a de sens que pour une série convergente.

Remarque :

On notera $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ la somme d'une série convergente $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$.

Théorème :

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$.

Alors les séries $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ ont la même nature, et si elles convergent, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k \tag{2.2}$$

Démonstration :

Soient S_n et S'_n les n-ièmes sommes partielles de $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$.

Pour $n \geqslant n_0$, on a :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \sum_{k=n_0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + S'_n \tag{2.3}$$

Donc les deux suites $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on la même nature, et si elles convergent, on a alors $\lim_{n \to +\infty} S_n = \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \lim_{n \to +\infty} S'_n$.

Définition :

Si $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ est une série convergente, on appelle n-ième reste de Cauchy de la série le scalaire $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Proposition :

Le reste de Cauchy, lorsqu'il existe, tend vers 0

En effet : Si $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ est une série convergente, soit S_n sa n-ième somme partielle, et S sa somme. On alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S = S_n + R_n$.

Comme $S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} S$, on a bien $R_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Exemple :

Soit $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ la série de terme général $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}$.

La série est donc convergente, de somme $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1$

Le n-ième terme de Cauchy vaut alors $\frac{1}{n+1}$.

Proposition :

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, alors u converge si et seulement si la série $\sum_{n \geqslant 0} u_n - u_{n+1}$ converge, et on a alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n - u_{n+1} = u_0 - \lim_{n \to +\infty} u_n$

Démonstration :

$\sum_{k=0}^{n} u_k - u_{k+1} = u_0 - u_{n+1}$.

Attention : On ne peut pas écrire $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k - u_{k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{+\infty} u_{k+1}$

(voir exemple précédent par exemple)

Théorème :

L'ensemble $S_C(\mathbb{K})$ des séries convergentes à termes dans $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel de $S(\mathbb{K})$. L'application $\begin{array}{ccc} S_C(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \sum\limits_{n\geqslant 0} u_n & \longmapsto & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n \end{array}$ est une forme linéaire.

Démonstration :

Résulte du théorème équivalent sur les suites :

Pour $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n}(\lambda u_k + \mu v_k) = \lambda \sum_{k=0}^{n} u_k + \mu \sum_{k=0}^{n} v_k$, d'où, par passage à limite si les séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ convergent, $\sum_{k=0}^{+\infty}(\lambda u_k + \mu v_k) = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \mu \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$.

C) Grossière divergence

Théorème :

Si la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge, alors son terme général u_n tend vers 0.

Démonstration :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k$.

Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = 0$.

Conséquence :

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite ne tendant pas vers 0, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge. On dit dans ce cas que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est grossièrement divergente.

Exemples

- Série grossièrement divergente :

$$\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \tag{2.4}$$

- Série non grossièrement divergente mais divergente :

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} \tag{2.5}$$

Idée :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\geqslant \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{\geqslant 2\times\frac{1}{4}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{\geqslant 4\times\frac{1}{8}} + \cdots \tag{2.6}$$

Plus formellement :

$$\sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} = \sum_{m=0}^{n-1} \underbrace{\left(\frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{m+1}-1}\right)}_{2^m \text{ termes}} \tag{2.7}$$

La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}*}$ est décroissante, donc :

$$\sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{m=0}^{n-1} 2^m \times \frac{1}{2^{m+1}} \geqslant n \times \frac{2^m}{2^{m+1}} \geqslant \frac{n}{2} \tag{2.8}$$

Donc $S_{2^{m-1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. De plus, $u_n \geqslant 0$. Donc $(S_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ est croissante, donc $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, donc $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge.

D) Critère de Cauchy – convergence absolue

Théorème (critère de Cauchy) :

Si $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ est une série de $\mathbb{K}$, alors une condition nécessaire et suffisante pour que cette série converge est :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, n \geqslant n_0 \implies |\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k| \leqslant \varepsilon \tag{2.9}$$

Démonstration :

Cette condition équivaut à : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, n \geqslant n_0 \implies |S_{n+p} - S_n| \leqslant \varepsilon$ (où $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$)

C'est-à-dire à « $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy », ce qui équivaut dans $\mathbb{K}$ à dire que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Remarque :

On note souvent $R_{n,p} = \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k$ le « reste partiel » de la série.

Théorème :

Si $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ est une série de $\mathbb{K}$, alors une condition suffisante pour que $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ converge est que $\sum_{n \geqslant 0} |u_n|$ converge.

Démonstration :

Si $\sum_{n \geqslant 0} |u_n|$ converge, alors par critère de Cauchy, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\left.\begin{matrix} n \geqslant n_0 \\ p \in \mathbb{N} \end{matrix}\right\} \implies \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right| \leqslant \varepsilon$. Donc $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ converge.

Définition :

Si la série $\sum_{n \geqslant 0} |u_n|$ converge, on dit que la série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ est absolument convergente.

Si $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ est convergente, mais pas absolument, on dit alors qu'elle est semi-convergente.

II Séries à termes réels positif

A) Théorème fondamental

Théorème :

Soit $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ une série à termes réels positifs. Alors la série converge si et seulement si il existe $M \geqslant 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant M$.

Démonstration :

La suite $(\sum_{k=0}^{n} u_k)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, donc converge si et seulement si elle est majorée.

Corollaire :

Si $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ est une série à termes réels positifs divergente, alors $\sum_{k=0}^{n} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

B) Critères de comparaison

Théorème (comparaison) :

Si $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ sont à termes réels positifs, si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n$ et si $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ converge, alors $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge, et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Démonstration :

Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n$ et que $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ converge.

Il existe alors M tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} v_k \leqslant M$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} v_k \leqslant M$. Or, $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est croissante.

Donc elle converge, et par passage à la limite, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Conséquence :

Avec les notations précédentes, et pour $n_0 \in \mathbb{N}$,

Si $\forall n \geqslant n_0, u_n \leqslant v_n$ et si $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ converge, alors $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge, et $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

En effet : Les séries $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ et $\sum_{n\geqslant n_0} v_n$ ont même nature.

Conséquence :

Avec les notations du théorème, et pour $n_0 \in \mathbb{N}$, si $\forall n \geqslant n_0, u_n \leqslant v_n$ et si $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge, alors $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ diverge.

C'est la contraposée de la première conséquence.

Théorème (Domination) :

Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série à termes dans $\mathbb{K}$, et $\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n$ une série à termes réels positifs.

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(\alpha_n)$, et si $\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n$ converge, alors $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est absolument convergente.

Démonstration :

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(\alpha_n)$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\forall n \geqslant n_0, |u_n| \leqslant A\alpha_n$.

Si de plus $\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n$ converge, alors $\sum_{n\geqslant 0} A\alpha_n$ converge, et donc $\sum_{n\geqslant 0} |u_n|$ converge.

Corollaire :

Avec les notations du théorème,

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(\alpha_n)$, et si $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge, alors $\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n$ diverge.

Le théorème reste valable en remplaçant O par o.

Théorème (Équivalence) :

Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une suite à termes dans $\mathbb{R}$, et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ à termes réels positifs.

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors les séries $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ ont même nature.

Démonstration :

Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_n - v_n$.

Ainsi, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \iff w_n \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$

Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0$, $\forall n \geqslant n_0, |w_n| \leqslant \frac{1}{2}u_n$.

Donc, pour $n \geqslant n_0$, $0 \leqslant \frac{1}{2}u_n \leqslant v_n \leqslant \frac{3}{2}u_n$.

Donc $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ ont même nature.

Théorème (Comparaison logarithmique) :

Soient $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ deux séries à termes réels strictement positifs, et $n_0 \in \mathbb{N}$.

Si $\forall n \geqslant n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ converge, alors $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

Démonstration :

Si $\forall n \geqslant n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$, alors par récurrence immédiate $\forall n \geqslant n_0, \frac{u_n}{u_{n_0}} \leqslant \frac{v_n}{v_{n_0}}$.

Ainsi, $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$, d'où le résultat.

Corollaire :

Avec les notations du théorème,

Si $\forall n \geqslant n_0, \frac{u_n}{u_{n_0}} \leqslant \frac{v_n}{v_{n_0}}$ et si $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge, alors $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ diverge.

