



# Chapitre 1 : Ensembles dénombrables, topologie de $\mathbb{R}$ , suites numériques

## I Ensembles dénombrables

### A) Propriétés élémentaires de $\mathbb{N}$ , ensembles finis

Voir cours de sup

### B) Ensembles dénombrables

#### **Définition :**

- Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles. On dit que  $E$  et  $F$  sont équipotents lorsqu'il existe une bijection de  $E$  dans  $F$ .
- On dit qu'un ensemble  $E$  est dénombrable lorsqu'il est équipotent à  $\mathbb{N}$ .

#### **Exemple :**

- $\mathbb{N}$  est dénombrable
- $p\mathbb{N}$  où  $p \in \mathbb{N}^*$ , une bijection de  $\mathbb{N}$  dans  $p\mathbb{N}$  étant  $n \mapsto pn$ .
- $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ . En effet, l'application  $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$  est bijective.  
 $(n, p) \longmapsto (2p + 1)2^n$

#### **Théorème :**

Un ensemble  $I$  est dénombrable si et seulement si  $I$  est la réunion d'une famille croissante de parties finies, non stationnaire.

C'est-à-dire :  $I$  est dénombrable  $\iff$  Il existe une famille  $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de parties finies de  $I$  telle que :

- $\forall n \in \mathbb{N}, J_n \subset J_{n+1}$
- $I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n$
- $\forall n \in \mathbb{N}, J_n \subset I$  et  $J_n \neq I$

#### **Démonstration :**

$\implies$  Comme  $I$  est équipotent à  $\mathbb{N}$ , on peut supposer que  $I = \mathbb{N}$ .

Posons  $J_n = \llbracket 0, n \rrbracket$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

Alors  $J_n$  est fini,  $J_n \subset J_{n+1}$ ,  $I = \mathbb{N} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n$  et enfin  $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas stationnaire.

$\impliedby$  Supposons l'existence d'une telle famille  $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , mais strictement croissante.

On note  $a_n = \text{card}(J_n)$  (noté aussi  $\#J_n$ ),  $\begin{cases} K_0 = J_0 \\ K_n = J_n \setminus J_{n-1} \end{cases}$  et  $b_n = \#K_n = a_n - a_{n-1}$

Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe une bijection  $f_n : \llbracket 1, b_n \rrbracket \rightarrow K_n$

On définit l'application  $g : \mathbb{N}^* \rightarrow I$  par :

$g(n) = f_{k+1}(n - a_k)$ , où, pour  $n \in \mathbb{N}$ , on a noté  $k = \min \{i \in \mathbb{N}, n \leq a_{i+1}\}$

(Ainsi,  $a_k < n \leq a_{k+1}$ , donc  $n - a_k \leq a_{k+1} - a_k = b_{k+1}$  donc  $g$  est bien définie)

Alors :

◇  $g$  est injective :

Soient  $n, n' \in \mathbb{N}$ , supposons que  $g(n) = g(n')$ .

Soient  $k, k'$  tels que  $a_k < n \leq a_{k+1}$  et  $a_{k'} < n' \leq a_{k'+1}$ .

Alors  $g(n) = f_{k+1}(n - a_k) \in K_{k+1}$  et  $g(n') = f_{k'+1}(n' - a_{k'}) \in K_{k'+1}$

Alors  $k = k'$ , car sinon, comme les  $K_n$  sont disjoints, on aurait  $g(n) \neq g(n')$ .

Donc  $f_{k+1}(n - a_k) = g(n) = g(n') = f_{k+1}(n' - a_k)$

Soit, comme  $f_{k+1}$  est injective,  $n = n'$ . D'où l'injectivité de  $g$ .

◇  $g$  est surjective :

Soit  $x \in I$ . Il existe donc  $i \in \mathbb{N}$  tel que  $x \in J_i$ ; posons  $k = \min \{i \in \mathbb{N}, x \in J_i\}$

Ainsi,  $x \notin J_{k-1}$ , et donc  $x \in J_k \setminus J_{k-1} = K_k$

Il existe donc  $j \in \llbracket 1, b_k \rrbracket$  tel que  $x = f_k(j)$ .