C) Suites géométriques, règle de d'Alembert

Rappel :

Calcul des sommes partielles.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $k \neq 1$. Alors $\sum_{n=p}^{q} u_n = \frac{u_p - u_{q+1}}{1-k}$.

Théorème :

Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$. La série $\sum_{n\geqslant 0} k^n$ converge si et seulement si $k < 1$.

Théorème :

Soit $z \in \mathbb{C}$. La série $\sum_{n\geqslant 0} z^n$ converge si et seulement si $|z| < 1$, et on a alors $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

Démonstration (du deuxième théorème) :

- Si $z = 1$, alors $\sum_{k=0}^{n} z^k = n + 1$, donc la série diverge.
- Sinon, $\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$.

  Ainsi, si $|z| > 1$, la série ne converge pas car $\left|\sum_{k=0}^{n} z^k\right| \to +\infty$.

  Si $|z| < 1$, la série converge, de somme $\frac{1}{1-z}$

  Si $|z| = 1$, $z = e^{i\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$, et la suite $(e^{in\theta})_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas (car $\theta \not\equiv 0 \mod 2\pi$)

Autre méthode Si $|z| = 1$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, |z^n| = 1$, donc $\sum_{n\geqslant 0} z^n$ est grossièrement divergente.

Théorème :

Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série à termes réels strictement positifs.

1. S'il existe $k \in]0, 1[$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant k$, alors $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge
2. S'il existe $k \in [1, +\infty[$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant k$, alors $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge.

Démonstration :

1. C'est le théorème de comparaison logarithmique avec $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} k^n$.
2. Son corollaire avec $\sum_{n\geqslant 0} k^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} u_n$.

Théorème (règle de d'Alembert) :

Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ à termes réels strictement positifs, supposons que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to l$ où $l \in [0, +\infty]$.

1. Si $l \in [0, 1[$, alors $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.
2. Si $l \in]1, +\infty]$, alors $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge.
3. Si $l = 1$, le théorème ne permet pas de conclure.

Démonstration :

1. Si $l < 1$, soit alors $k \in]l, 1[$.

   Il existe alors $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant k$, donc $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge d'après le théorème précédent.
2. Si $l > 1$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$, donc $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge.
3. Exemple des séries de Riemann :

   Si $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ pour $n \geqslant 1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a toujours $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha \to 1$, mais suivant le choix de α, $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge ou diverge.

Exemple :

La série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$ pour $z \in \mathbb{C}$ est absolument convergente.

- Si $z = 0$ ok...
- Si $z \neq 0$, alors soit $u_n = \left|\frac{z^n}{n!}\right| > 0$

  Pour $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{z^n}\right| = \frac{|z|}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc la série converge bien absolument.

  Pour $z \in \mathbb{C}$, on note alors $\exp z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

D) Séries de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$; on étudie la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$

- Si $\alpha \leqslant 0$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n^\alpha} \geqslant 1$, donc la série diverge grossièrement.
- Si $\alpha > 0$:

  On va utiliser la décroissance de $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$.

  Pour $n \in \mathbb{N}$, et $t \in [n, n+1]$, on a $f(n+1) \leqslant \frac{1}{t^\alpha} \leqslant f(n)$.

  Donc $\int_n^{n+1} f(n+1)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_n^{n+1} f(n)\,\mathrm{d}t$.

  C'est-à-dire $\frac{1}{(n+1)^\alpha} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n^\alpha}$.

  D'où $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \int_1^{n+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_1^n \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{1^\alpha}$

  On est ainsi ramené à l'étude de $I_n = \int_1^n \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$

  Si $\alpha = 1$, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \ln n$ donc $I_n \to +\infty$, soit $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \to +\infty$

  Si $\alpha < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \geqslant \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \to +\infty$

  Si $\alpha > 1$, $I_n = \int_1^n \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right]_1^n = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - 1\right) \leqslant \frac{1}{1-\alpha}$.

  Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \leqslant 1 + \frac{1}{1-\alpha}$, et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge.

Ainsi :

La série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est :

Convergente si $\alpha > 1$, divergente si $0 < \alpha \leqslant 1$, grossièrement divergente si $\alpha \leqslant 0$.

Théorème :

Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série à termes réels positifs.

1. S'il existe $\alpha > 1$ tel que $u_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, alors $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.
2. S'il existe $\alpha \leqslant 1$ tel que $\frac{1}{n^\alpha} = O(u_n)$, alors $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge.

Théorème (règle de Riemann ou « $n^\alpha u_n$ ») :

Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une suite à termes réels positifs.

1. S'il existe $\alpha > 1$ et $l \in [0, +\infty[$ tels que $n^\alpha u_n \to l$, alors $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.
2. S'il existe $\alpha \leqslant 1$ et $l \in]0, +\infty[$ tels que $n^\alpha u_n \to l$, alors $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge.

Démonstration :

Si $n^\alpha u_n \to l$ pour $\alpha > 1$ et $l \in [0, +\infty[$, alors $u_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ (car $n^\alpha u_n$ est bornée et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive)

Même chose si $\alpha \leqslant 1$, on a $\frac{1}{n^\alpha} = O(u_n)$ (même raison)

Exemple (Séries de Bertrand) :

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ la série de terme général $u_n = \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$.

- Cas 1 : $\alpha < 1$

  Soit $\alpha' \in]\alpha, 1[$.

  Alors $n^{\alpha'} u_n = \frac{n^{\alpha'-\alpha}}{\ln^\beta n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, donc $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ diverge.

- Cas 2 : $\alpha > 1$.

  Soit $\alpha' \in]1, \alpha[$.

  Alors $n^{\alpha'} u_n = \frac{1}{n^{\alpha-\alpha'} \ln^\beta n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ converge.

- Cas 3 : $\alpha = 1$.

  ◇ Si $\beta \leqslant 0$, alors $nu_n = \ln^{-\beta} n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} +\infty & \text{si } \beta < 0 \\ 1 & \text{si } \beta = 0 \end{cases}$, et $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ diverge.

  ◇ Si $\beta > 0$:

  On étudie $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n \ln^\beta n}$

  Soit $f \colon \begin{array}{ccc} [2, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t \ln^\beta t \end{array}$. Alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

  Pour $t \in [2, +\infty[$, $f'(t) = \frac{-\ln\beta - \beta \ln^{\beta-1} t}{t^2 \ln^{2\beta} t} \leqslant 0$. Donc f est décroissante sur $[2, +\infty[$.

  Pour $n \geqslant 2$ et $t \in [n, n+1]$, on a : $f(n+1) \leqslant f(t) \leqslant f(n)$,

  Donc $f(n+1) \leqslant \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(n)$.

  Or, $\frac{f(n+1)}{f(n)} = \frac{n \ln^\beta n}{(n+1)\ln^\beta(n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

  Donc $\frac{1}{f(n)} \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, soit $\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} f(n)$.

  Donc les séries $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n \ln^\beta n}$ et $\sum_{n\geqslant 2} \int_n^{n+1} \frac{1}{t \ln^\beta t}\,\mathrm{d}t$ ont la même nature.

  On étudie alors $S_n = \int_2^{n+1} \frac{1}{t \ln^\beta t}\,\mathrm{d}t$.

  On a : $S_n = \int_2^{n+1} \frac{1}{t \ln^\beta t}\,\mathrm{d}t = \int_{\ln 2}^{\ln(n+1)} \frac{1}{u^\beta}\,\mathrm{d}u$

  Ainsi, si $\beta \leqslant 1$, $S_n \to +\infty$, et si $\beta > 1$, S_n est bornée.

Conclusion :

La série $\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ converge si $\begin{cases}\alpha>1\\ \text{ou } \alpha=1 \text{ et } \beta>1\end{cases}$ et diverge si $\begin{cases}\alpha<1\\ \text{ou } \alpha=1 \text{ et } \beta\leqslant 1\end{cases}$

III Sommation des relations de comparaison

A) Domination, prépondérance

Théorème :

Soit $\sum_{n\geqslant 0}\alpha_n$ une série à termes réels positifs, et $\sum_{n\geqslant 0}u_n$ une série de $\mathbb{K}$. On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(\alpha_n)$.