Et on a alors  $g(a_k + j) = f_k(a_k + j - a_k) = f_k(j) = x$

D'où la surjectivité de  $g$ .

Si maintenant la famille  $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est que croissante, on a toujours le résultat en « retirant » les termes en double, ce qui ne mettra en défaut aucune des hypothèses.

Ainsi, par exemple :

- $\mathbb{Z}$  est dénombrable
- $\mathbb{Q}$  est dénombrable, avec  $J_n = \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*, p \wedge q = 1, |p| + q \leq n + 1 \right\}$
- Toute partie infinie de  $\mathbb{N}$  est dénombrable.

### **Théorème :**

Soit  $E$  un ensemble. Il n'existe aucune surjection de  $E$  sur  $\mathcal{P}(E)$

### **Démonstration :**

Supposons qu'il existe une telle surjection  $f : E \rightarrow \mathcal{P}(E)$ .

Notons  $A = \{x \in E, x \notin f(x)\}$ . Comme  $f$  est surjective,  $A$  possède un antécédent  $a$  par  $f$ .

Si  $a \in A$ , alors par définition,  $a \notin f(a) = A$ , ce qui est contradictoire.

Donc  $a \notin A$ , c'est-à-dire que  $a \in f(A)$  soit  $a \in A$  ce qui est aussi contradictoire.

Donc  $f$  n'est pas surjective.

### **Corollaire :**

$\mathbb{N}$  n'est pas équipotent à  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ .

**Exemple :**

L'ensemble  $\mathbb{R}$  n'est pas dénombrable (démonstration de Cantor) :

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite à valeurs dans  $[0; 1[$

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on notera  $(a_n^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  le développement décimal de  $u_n$ , c'est-à-dire l'unique suite à valeurs dans  $\llbracket 0, 9 \rrbracket$  telle que  $u_n = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^k \frac{a_n^{(i)}}{10^i}$  et telle que  $(a_n^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  n'est pas stationnaire à 9.

La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  s'écrit donc, en base 10 :

$$\begin{aligned} u_0 &= 0, a_0^{(1)} a_0^{(2)} \dots \\ u_1 &= 0, a_1^{(1)} a_1^{(2)} \dots \\ &\vdots \\ u_k &= 0, a_k^{(1)} a_k^{(2)} \dots a_k^{(k+1)} \dots \end{aligned} \tag{1.1}$$

Soit  $(b^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $\begin{cases} b^{(k)} = 0 & \text{si } a_k^{(k+1)} \neq 0 \\ b^{(k)} = 1 & \text{sinon} \end{cases}$

Alors cette suite n'est pas stationnaire en 9. Donc  $(b^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  est le développement décimal propre de  $b = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^k \frac{b^{(i)}}{10^i}$ .

Alors  $b \notin \{u_k, k \in \mathbb{N}\}$

En effet, supposons que  $b = u_k$ , où  $k \in \mathbb{N}$ .

Alors  $\forall i \in \mathbb{N}^*, b^{(i)} = a_k^{(i)}$

Donc, en particulier,  $b^{(k+1)} = a_k^{(k+1)}$ , ce qui est impossible.

Il n'existe donc pas de surjection de  $\mathbb{N}$  dans  $[0, 1[$ , et encore moins dans  $\mathbb{R}$ .

**Remarque :**

$\mathbb{R}$  est donc un ensemble « plus grand » que  $\mathbb{N}$ .