1. Si la série $\sum_{n\geqslant 0}\alpha_n$ converge, alors $\sum_{n\geqslant 0}u_n$ converge, et $\sum_{k=n+1}^{+\infty}u_k \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty}\alpha_k\right)$, c'est-à-dire $R_n(u) \underset{n\to+\infty}{=} O(R_n(\alpha))$
2. Si la série $\sum_{n\geqslant 0}\alpha_n$ diverge, alors $\sum_{k=0}^{n}u_k \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\right)$, ou $S_n(u) \underset{n\to+\infty}{=} O(S_n(\alpha))$.

Démonstration :

1. On sait déjà qu'alors $\sum_{n\geqslant 0}u_n$ converge absolument.

   Par ailleurs, il existe $A>0$ et $n_0\in\mathbb{N}$ tels que $\forall n\geqslant n_0$, $|u_n|\leqslant A\alpha_n$.

   Donc, pour $n\geqslant n_0$, $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}u_k\right|\leqslant\sum_{k=n+1}^{+\infty}|u_k|\leqslant\sum_{k=n+1}^{+\infty}A\alpha_k$,

   c'est-à-dire $\forall n\geqslant n_0, |R_n(u)|\leqslant AR_n(\alpha)$, donc $R_n(u) \underset{n\to+\infty}{=} O(R_n(\alpha))$.
2. Il existe toujours $A>0$ et $n_0\in\mathbb{N}$ tels que $\forall n\geqslant n_0$, $|u_n|\leqslant A\alpha_n$.

   Donc, pour $n>n_0$:

   $$\left|\sum_{k=0}^{n}u_k\right|\leqslant\sum_{k=0}^{n_0}|u_k|+\sum_{k=n_0+1}^{n}|u_k|\leqslant\sum_{k=0}^{n_0}|u_k|+A\sum_{k=n_0+1}^{n}\alpha_k \tag{2.10}$$

   Comme $\sum_{n\geqslant n_0+1}\alpha_n$ diverge, il existe $n_1>n_0$ tel que $\sum_{k=0}^{n_0}|u_k|\leqslant A\sum_{k=n_0+1}^{n_1}\alpha_k$

   Ainsi, pour $n\geqslant n_1$, $|S_n(u)|\leqslant 2AS_n(\alpha)$.

   Donc $S_n(u) \underset{n\to+\infty}{=} O(S_n(\alpha))$

Théorème :

Soit $\sum_{n\geqslant 0}\alpha_n$ une série à termes réels positifs, $\sum_{n\geqslant 0}u_n$ une série de $\mathbb{K}$ telle que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(\alpha_n)$.

1. Si $\sum_{n\geqslant 0}\alpha_n$ converge, alors $\sum_{n\geqslant 0}u_n$ converge absolument, et $R_n(u) \underset{n\to+\infty}{=} o(R_n(\alpha))$
2. Si $\sum_{n\geqslant 0}\alpha_n$ diverge, alors $S_n(u) \underset{n\to+\infty}{=} o(S_n(\alpha))$

Démonstration :

Même que précédemment en remplaçant « $\exists A>0$ » par « $\forall\varepsilon>0$ ».

B) Équivalence

Théorème :

Soient $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ deux séries de $\mathbb{K}$ dont l'une au moins est à termes réels positifs et telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

Alors ces séries sont de même nature, et :

1. Si elles convergent, $R_n(u) \underset{n\to+\infty}{\sim} R_n(v)$
2. Si elles divergent, $S_n(u) \underset{n\to+\infty}{\sim} S_n(v)$.

Démonstration :

Supposons que $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est à termes positifs. Alors $v_n - u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$.

Donc :

1. Si $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge, alors $\sum_{n\geqslant 0} u_n - v_n$ converge, donc $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ aussi.

   De plus, $\underbrace{R_n(v-u)}_{R_n(v)-R_n(u)} \underset{n\to+\infty}{=} o(R_n(u))$

   Donc $R_n(v) \underset{n\to+\infty}{\sim} R_n(u)$
2. Si $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge, alors $S_n(v-u) \underset{n\to+\infty}{=} o(S_n(u))$.

   Donc $S_n(v) \underset{n\to+\infty}{\sim} S_n(u)$, et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ diverge.

Application : lemme de Césaro :

Théorème :

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathbb{K}$ qui converge vers l, alors la suite $v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k$ converge vers l.

Démonstration :

On compare $\sum_{n\geqslant 0} u_n - l$ et $\sum_{n\geqslant 0} 1$:

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, 1 \geqslant 0 \\ u_n - l = o(1) \\ \sum_{n\geqslant 0} 1 \text{ diverge} \end{cases} \tag{2.11}$$

Ainsi, $\sum_{k=0}^{n} (u_k - l) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\sum_{k=0}^{n} 1\right)$

Soit $\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k\right) - l \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$.

Théorème :

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle tendant vers $+\infty$, alors $v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k$ tend vers $+\infty$.

Démonstration :

Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 0$. Alors :

$$\begin{cases} \forall n \geqslant n_0, u_n \geqslant 0 \\ 1 = o(u_n) \\ \sum_{n\geqslant 0} u_n \text{ diverge} \end{cases} \tag{2.12}$$

Ainsi, on a :

$$\sum_{k=n_0}^{n} 1 \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\sum_{k=n_0}^{n} u_k\right) \tag{2.13}$$

Donc $\sum_{k=0}^{n} 1 \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)$, d'où $1 \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$

C) Comportement asymptotique des séries de Riemann

Soit $\alpha > 0$. Alors $\begin{array}{rccc} f\colon & [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \dfrac{1}{t^\alpha} \end{array}$ est décroissante.

Donc $\forall n \geqslant 2$, $\frac{1}{n^\alpha} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{(n-1)^\alpha}$. Comme $\frac{1}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{(n-1)^\alpha}$, on a, d'après le théorème des gendarmes, $\frac{1}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$

Ces deux suites $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ et $v_n = \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ sont à termes réels positifs. D'où :

- Si $\alpha < 1$, on a : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \displaystyle\int_{1}^{n} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ et $\int_1^n \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{1-\alpha} t^{1-\alpha}\right]_1^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.

  Donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$
- Si $\alpha = 1$, on a : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$
- Si $\alpha > 1$, les séries convergent, et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \displaystyle\int_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$

  Donc $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.

IV Comparaison d'une série et d'une intégrale

A) Cas d'une fonction positive décroissante

Soit $f\colon [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux, positive et décroissante.

On veut comparer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} f(n)$ et de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n)$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(n-1)$

Donc $0 \leqslant w_n \leqslant f(n-1) - f(n)$.

La série $\sum_{n\geqslant 1} w_n$ est donc à termes positifs, et $S_n(w) = \sum_{k=1}^{n} w_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} (f(k-1) - f(k))$

Soit $S_n(w) \leqslant f(0) - f(n) \leqslant f(0)$

Donc $\sum_{n\geqslant 1} w_n$ converge, et de plus $\sum_{k=1}^{n} w_k = \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{n} f(n)$.

D'où le théorème :

Théorème :

Soit $f\colon [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux, positive et décroissante.

Alors :

1. La série de terme général $w_n = \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n)$ (définie pour $n \geqslant 1$) converge.
2. La série $\sum_{n\geqslant 0} f(n)$ converge si et seulement si f est intégrable sur $[0,+\infty[$ (c'est-à-dire que la suite $\left(\int_0^n |f(t)|\,\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge), et dans ce cas :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} w_n = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{n=1}^{+\infty} f(n) \tag{2.14}$$

B) Cas d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$

Soit $f\colon [0,+\infty[\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que f' soit intégrable sur $[0,+\infty[$.

Posons, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $w_n=\int_{n-1}^n f(t)\,\mathrm{d}t-f(n)$.

On a alors :

$$w_n=[(t-n+1)f(t)]_{n-1}^n-\int_{n-1}^n (t-n+1)f'(t)\,\mathrm{d}t-f(n)=-\int_{n-1}^n (t-n+1)f'(t)\,\mathrm{d}t \tag{2.15}$$

Donc $|w_n|\leqslant\int_{n-1}^n |f'(t)|\,\mathrm{d}t$

Et $\sum_{k=1}^n |w_k|\leqslant\int_0^n |f'(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^{+\infty}|f'(t)|\,\mathrm{d}t$.