L'hypothèse du continu affirme qu'il n'existe pas d'ensemble « plus grand » que  $\mathbb{N}$  et « plus petit » que  $\mathbb{R}$ . (l'existence ou la non-existence d'un tel ensemble est en effet indécidable sans cet axiome supplémentaire)

## II Espaces vectoriels normés

### A) Norme, distance associée

On désignera ici par  $\mathbb{K}$  le corps  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

**Définition :**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev. On appelle norme sur  $E$  toute application  $N : E \rightarrow \mathbb{R}$  telle que :

1.  $\forall x \in E, N(x) \geq 0$
2.  $\forall x \in E, N(x) = 0 \implies x = 0$
3.  $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$
4.  $\forall (x, y) \in E^2, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$

On appelle espace vectoriel normé le couple  $(E, N)$ .

**Exemple :**

$|\cdot|$  est une norme sur  $\mathbb{R}$ . Mais  $|\cdot|$  peut aussi être vue comme norme sur  $\mathbb{C}$ .

**Propriétés :**

- La norme  $N$  est une application 1-lipschitzienne par rapport à elle-même, c'est-à-dire :

$$|N(x) - N(y)| \leq N(x - y) \tag{1.2}$$

- La norme  $N$  est convexe, c'est-à-dire :

$$\forall t \in [0; 1], \forall (x, y) \in E^2, N(tx + (1 - t)y) \leq tN(x) + (1 - t)N(y) \tag{1.3}$$

**Démonstration :**

- $N(x) = N(y + (x - y)) \leq N(y) + N(x - y)$

Donc  $N(x) - N(y) \leq N(x - y)$ .

Et, de même,  $N(y) - N(x) \leq N(y - x) = N(x - y)$ .

Donc  $|N(x) - N(y)| \leq N(x - y)$

- $N(tx + (1 - t)y) \leq N(tx) + N((1 - t)y) \leq tN(x) + (1 - t)N(y)$

**Définition :**

- On appelle distance associée à  $N$  l'application  $d: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$   
 $(x, y) \mapsto N(x - y)$

Elle vérifie les propriétés, pour tous  $x, y, z \in E$  :

1.  $d(x, y) \geq 0$
2.  $d(x, y) = 0 \iff x = y$
3.  $d(x, y) = d(y, x)$
4.  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

- On notera dans la suite  $N(x) = \|x\|$ .

**Définition :**

- On appelle boule ouverte de centre  $x \in E$  et de rayon  $r \geq 0$  ( $E$  étant un  $\mathbb{K}$ -ev normé « evn ») l'ensemble  $B(x, r) = \{x \in E, d(x, y) < r\}$ .

On appelle boule fermée de même centre et même rayon l'ensemble  $\bar{B}(x, r) = \{x \in E, d(x, y) \leq r\}$

On appelle enfin sphère (toujours même centre, même rayon) l'ensemble  $S(x, r) = \{x \in E, d(x, y) = r\}$

- Soit  $A$  une partie de l'evn  $E$ ; on dit que  $A$  est bornée lorsqu'elle est contenue dans une boule fermée de  $E$ .

Ainsi,  $A$  est bornée  $\iff \exists x \in E, \exists r \in \mathbb{R}_+^*, A \subset \bar{B}(x, r)$

- Soit  $A$  une partie de l'evn  $E$ . Alors :

$A$  est bornée  $\iff \forall x \in E, \exists r \in \mathbb{R}_+^*, A \subset \bar{B}(x, r)$

**Démonstration :**

$\Leftarrow$  ...( $E$  étant non vide, on a le choix)

$\Rightarrow$  Supposons que  $A$  est bornée. Soit  $x \in E, r \in \mathbb{R}_+^*$  tels que  $A \subset \bar{B}(x, r)$ .

Soit maintenant  $x' \in E$ . Pour tout  $y \in A$ , on a :

$$N(y - x) \leq r \tag{1.4}$$

Et  $N(y - x') \leq N(y - x) + N(x - x')$

Donc  $N(y - x') \leq r + N(x - x')$ . Ainsi,  $A \subset \bar{B}(x, r + N(x - x'))$

**Définition :**

On dit qu'une application  $f$  d'un ensemble  $X$  dans un evn  $E$  est bornée lorsque la partie  $f(X)$  est une partie bornée de  $E$ . C'est-à-dire :

$$f \text{ est bornée} \iff \exists x \in E, \exists r \in \mathbb{R}_+, \forall a \in X, d(f(a), x) \leq r$$

**Exemples**

- Soit  $E = \mathbb{K}^n$  et  $N_1: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Alors  $N_1$  est une norme sur  $E$ .  
 $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n |x_i|$
- Soit  $E = \mathbb{K}^n$  et  $N_2: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Alors  $N_2$  est une norme sur  $E$ .  
 $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$
- Soit  $E = \mathbb{K}^n$  et  $N_\infty: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Alors  $N_\infty$  est une norme sur  $E$ .  
 $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \max_{i \in [1, n]} |x_i|$
- Soient  $a, b$  avec  $a < b$  deux réels,  $E = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ . L'application  $N_1: E \rightarrow \mathbb{R}$  est  
 $f \mapsto \int_a^b |f(t)| dt$

une norme sur  $E$ .

**Démonstration :**

- ◇ Positivité :  $\forall f \in E, \int_a^b |f(t)| dt \geq 0$
- ◇ Séparation : soit  $f \in E$ , supposons que  $N_1(f) = 0$   
 La fonction  $x \mapsto |f(x)|$  est positive, continue sur  $[a, b]$  et  $\int_a^b |f(t)| dt = 0$ .  
 Donc  $f = 0$ .
- ◇ Soit  $\lambda \in \mathbb{R}, f \in E$ .  
 Alors  $N_1(\lambda f) = \int_a^b |\lambda f(t)| dt = \int_a^b |\lambda| |f(t)| dt = |\lambda| N_1(f)$
- ◇ Soit  $(f, g) \in E^2$

$$N_1(f + g) = \int_a^b |f(t) + g(t)| dt \leq \int_a^b |f(t)| + |g(t)| dt \leq N_1(f) + N_1(g) \tag{1.5}$$

- Dans  $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$  :  
 $N_2: E \rightarrow \mathbb{R}$  est une norme.  
 $f \mapsto \left( \int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}$
- Toujours dans  $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ ,  $N_\infty: f \mapsto \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$  est aussi une norme.

**B) Suites dans un espace vectoriel normé**

**Définition :**

Soit  $E$  un evn,  $u \in E^{\mathbb{N}}$

- On dit que  $u$  est bornée lorsque  $u(\mathbb{N})$  est bornée.
- On dit que  $u$  admet une limite  $l \in E$  lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies \|u_n - l\| \leq \varepsilon \tag{1.6}$$

**Proposition :**

Soit  $E$  un evn,  $u \in E^{\mathbb{N}}$ .

1.  $u$  converge vers  $l \in E$  si et seulement si  $(\|u_n - l\|)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0.
2.  $u$  est bornée si et seulement si  $(\|u_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$  l'est.
3. Si  $u$  converge, alors  $u$  est bornée.
4. Si  $u$  admet une limite  $l$ , alors celle-ci est unique.

**Démonstration :**

Les trois premiers sont des conséquences de la définition.

Pour le 4 : Soient  $l, l' \in E$ . Supposons que  $u$  converge vers  $l$  et  $l'$  distincts.

Posons  $\varepsilon = \|l - l'\|$ .

Alors il existe  $n_1 \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1 \implies \|u_n - l\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$

Et  $n_2 \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_2 \implies \|u_n - l'\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ .

Pour  $k = \max(n_1, n_2)$ , on a :

$\|l - l'\| \leq \|l - u_k\| + \|u_k - l'\|$ , c'est-à-dire  $\varepsilon \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}$ . Ce n'est pas possible car  $\varepsilon > 0$ . Donc  $l = l'$ .

**Théorème :**

L'ensemble  $\mathcal{E}$  des suites convergentes dans  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $E^{\mathbb{N}}$  et l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &\longrightarrow E && \text{est linéaire.} \\ u &\longmapsto \lim u \end{aligned}$$

**Démonstration :**

- Déjà, la suite nulle est bien dans  $\mathcal{E}$ .