Donc la série $\sum_{n\geqslant 1} w_n$ est absolument convergente.

D'où le théorème :

Théorème :

Soit $f\colon [0,+\infty[\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que f' soit intégrable sur $[0,+\infty[$. Alors :

1. La série de terme général $w_n=\int_{n-1}^n f(t)\,\mathrm{d}t-f(n)$ (définie pour $n\in\mathbb{N}^*$) converge absolument.
2. Si de plus f est intégrable sur $[0,+\infty[$, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} f(n)$ converge, et dans ce cas $\sum_{n=1}^{+\infty} w_n=\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t-\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$

C) Exemple : la constante d'Euler

Soit $f\colon \begin{array}{rcl}[0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}\\ t & \longmapsto & \dfrac{1}{1+t}\end{array}$, positive, continue et décroissante.

Alors la série de terme général $w_n=\int_{n-1}^n \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t-\frac{1}{1+n}$ converge.

Et $\sum_{k=1}^n w_k=\int_0^n \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t-\sum_{k=1}^n\frac{1}{1+k}=\ln(n+1)-\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}+1$.

On pose alors $\gamma=1-\sum_{k=1}^{+\infty} w_k$

On a $0\leqslant\sum_{k=1}^{+\infty} w_k\leqslant f(0)=1$

Donc $\gamma\in[0;1]$, et :

$$\boxed{\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}=\ln n+\gamma+o(1)} \tag{2.16}$$

Valeur approchée : $\gamma=0,577$.

V Exemples de séries semi-convergentes

A) Cas des séries alternées – critère de Leibniz

Définition :

On appelle série alternée toute série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ à termes dans $\mathbb{K}$ telle que $(-1)^n u_n$ soit de signe constant.

Si ce signe est positif, on a $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=(-1)^n|u_n|$, et si ce signe est négatif, on a $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=(-1)^{n+1}|u_n|$.

Théorème (critère spécial des séries alternées) :
Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série alternée.

Si la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante de limite nulle, alors la série converge.

Démonstration :
On suppose par exemple que $\forall n \in \mathbb{N}, (-1)^n u_n \geqslant 0$.

On étudie la suite $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, ou plutôt $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$:

- $S_{2n} - S_{2n+2} = -u_{2n+1} - u_{2n+2} = |u_{2n+1}| - |u_{2n+2}| \geqslant 0$.

  Donc $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
- $S_{2n+1} - S_{2n+3} = -u_{2n+2} - u_{2n+3} = |u_{2n+3}| - |u_{2n+2}| \leqslant 0$.

  Donc $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
- $S_{2n} - S_{2n+1} = -u_{2n+1} = |u_{2n+1}|$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, S_{2n} \geqslant S_{2n+1}$, et $S_{2n} - S_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Les deux suites sont donc adjacentes, et convergent vers une même limite S.

Donc $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers S.

Exemple :
La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge.

Information sur la convergence de $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ (toujours avec $(-1)^n u_n \geqslant 0$) :

- $\forall n \in \mathbb{N}, S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n}$, donc $\forall n \in \mathbb{N}, S \in [(S_n, S_{n+1})]$

  ($[(x,y)]$ signifie $[\min(x,y), \max(x,y)]$)
- $\forall n \in \mathbb{N}, |R_n| = |S - S_n| \leqslant |S_n - S_{n+1}| \leqslant |u_{n+1}|$
- $S \geqslant S_1 = |u_0| - |u_1| \geqslant 0$. Donc S est du signe de u_0.

  (Dans le cas d'une série tronquée, S est du signe du premier terme)

Remarque :
La réciproque du théorème est fausse :

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & \text{si } n \equiv 0 \mod 2 \\ -\frac{1}{n^3} & \text{si } n \equiv 1 \mod 2 \end{cases} \tag{2.17}$$

$\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est absolument convergente, mais ne vérifie pas le critère de Leibniz.

B) Exemples d'utilisation de groupements de termes

Exemple 1 Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ avec $u_n = \frac{(-1)^n}{n+z}$ où $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_-$.

Méthode 1 On note $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_{2n} + u_{2n+1}$.
Alors $v_n = \frac{1}{2n+z} - \frac{1}{2n+1+z} = \frac{1}{(2n+z)(2n+1+z)}$
Ainsi, $|v_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4n^2}$, donc $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ est absolument convergente.
Soit $V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ et $V = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$
Alors $V_n = U_{2n+1}$, donc $U_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} V$
De plus, $U_{2n} = U_{2n+1} - u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} V$.
Donc $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Méthode 2 On note pour $n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_n + u_{n+1}$.

Alors $|w_n| = |\frac{1}{(n+z)(n+1+z)}| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$.

Donc $\sum_{n\geqslant 0} w_n$ converge, disons vers W.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $w_n = \sum_{k=0}^{n}(u_k + u_{k+1}) = 2\sum_{k=0}^{n} u_k - u_0 + u_{n+1}$

Donc $U_n = \frac{1}{2}(w_n + u_0 - u_{n+1})$, et $U_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}(W + u_0)$.

Exemple 2 Soit $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ où $u_n = \cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right) \times \frac{1}{n}$.

On a : $\cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv 0 \mod 3 \\ \frac{-1}{2} & \text{sinon} \end{cases}$

On pose alors $v_n = u_{3n} + u_{3n+1} + u_{3n+2}$ pour $n \geqslant 1$

Ainsi,

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1}{3n} - \frac{1/2}{3n+1} - \frac{1/2}{3n+2} = \frac{1}{3n}\left(1 - \frac{1/2}{1+\frac{1}{3n}} - \frac{1/2}{1+\frac{2}{3n}}\right) \\ &= \frac{1}{3n}\left(1 - \frac{1}{2}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \frac{1}{2}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned} \tag{2.18}$$

Donc $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ converge, et on vérifie qu'alors $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge...

C) Exploitation de développements limités

Exemple 1 $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ où $u_n = \frac{(-1)^n}{n+z}$, $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_-$.

Rappel :

Pour une variable complexe u,

$\frac{1}{1+u} = 1 - u + \underset{u\to 0}{o}(|u|)$ (en effet, $\frac{1}{1+u} = 1 - u + \frac{u^2}{1+u}$)

Donc $u_n = \frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{z}{n}}\right) = \frac{(-1)^n}{n}(1 + \underset{n\to+\infty}{O}(\frac{z}{n})) = \frac{(-1)^n}{n} + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Or, la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n}$ converge (critère de Leibniz), ainsi que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n - \frac{(-1)^n}{n}$ (Domination)

Donc $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

Exemple 2 $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^{n-1}}$. On pose $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^{n-1}}$.

Déjà, pour $n \geqslant 1$, $\sqrt{n} > (-1)^n$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

Pour $n \geqslant 1$, on a :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{1+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}}\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \end{aligned} \tag{2.19}$$

Donc $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ diverge (car sinon $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ convergerait aussi)

Attention : On a pourtant $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, terme général d'une série convergente.

En général, si on a deux suites u et v telles que $|u_n| \sim |v_n|$ et $|v_n|$ est décroissante, on n'a pas pour autant $|u_n|$ décroissante, même à partir d'un certain rang.

D) Transformation d'Abel (hors–programme)

Idée : Intégration par parties discrète On cherche à calculer $\sum a_k b_k$.

On pose $B_n = \sum_{k=0}^n b_k$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \geqslant n+1$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{p} a_k b_k = \sum_{k=n+1}^{p} a_k B_k - \sum_{k=n+1}^{p} a_k B_{k-1} &= \sum_{k=n+1}^{p} a_k B_k - \sum_{k=n}^{p-1} a_{k+1} B_k \\
&= \sum_{k=n+1}^{p} (a_k - a_{k+1}) B_k - a_{n+1} B_n + a_{p+1} B_p \\
&= [a_{p+1} B_p - a_{n+1} B_n] - \sum_{k=n+1}^{p} (a_{k+1} - a_k) B_k
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Application (Théorème d'Abel) :

Soit $(a_k)_{k\geqslant 0}$ une suite réelle décroissante de limite nulle, et $(b_k)_{k\geqslant 0}$ une suite de $\mathbb{K}$ telle que $\left(\sum_{k=0}^n b_k\right)_{n\geqslant 0}$ soit bornée. Alors la série $\sum_{k\geqslant 0} a_k b_k$ converge.