- Soient  $u, v \in \mathcal{E}$ ,  $u_\infty, v_\infty$  leurs limites et  $\varepsilon > 0$ .

$$\text{Il existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies \begin{cases} \|u_n - u_\infty\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ \|v_n - v_\infty\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

Alors, pour  $n \geq n_0$ ,  $\|(u_n + v_n) - (u_\infty + v_\infty)\| \leq \|u_n - u_\infty\| + \|v_n - v_\infty\| \leq \varepsilon$ .

Donc  $u + v$  converge vers  $u_\infty + v_\infty$ .

- Soit  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  convergeant vers  $\lambda_\infty$ .

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$  convergeant vers  $u_\infty$ .

Alors  $(\lambda_n u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\lambda_\infty u_\infty$ .

En effet : soit  $L$  un majorant de  $(|\lambda_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ .

$$\text{Soit } \varepsilon > 0. \text{ Il existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies \begin{cases} |\lambda_n - \lambda_\infty| < \varepsilon \\ \|u_n - u_\infty\| < \varepsilon \end{cases}$$

Donc, pour  $n \geq n_0$  :

$$\begin{aligned} \|\lambda_n u_n - \lambda_\infty u_\infty\| &\leq \|\lambda_n u_n - \lambda_n u_\infty\| + \|\lambda_n u_\infty - \lambda_\infty u_\infty\| \\ &\leq |\lambda_n| \|u_n - u_\infty\| + |\lambda_n - \lambda_\infty| \|u_\infty\| \\ &< L\varepsilon + \varepsilon \|u_\infty\| = (L + \|u_\infty\|)\varepsilon \end{aligned} \tag{1.7}$$

D'où le résultat.

**Théorème :**

Si  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$  sont deux suites dont l'une est bornée et l'autre de limite nulle, alors  $(\lambda_n u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est de limite nulle.

En effet : Supposons  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  bornée. Soit  $L \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, |\lambda_n| \leq L$ .

Alors pour  $\varepsilon > 0$ , il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies \|u_n\| < \frac{\varepsilon}{L}$

Donc  $n \geq n_0 \implies \|\lambda_n u_n\| = |\lambda_n| \|u_n\| \leq \varepsilon$ .

**Exemples**

- Avec  $E = \mathbb{R}^n$ , muni de la norme  $\| \cdot \|_{\infty}$ .

Alors une suite  $[(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})]_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers  $(x_1^{\infty}, x_2^{\infty}, \dots, x_n^{\infty})$  si et seulement si  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i^{(k)} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} x_i^{\infty}$ .

- Avec  $E = \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$  muni de la norme  $\| \cdot \|_1$

Soit  $f_n : x \mapsto x^n$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

Montrons que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est de limite nulle dans  $(E, \| \cdot \|_1)$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}, \|f_n\|_1 = \int_0^1 |f_n(x)| dx = \frac{1}{n+1}$ .

Donc  $\|f_n\|_1 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ , d'où  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

Attention :  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne converge pas ponctuellement vers 0 :

$$\begin{cases} \text{si } x \neq 1, & f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \\ \text{mais si } x = 1, & f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1 \end{cases} \tag{1.8}$$

La suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge t'elle dans  $(E, \| \cdot \|_{\infty})$  ?

On a  $\|f_n\|_{\infty} = \max_{x \in [0; 1]} |x^n| = 1$

Donc déjà  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne tend pas vers 0.

Montrons que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'a pas de limite dans  $(E, \| \cdot \|_{\infty})$ .

Supposons qu'elle en a une, disons  $g \in E$ .

Alors, pour  $x < 1, |f_n(x) - g(x)| \leq \|f_n - g\|_{\infty} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ .

Donc  $\forall x > 1, g(x) = \lim f_n(x) = 0$

Et de plus  $g(1) = \lim f_n(1) = 1$ .