Démonstration :

On va vérifier le critère de Cauchy.

Posons $B_n = \sum_{k=0}^n b_k$, et $M \geqslant 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |B_n| \leqslant M$.

Alors, pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=n}^{n+p} a_k b_k\right| \leqslant |a_{n+p+1} B_{n+p}| + |a_{n+1} B_n| + \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_{k+1} - a_k||B_k| \\
(a_{n+p+1} + a_{n+1})M + M \underbrace{\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k - a_{k+1}}_{= a_{n+1} - a_{n+p+1}}
\end{aligned} \tag{2.21}$$

C'est-à-dire $|R_{n,p}| \leqslant 2M a_{n+1}$

Or, $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0, 2M a_{n+1} \leqslant \varepsilon$.

Donc, si $n \geqslant n_0$ et pour $p \in \mathbb{N}$, $|R_{n,p}| \leqslant \varepsilon$.

Donc $\sum_{k\geqslant 0} a_k b_k$ converge.

On pouvait aussi simplement remarquer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{p} a_k b_k = a_{p+1} B_p - a_1 B_0 + \underbrace{\sum_{k=1}^{p} (a_k - a_{k+1}) B_k}_{\substack{= O(a_k - a_{k+1}) \text{ terme général} \\ \text{d'une série convergente}}} \tag{2.22}$$

VI Application

A) Développement décimal d'un réel

Définition :

Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

On appelle développement décimal de x toute suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

(1) $d_0 \in \mathbb{N}$ et $\forall n \geqslant 1, d_n \in [\![0, 9]\!]$

(2) $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d_n}{10^n} = x$.

Remarque :

Si $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie (1), alors $\forall n \geqslant 1$, $\frac{d_n}{10^n} \leqslant \frac{9}{10^n}$, donc la série converge bien.

Existence On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = E(10^n x)$, et $\begin{cases} d_0 = u_0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, d_n = u_n - 10u_{n-1} \end{cases}$.

Alors :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, d_n \in \mathbb{N}$...

   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant 10^n x < u_n + 1$,

   Soit $10u_n \leqslant 10^{n+1}x < 10u_n + 10$

   Donc $10u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 10u_n + 9$.

   D'où $0 \leqslant d_{n+1} \leqslant 9$.

2. Montrons par récurrence que $u_n = \sum_{k=0}^{n} d_k 10^{n-k}$.

   - $u_0 = d_0$.
   - Si $u_n = \sum_{k=0}^{n} d_k 10^{n-k}$ pour $n \in \mathbb{N}$, alors :

   $$u_{n+1} = d_{n+1} + 10\sum_{k=0}^{n} d_k 10^{n-k} = d_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} d_k 10^{n+1-k} = \sum_{k=0}^{n+1} d_k 10^{n+1-k} \tag{2.23}$$

   Ce qui achève la récurrence.

Or, on a $u_n \leqslant 10^n x < u_n + 1$, donc $\frac{u_n}{10^n} \leqslant x < \frac{u_n}{10^n} + \frac{1}{10^n}$, soit $x - \frac{1}{10^n} < \sum_{k=0}^{n} \frac{d_k}{10^k} \leqslant x$.

D'où $x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d_k}{10^k}$ d'après le théorème des gendarmes.

Définition :

On dit que $x \in \mathbb{R}$ est décimal s'il existe $(a, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que $x = \frac{a}{10^n}$.

Étude de l'unicité Soit $x \in \mathbb{R}_+$ admettant deux développements décimaux $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Soit $p = \min\{n \in \mathbb{N}, d_n \neq e_n\}$. On va supposer par exemple que $d_p < e_p$.

On a $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{10^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e_n}{10^n}$

Donc $\sum_{n=p}^{+\infty} \frac{d_n}{10^n} = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{e_n}{10^n}$, soit $\sum_{n=p}^{+\infty} \frac{d_n}{10^{n-p}} = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{e_n}{10^{n-p}}$

Donc

$$d_p + \sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{d_n}{10^{n-p}} = e_p + \sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{e_n}{10^{n-p}} \tag{2.24}$$

Or, $\sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{d_n}{10^{n-p}} \leqslant \sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{9}{10^{n-p}} = \frac{9/10}{1-1/10} = 1$, et $\sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{e_n}{10^{n-p}} \geqslant 0$, et $d_p \leqslant e_p - 1$.

D'après l'égalité (2.24), ces trois inégalités sont des égalités.

Donc $e_p = d_p + 1$, et $\forall n \geqslant p+1$, $\begin{cases} d_n = 9 \\ e_n = 0 \end{cases}$.

En particulier, $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e_n}{10^n}$ est décimal, et on écrit :

$$\begin{cases} x = d_0, d_1 \dots d_p 99 \dots \\ x = d_0, d_1 \dots e_p 00 \dots \end{cases} \tag{2.25}$$

Réciproquement, tout nombre décimal admet exactement deux développements décimaux.

Définition :

On appelle développement décimal propre de $x \in \mathbb{R}_+$ son unique développement décimal qui n'est pas stationnaire à 9.

Remarque :

Si x admet un développement décimal stationnaire à 9, alors x est décimal.

Formule de Stirling On cherche un développement asymptotique de $\ln(n!) = \sum_{k=2}^{n} \ln k$.

On considère la fonction $f\colon \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \ln t \end{array}$.

C'est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ (même $\mathcal{C}^\infty$), mais f' n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$. On pose $w_n = \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n)$ pour $n \geqslant 2$.

On a : $\sum_{k=2}^{n} w_k = \int_1^n \ln t\,\mathrm{d}t - \sum_{k=2}^{n} \ln k = n\ln n - n + 1 - \ln n!$.

Par ailleurs, en faisant une intégration par parties :

$$\begin{aligned} w_n &= [(t-n+1)f(t)]_{n-1}^{n} - \int_{n-1}^{n} (n-t+1)f'(t)\,\mathrm{d}t - f(n) \\ &= -\int_{n-1}^{n} (n-t+1)f'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\left[\frac{(t-n+1)^2}{2}f'(t)\right]_{n-1}^{n} + \int_{n-1}^{n} \frac{(t-n+1)^2}{2}f''(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{2n} + \frac{1}{2}\int_{n-1}^{n} \frac{-(t-n+1)^2}{t^2}\,\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{2.26}$$

On pose $x_n = \int_{n-1}^{n} \frac{(t-n+1)^2}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

Alors $0 \leqslant x_n \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{(n-1)^2}$, donc $\sum_{n\geqslant 2} x_n$ converge.

Ainsi,

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{n} w_k &= \frac{-1}{2}\left(\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} + \sum_{k=2}^{n} x_k\right) = \frac{-1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - 1 + \sum_{k=2}^{n} x_k\right) \\ &= \frac{-1}{2}\left(\ln n + \gamma - 1 + o(1) + \sum_{k=2}^{+\infty} x_k + o(1)\right) \end{aligned} \tag{2.27}$$

Donc $n\ln n - n + 1 - \ln n! = \frac{-1}{2}\left(\ln n + \gamma - 1 + \sum_{k=2}^{+\infty} x_k + o(1)\right)$

On pose $K = 1 + \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{+\infty} x_k$.

Donc $\ln n! = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + K + o(1)$

Soit : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^n}{e^n}\sqrt{n}e^K$.

Calcul de e^K On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x$.

Alors, pour $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x = \left[-\cos x \sin^{n-1} x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^{n-2} x\,\mathrm{d}x \\ &= 0 + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\,\mathrm{d}x - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \end{aligned} \tag{2.28}$$

Donc $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$.

On montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2}$ et $I_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$

Ainsi,

$$I_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\frac{(2n)^{2n}}{e^{2n}}\sqrt{2n}e^K}{2^{2n}\left(\frac{n^n}{e^n}\sqrt{n}e^K\right)^2}\frac{\pi}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{e^K\sqrt{2n}} \tag{2.29}$$

Et

$$I_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2^{2n}\left(\frac{n^n}{e^n}\sqrt{n}e^K\right)^2}{\frac{(2n+1)^{2n+1}}{e^{2n+1}}\sqrt{2n+1}e^K} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^{K+1}}{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n+1} 2\sqrt{2n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^K}{2\sqrt{2n}} \tag{2.30}$$

Or, la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Donc $I_{2n} \geqslant I_{2n+1} \geqslant I_{2n+2}$, donc $\frac{\pi}{e^K\sqrt{2n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^K}{2\sqrt{2n}}$, c'est-à-dire $e^{2K} = 2\pi$, ou $e^K = \sqrt{2\pi}$.

Ainsi, $\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}$

B) Espaces $l^1(\mathbb{K})$ et $l^2(\mathbb{K})$

Théorème, définition :
On note $l^1(\mathbb{K})$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^N$ telles que la série $\sum_{n\geqslant 0}|u_n|$ converge. Alors $l^1(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-ev.

Si de plus on note $\begin{aligned} N_1 \colon l^1(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty}|u_n| \end{aligned}$, alors N_1 est une norme sur le $\mathbb{K}$-ev $l^1(\mathbb{K})$.

Démonstration :
Déjà, $l^1(\mathbb{K}) \subset \mathbb{K}^N$ et $0 \in l^1(\mathbb{K})$, donc $l^1(\mathbb{K}) \neq \varnothing$.

Soient maintenant $\lambda \in \mathbb{K}$, $u, v \in l^1(\mathbb{K})$.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n}|\lambda u_k + v_k| \leqslant |\lambda|\sum_{k=0}^{n}|u_k| + \sum_{k=0}^{n}|v_k| \leqslant |\lambda|N_1(u) + N_2(u) \tag{2.31}$$

Donc $\sum_{n\geqslant 0}|\lambda u_n + v_n|$ converge, donc $\lambda u + v \in l^1(\mathbb{K})$.

De plus, $N_1(\lambda u) = \sum_{k=0}^{+\infty}|\lambda u_k| = |\lambda|N_1(u)$, et $N_1(u+v) = \sum_{k=0}^{+\infty}|u_k + v_k| \leqslant N_1(u) + N_1(v)$.

Donc $l^1(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, et de plus on a clairement $\forall u \in l^1(\mathbb{K}), N_1(u) \geqslant 0$.

Soit maintenant $u \in l^1(\mathbb{K})$, supposons que $N_1(u) = 0$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 0$, donc N_1 est une norme sur $l^1(\mathbb{K})$.

Théorème, définition :
On note $l^2(\mathbb{K})$ l'ensemble des suites u de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telles que $\sum_{n\geqslant 0}|u_n|^2$ soit convergente.

Alors $l^2(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-ev.

On note $\begin{aligned} \langle\cdot|\cdot\rangle \colon l^2(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (u,v) &\longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty}\bar{u}_n v_n \end{aligned}$

Alors $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est un produit scalaire, et on note N_2 sa norme euclidienne associée.

(On verra plus tard ce qu'est un produit scalaire sur un $\mathbb{C}$-ev)

Démonstration (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ pour le produit scalaire) :

- Déjà, $l^2(\mathbb{K})$ est une partie non vide de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
- Soient $\lambda \in \mathbb{K}, u \in l^2(\mathbb{K})$. Alors clairement $\sum_{n\geqslant 0}|\lambda u_n|^2$ converge.
- Soient $u, v \in l^2(\mathbb{K})$.

  Alors $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n + v_n|^2 \leqslant |u_n|^2 + 2|u_n||v_n| + |v_n|^2 \leqslant 2|u_n|^2 + 2|v_n|^2$

  Donc $\sum_{n\geqslant 0}|u_n + v_n|^2$ converge.
- Ainsi, $l^2(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$

- De plus, l'application $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est bien définie et est un produit scalaire :

  Soient $u, v \in l^2(\mathbb{R})$.

  Alors $\sum_{n\geqslant 0} \bar{u}_n v_n$ converge :

  $\sum_{k=0}^{n} |\bar{u}_k v_k| \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} |u_k|^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} |v_k|^2$ (car pour $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha\beta \leqslant \frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)$)

  Soit $\sum_{k=0}^{n} |\bar{u}_k v_k| \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty} |v_k|^2$

  D'où la convergence. De plus, $\langle u|v\rangle \leqslant \frac{1}{2}\langle u|u\rangle + \frac{1}{2}\langle v|v\rangle \leqslant \frac{1}{2}(N_2(u)^2 + N_2(v)^2)$

  - Elle est symétrique : $\sum_{k=0}^{+\infty} u_n v_n = \sum_{k=0}^{+\infty} v_n u_n$
  - Linéaire par rapport à la première variable : $\sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda u_n + v_n) w_n = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} u_n w_n + \sum_{k=0}^{+\infty} v_n w_n$
  - Positive : $\sum_{k=0}^{+\infty} u_n^2 \geqslant 0$.
  - Définie positive : $\sum_{k=0}^{+\infty} u_n^2 = 0 \implies \forall n \in \mathbb{N}, u_n = 0$.

Vocabulaire :

- N_1 s'appelle la norme de la convergence en moyenne
- N_2 s'appelle la norme de la convergence en moyenne quadratique.
- L'espace $l^1(\mathbb{K})$ est appelé l'espace des suites sommables
- L'espace $l^2(\mathbb{K})$ est appelé l'espace des suites de carré sommable

VII Familles sommables

Problème Soit I un ensemble, $(\alpha_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$.

Comment définir $\sum_{i\in I} \alpha_i$ avec de bonnes propriétés ?

A) Famille de réels positifs

Définition (sommabilité) :

Soit I un ensemble, et $(\alpha_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs. On note $P_f(I)$ l'ensemble des parties finies de I, et, pour $J \in P_f(I)$, $s_J(\alpha) = \sum_{i\in J} \alpha_i$.

On dit que la famille $(\alpha_i)_{i\in I}$ est sommable lorsque $\{s_J(\alpha), J \in P_f(I)\}$ est majoré, et on pose alors $s_I(\alpha) = \sum_{i\in I} \alpha_i = \sum_{J\in P_f(I)} s_J(\alpha)$

Si $(\alpha_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable, on pose alors $\sum_{i\in I} \alpha_i = +\infty$.

Définition :

On appelle support de $(\alpha_i)_{i\in I}$ l'ensemble $\operatorname{supp}(\alpha) = \{i \in I, \alpha_i \neq 0\}$.

Théorème :

Si $(\alpha_i)_{i\in I}$ est une famille de réels positifs, alors :

$(\alpha_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si $(\alpha_i)_{i\in\operatorname{supp}(\alpha)}$ est sommable, et dans ce cas, $\sum_{i\in I} \alpha_i = \sum_{i\in\operatorname{supp}(\alpha)} \alpha_i$.

Démonstration :

Si $(\alpha_i)_{i\in I}$ est sommable, de somme S, alors pour tout $J \in P_f(\operatorname{supp}(\alpha))$, J est aussi une partie finie de I, donc $s_J(\alpha) = \sum_{i\in J} \alpha_i \leqslant S$.

D'où la sommabilité de $(\alpha_i)_{i\in\mathrm{supp}(\alpha)}$, et $\sum_{i\in\mathrm{supp}(\alpha)} \alpha_i \leqslant S$.

Supposons maintenant que $(\alpha_i)_{i\in\mathrm{supp}(\alpha)}$ est sommable, de somme S.

Pour $J \subset I$ fini, $J \cap \mathrm{supp}(\alpha)$ est finie, et :

$$\sum_{i\in J} \alpha_i = \sum_{i\in J\cap\mathrm{supp}(\alpha)} \alpha_i + \sum_{i\in J\setminus\mathrm{supp}(\alpha)} \alpha_i = \sum_{i\in J\cap\mathrm{supp}(\alpha)} \alpha_i \tag{2.32}$$

Donc $\forall J \in P_f(I), \sum_{i\in J} \alpha_i \leqslant \sum_{i\in\mathrm{supp}(\alpha)} \alpha_i = S$

Donc $(\alpha_i)_{i\in I}$ est sommable, et $\sum_{i\in I} \alpha_i = \sup_{J\in P_f(I)} \sum_{i\in J} \alpha_i \leqslant S$.