Donc  $g$  n'est pas continue en 1 ; il y a donc contradiction.

Donc  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne converge pas dans  $(E, \| \cdot \|_{\infty})$ .

**Remarque :**

La convergence uniforme (pour  $\| \cdot \|_{\infty}$ ) implique la convergence ponctuelle :

$$\left( \|f_n - g\|_{\infty} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \right) \implies \left( \forall x \in \dots, |f_n(x) - g(x)| \leq \|f_n - g\|_{\infty} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \right) \tag{1.9}$$

**C) Suites extraites, valeurs d'adhérence**

**Définition :**

On dit que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite extraite de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  s'il existe une injection croissante  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\varphi(n)}$ .

**Remarque :**

Si  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite extraite de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  avec  $v_n = u_{\varphi(n)}$ ,

Et si  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est extraite de  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  avec  $w_n = v_{\psi(n)}$ ,

Alors  $w_n = u_{\varphi \circ \psi(n)}$ .

**Théorème :**

- Toute suite extraite d'une suite bornée est bornée
- Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente, et tend vers la même limite.
- Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $l \in E$  si et seulement si les deux suites extraites  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  convergent vers cette même limite  $l$ .

**Définition :**

On dit que  $a \in E$  est une valeur d'adhérence de  $u \in E^{\mathbb{N}}$  s'il existe une suite extraite de  $u$  de limite  $a$ .

**Théorème :**

Soient  $a \in E$ ,  $u \in E^{\mathbb{N}}$ . Les propositions suivantes sont équivalentes :

1.  $a$  est valeur d'adhérence de  $u$ .
2.  $\forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \exists p \geq n, \|u_p - a\| \leq \varepsilon$

**Démonstration :**

1.  $\implies$  2. Soit  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  telle que  $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{\varphi(n)}$ .

Déjà, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\varphi(n) \geq n$ .

Soient alors  $\varepsilon > 0$  et  $n \in \mathbb{N}$ . Il existe alors  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $k \geq n_0 \implies \|u_{\varphi(k)} - a\| \leq \varepsilon$

Posons  $p = \max(\varphi(n), \varphi(n_0))$ ,  $m = \max(n, n_0)$  (ainsi,  $\varphi(m) = p$ )

Alors  $p \geq \varphi(n) \geq n$ , et  $m \geq n_0$ , donc  $\|u_p - a\| = \|u_{\varphi(m)} - a\| \leq \varepsilon$ .

2.  $\implies$  1. On construit  $\varphi$  par récurrence :

◇ On pose  $\varphi(0) = 0$

◇ Soit  $n \geq 0$ , supposons que  $\varphi(n)$  est construit.

On pose  $\varepsilon = \frac{1}{2^{n+1}}$ . Il existe donc  $p \geq \varphi(n) + 1$  tel que  $\|u_p - a\| \leq \varepsilon$ .

On pose alors  $\varphi(n+1) = \min \{p \in \mathbb{N}, p \geq \varphi(n) + 1 \text{ et } \|u_p - a\| \leq \varepsilon\}$

L'application ainsi construite est strictement croissante, et, pour  $n \geq 1$ ,  $\|u_{\varphi(n)} - a\| \leq \frac{1}{2^n}$

Donc  $a$  est une valeur d'adhérence de  $u$ .

**Théorème :**

Une condition nécessaire mais non suffisante pour que  $u \in E^{\mathbb{N}}$  soit convergente est qu'elle admette une unique valeur d'adhérence.

La condition n'est pas suffisante. Par exemple :  $u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \equiv 0 \pmod{2} \\ n & \text{si } n \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$



### III Topologie des espaces vectoriels normés

#### A) Voisinages

Dans toute la suite, on fixe  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé.

**Définition :**

Soit  $a \in E$ ,  $V$  une partie de  $E$ . On dit que  $V$  est un voisinage de  $a$  lorsqu'il existe une boule ouverte de centre  $a$  contenue dans  $V$ .