Théorème :

Si $(\alpha_i)_{i\in I}$ est sommable, alors $\mathrm{supp}(\alpha)$ est un ensemble au plus dénombrable.

Démonstration :

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \left\{i \in I, \alpha_i > \frac{S}{2^n}\right\}$ où S est la somme de $(\alpha_i)_{i\in I}$.

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, J_n est une partie finie de I, et $\#J_n < 2^n$.

En effet, dans le cas contraire, J_n contiendrait une partie K de cardinal 2^n, et on aurait $\sum_{i\in K} \alpha_i > 2^n \frac{S}{2^n} = S$, ce qui est impossible car $S = \sup_{J\in P_f(I)} \sum_{i\in J} \alpha_i$.

De plus, pour $i \in I$, si $\alpha_i > 0$, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha_i > \frac{S}{2^n}$.

Donc $\mathrm{supp}(\alpha) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n$, donc $\mathrm{supp}(\alpha)$ est au plus dénombrable.

Remarque :

En pratique, on aura alors $I = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{N}^2$.

B) Familles dénombrables de réels positifs

Théorème :

Soient I un ensemble dénombrable, $(\alpha_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs, $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de parties finies de I telles que $I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n$ (on notera $J_n \uparrow I$)

Alors $(\alpha_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si $(s_{J_n}(\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite, auquel cas $\sum_{i\in I} \alpha_i = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i\in J_n} \alpha_i$.

Démonstration :

Si $\sum_{i\in I} \alpha_i = S < +\infty$, alors, pour $n \in \mathbb{N}$, $s_{J_n}(\alpha) \leqslant S$.

De plus, comme $J_n \subset J_{n+1}$, on a $s_{J_n}(\alpha) \leqslant s_{J_{n+1}}(\alpha)$. Donc la suite $(s_{J_n}(\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée, donc converge et $\lim_{n\to+\infty} \sum_{i\in J_n} \alpha_i \leqslant S$

Supposons maintenant que $(s_{J_n}(\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite L.

Montrons déjà un lemme :

Lemme :

Soit $K \in P_f(I)$, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $K \subset J_n$.

En effet : Pour tout $i \in K$, comme $I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n$, il existe $n_i \in \mathbb{N}$ tel que $i \in J_{n_i}$.

Posons alors $n = \max_{i\in K} n_i$. Pour tout $i \in K$, on a alors $n_i \leqslant n$, donc $i \in J_{n_i} \subset J_n$.

Donc $K \subset J_n$.

Maintenant :

Soit $K \in P_f(I)$. Il existe alors $n \in \mathbb{N}$ tel que $K \subset J_n$, et on a alors $s_K(\alpha) \leqslant s_{J_n}(\alpha)$.

Comme $(s_{J_n}(\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, on a $s_K(\alpha) \leqslant L$, et $\sup_{K\in P_f(I)} s_K(\alpha) \leqslant L < +\infty$.

Donc $(\alpha_i)_{i\in I}$ est sommable, et $\sum_{i\in I} \alpha_i \leqslant L$.

Théorème :

Soit $(\alpha_i)_{i\in I}$ une famille dénombrable de réels positifs, et $\varphi\colon \mathbb{N} \to I$ une bijection.

Alors $(\alpha_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant 0} \alpha_{\varphi(n)}$ converge, auquel cas $\sum_{i\in I} \alpha_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{\varphi(n)}$.

Démonstration :

On applique le théorème précédent avec $J_n = \{\varphi(k), k \in [\![0,n]\!]\}$.

On a alors les équivalences :

$$\begin{aligned}
(\alpha_i)_{i\in I} \text{ est sommable} &\iff \left(\sum_{i\in J_n} \alpha_i\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est majorée} \\
&\iff \left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_{\varphi(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est majorée} \\
&\iff \sum_{n\geqslant 0} \alpha_{\varphi(n)} \text{ converge}
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Auquel cas $\sum_{i\in I} \alpha_i = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \alpha_{\varphi(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{\varphi(n)}$.

Corollaire :

Soit $\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n$ une série à termes positifs, et $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une permutation de $\mathbb{N}$.

Alors $\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n$ converge si et seulement si $\sum_{n\geqslant 0} \alpha_{\varphi(n)}$ converge, et dans ce cas :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{\varphi(n)} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_i \tag{2.34}$$

Théorème :

Si $(\alpha_i)_{i\in I}$ est une famille sommable, et si J est une partie de I, alors $(\alpha_i)_{i\in J}$ est sommable, et $\sum_{i\in J} \alpha_i \leqslant \sum_{i\in I} \alpha_i$.

Démonstration :

Pour tout $K \in P_f(J)$, on a $K \in P_f(I)$, donc $\sum_{i\in K} \alpha_i \leqslant \sum_{i\in I} \alpha_i$, puis en passant à la borne supérieure, $\sum_{i\in J} \alpha_i \leqslant \sum_{i\in I} \alpha_i$.

C) Familles sommables de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

On note ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition :

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$. On dit que cette famille est sommable lorsque $\sum_{i\in I} |u_i| < +\infty$.

Remarque :

La famille $(u_i)_{i\in I}$ est alors à support au plus dénombrable, on supposera donc I dénombrable.

Théorème, définition :
Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable de $\mathbb{K}$. Soit $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties finies de I telle que $J_n \uparrow I$. Alors :

(1) La suite $(s_{J_n}(u))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

(2) Sa limite ne dépend pas du choix de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on la note $\sum_{i\in I} u_i$.

(3) On a de plus $|\sum_{i\in I} u_i| \leqslant \sum_{i\in I} |u_i|$.

Démonstration :

(1) Comme I est sommable, $(|u_i|)_{i\in I}$ est sommable dans $\mathbb{R}_+$.

Donc la suite $(s_{J_n}(|u|))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et est alors de Cauchy :

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0, \forall p \in \mathbb{N}, s_{J_{n+p}}(|u|) - s_{J_n}(|u|) \leqslant \varepsilon$.

Soient donc $n \geqslant n_0$ et $p \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\left|s_{J_{n+p}}(u) - s_{J_n}(u)\right| &= \left|\sum_{i\in J_{n+p}} u_i - \sum_{i\in J_n} u_i\right| = \left|\sum_{i\in J_{n+p}\setminus J_n} u_i\right| \text{ car } J_n \subset J_{n+p} \\ &\leqslant \sum_{i\in J_{n+p}\setminus J_n} |u_i| = s_{J_{n+p}}(|u|) - s_{J_n}(|u|) \leqslant \varepsilon\end{aligned} \tag{2.35}$$

Donc la suite $(s_{J_n}(u))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc converge.

(2) Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une autre suite de parties finies telle que $K_n \uparrow I$.

On note $S = \lim_{n\to+\infty} s_{J_n}(u)$; montrons que $s_{K_n}(u) \xrightarrow[n\to+\infty]{} S$.

Soit $\varepsilon > 0$, et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0, \forall p \in \mathbb{N}, s_{J_{n+p}}(|u|) - s_{J_n}(|u|) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$

En particulier (calcul précédent), $\forall n \geqslant n_0, |S - s_{J_n}(u)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

D'après le lemme vu dans la sous-section précédente, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_1, J_{n_0} \subset K_n$.

De plus, pour $n \geqslant n_1$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $K_n \subset J_{n_0+p}$

D'où $|s_{K_n}(u) - S| \leqslant \left|s_{K_n}(u) - s_{J_{n_0}}(u)\right| + \left|s_{J_{n_0}}(u) - S\right| \leqslant \sum_{i\in K_n\setminus J_{n_0}} |u_i| + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \sum_{i\in J_{n_0+p}\setminus J_{n_0}} |u_i| + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon$

Ainsi, on a trouvé $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_1 \, |s_{K_n}(u) - S| \leqslant \varepsilon$

(3) conséquence du calcul précédent :

$|s_{J_n}(u)| \leqslant s_{J_n}(|u|)$ et, par passage à la limite, $|\sum_{i\in I} u_i| \leqslant \sum_{i\in I} |u_i|$

Théorème :
Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille dénombrable de $\mathbb{K}$, et $\varphi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une bijection.

Alors $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si $\sum_{n\geqslant 0} u_{\varphi(n)}$ est absolument convergente, et si c'est le cas, $\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)}$.

Démonstration :
Il suffit de prendre $J_n = \varphi(\llbracket 0, n \rrbracket)$ dans le théorème précédent.

Corollaire :
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathbb{K}$, et si φ est une permutation de $\mathbb{N}$, alors $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente si et seulement si $\sum_{n\geqslant 0} u_{\varphi(n)}$ l'est, et dans ce cas, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

Théorème :

Toute sous-famille d'une famille sommable est sommable.

Démonstration :

Soit $J \subset I$ et $(u_i)_{i\in I}$ sommable.

Alors (dernier théorème du B)) :

$\sum_{i\in J} |u_i| \leqslant \sum_{i\in I} |u_i|$, donc $(u_i)_{i\in J}$ est sommable (car $\sum_{i\in J} |u_i|$ est majoré donc converge)

Théorème (sommation par paquet – hors programme) :

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$, et $I = \bigcup_{k\in K} J_k$ une partition de I indexée par un ensemble K.

Alors $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si :

- Pour tout $k \in K$, $(u_i)_{i\in J_k}$ est sommable.
- Et $(\sum_{i\in J_k} |u_i|)_{k\in K}$ est sommable,

Auquel cas $\sum_{i\in I} u_i = \sum_{k\in K} \sum_{i\in J_k} u_i$.

D) Familles sommables indexées par $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Théorème :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une famille de $\mathbb{K}$.

Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable si et seulement si les séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} u_{-n}$ sont absolument convergentes, auquel cas $\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=1}^{+\infty} u_{-n} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{n} u_k$.

Démonstration :

On applique le théorème de sommation par paquets à $K = \{0, 1\}$, $J_0 = \mathbb{N}$ $J_1 = \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$

D'où on tire l'équivalence.

Attention : Par exemple, $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ où $u_n = \sin n$ n'est pas sommable, mais $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=-n}^{n} u_k = 0$.

Théorème (Fubini) :

Soit $(u_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ une famille de $\mathbb{K}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $(u_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ est sommable
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{p\geqslant 0} u_{n,p}$ est absolument convergente, et, en posant $s_n = \sum_{p=0}^{+\infty} |u_{n,p}|$, la série $\sum_{n\geqslant 0} s_n$ est convergente.
3. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{n\geqslant 0} u_{n,p}$ est absolument convergente, et, en posant $\sigma_n = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_{n,p}|$, la série $\sum_{p\geqslant 0} \sigma_p$ est convergente.

De plus, si ces propositions sont vérifiées, $\sum_{(n,p)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} u_{n,p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p}\right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p}\right)$.

Démonstration :

C'est un cas particulier du théorème de sommation par paquets.

Exemple d'application Pour $\alpha > 1$, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge, et on pose $\xi(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ (fonction Zêta de Riemann). Pour $p \geqslant 2$, on pose $u_p = \xi(p) - 1$. La série $\sum_{p\geqslant 2} u_p$ converge-t-elle ?

Étude :

Si la série converge, alors la famille $\left(\frac{1}{n^p}\right)_{\substack{n\geqslant 2\\ p\geqslant 2}}$ est sommable.

On peut donc appliquer le théorème de Fubini :

$$\sum_{p=2}^{+\infty} u_p = \sum_{p=2}^{+\infty}\left(\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^p}\right) = \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\sum_{p=2}^{+\infty}\frac{1}{n^p}\right) = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1/n^2}{1-1/n} = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1 \tag{2.36}$$

Maintenant :

Pour tout $n \geqslant 2$, la série de terme général $\frac{1}{n^p}$ converge, et $\sum_{p=2}^{+\infty}\frac{1}{n^p} = \frac{1}{n(n-1)}$.

De plus, $\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n(n-1)}$ converge vers 1.

Donc d'après le théorème de Fubini, $\left(\frac{1}{n^p}\right)_{\substack{n\geqslant 2\\ p\geqslant 2}}$ est sommable, et les calculs vus dans l'étude on bien un sens ; donc la série $\sum_{p\geqslant 2}\xi(p) - 1$ est convergente.

E) Produit de Cauchy

Définition :

Soient $u, v \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$. On appelle produit de Cauchy de u et v la suite w définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{\substack{p+q=n\\ (p,q)\in\mathbb{N}^2}} u_p v_q \tag{2.37}$$

On note alors $w = u * v$.

Théorème :

Soient $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ deux séries absolument convergentes. Alors la série $\sum_{n\geqslant 0}(u*v)_n$ est absolument convergente, et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(u*v)_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}v_n\right) \qquad \text{ou : } \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{\substack{p+q=n\\ (p,q)\in\mathbb{N}^2}} u_p v_q = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}v_n\right) \tag{2.38}$$

Démonstration :

On étudie la sommabilité de $(u_p v_q)_{\substack{n\geqslant 2\\ p\geqslant 2}}$:

- Pour $p \in \mathbb{N}$, $\sum_{q\geqslant 0} u_p v_q$ est absolument convergente, et $\sum_{k=0}^{+\infty}|u_p v_q| = |u_p|\sum_{q=0}^{+\infty}|v_q|$.

  De plus, la série $\sum_{p\geqslant 0}\left(|u_p|\sum_{q=0}^{+\infty}|v_q|\right)$ est convergente, de somme $\sum_{p=0}^{+\infty}|u_p| \times \sum_{q=0}^{+\infty}|v_q|$

  Ainsi, d'après le théorème de Fubini, on a :

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_p v_q = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{q=0}^{+\infty}u_p v_q\right) = \sum_{p=0}^{+\infty}u_p\left(\sum_{q=0}^{+\infty}v_q\right) = \left(\sum_{q=0}^{+\infty}v_q\right)\left(\sum_{p=0}^{+\infty}u_p\right) \tag{2.39}$$

- Calculons maintenant cette somme au moyen de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties finies de $\mathbb{N}^2$ définie par $J_n = \{(p,q) \in \mathbb{N}^2, p+q \leqslant n\}$. On a alors $J_n \uparrow \mathbb{N}^2$.

Donc $\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_p v_q = \lim_{n\to+\infty} \sum_{(p,q)\in J_n} u_p v_q = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \sum_{p+q=k} u_p v_q\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} (u*v)_n$

Donc déjà $\sum_{n\geqslant 0} (u*v)_n$ converge.

- Par le même raisonnement, on a $\underbrace{\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} |u_p v_q|}_{\text{fini}} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{p+q=k} |u_p v_q| \geqslant \sum_{k=0}^n |(u*v)_k|$

  Donc $\sum_{n\geqslant 0} (u*v)_n$ est absolument convergente.

Exemple :

$\exp\colon (\mathbb{C},+) \to (\mathbb{C}^*,\times)$ est un morphisme de groupes :

- $\exp(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{0^n}{n!} = 1$
- Soient $a, b \in \mathbb{C}$.

  Les séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ où $u_n = \frac{a^n}{n!}$ et $v_n = \frac{b^n}{n!}$ sont absolument convergentes.

  Donc $\sum_{n\geqslant 0} w_n$ où $w = u*v$ est absolument convergente, et $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$.

  Or, pour $n \in \mathbb{N}, w_n = \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!}\frac{b^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n!} C_n^k a^k b^{n-k} = \frac{1}{n!}(a+b)^n$.

  Donc par passage à la limite, $\exp(a+b) = \exp(a)\times\exp(b)$.

- De plus, pour $a \in \mathbb{C}$, on a :

  $\exp(a)\times\exp(-a) = \exp(0) = 1$, donc $\exp(a) \neq 0$.

Ainsi, $\exp(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^*$, et exp est bien un morphisme.