On note alors  $V(a)$  l'ensemble des voisinages de  $a$ .

**Proposition :**

Soit  $a \in E$ .

- (V1)  $E$  est un voisinage de  $a$ ,  $\emptyset$  n'en est pas un.
- (V2) Toute intersection finie de voisinages de  $a$  est un voisinage de  $a$ .
- (V3) Toute partie de  $E$  contenant un voisinage de  $a$  est un voisinage de  $a$ .

**Démonstration :**

(V1) Par exemple,  $B(a, 1) \subset E$

Si  $B(a, r) \subset \emptyset$  pour un certain  $r > 0$ , alors en particulier  $a \in \emptyset$ , ce qui est impossible.

(V2) Si  $V_1, V_2$  sont deux voisinages de  $a$ , il existe  $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+^*$  tels que  $B(a, r_1) \subset V_1$  et  $B(a, r_2) \subset V_2$ .

Donc  $B(a, \min(r_1, r_2)) \subset V_1 \cap V_2$ .

On peut ensuite facilement conclure par récurrence.

(V3) Si  $V \subset W$  et si  $B(a, r) \subset V$ , alors  $B(a, r) \subset W$

**Définition, proposition :**

Soit  $A$  une partie de  $E$ , et  $a \in A$ . On appelle voisinage de  $a$  dans  $A$  la trace sur  $A$  d'un voisinage de  $a$  dans  $E$ , c'est-à-dire, pour  $V \subset A$  :

$$V \in V_A(a) \iff \exists W \in V(a), W \cap A = V \tag{1.10}$$

$$\iff \exists r \in \mathbb{R}_+^*, B(a, r) \cap A \subset V \tag{1.11}$$

(Où on a noté  $V_A(a)$  l'ensemble des voisinages de  $a$  dans  $A$ )

**Démonstration :**

(1.10)  $\implies$  (1.11) Soit  $V \subset A$ . Supposons qu'il existe  $W \in V(a)$  tel que  $W \cap A = V$

Alors il existe  $r > 0$  tel que  $B(a, r) \subset W$ . Donc  $B(a, r) \cap A \subset W \cap A = V$ .

(1.11)  $\implies$  (1.10) Soit  $V \subset A$ . Supposons qu'il existe  $r \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $B(a, r) \cap A \subset V$ .

Alors, si on pose  $W = B(a, r) \cup V$ , on aura :

$$W \cap A = (B(a, r) \cup V) \cap A = \underbrace{(B(a, r) \cap A)}_{\subset V} \cup \underbrace{V \cap A}_{=V} = V \tag{1.12}$$

D'où l'équivalence.

## B) Ouverts et fermés

### Définition :

On appelle ouvert de  $E$  toute partie  $O$  de  $E$  qui est voisinage de chacun de ses points.

On note  $O(E)$  l'ensemble des ouverts de  $E$ .

Si  $O \subset E$ ,  $O \in O(E) \iff \forall x \in O, \exists r > 0, B(x, r) \subset O$

### Proposition :

L'ensemble des ouverts de  $E$  vérifie les propriétés suivantes :

- (O1)  $E$  est un ouvert,  $\emptyset$  est un ouvert.
- (O2) Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert
- (O3) Toute réunion d'ouverts est un ouvert

### Démonstration :

(O2) Montrons le pour deux ouverts  $\Omega_1, \Omega_2$

Si  $\Omega_1 \cap \Omega_2$  est vide, alors  $\Omega_1 \cap \Omega_2$  est ouvert. Sinon :

Soit  $x \in \Omega_1 \cap \Omega_2$ . Montrons que  $\Omega_1 \cap \Omega_2 \in V(x)$

Comme  $\Omega_1$  est ouvert, c'est un voisinage de  $x$ . De même,  $\Omega_2$  est un voisinage de  $x$ . Donc  $\Omega_1 \cap \Omega_2$  est un voisinage de  $x$ .

(O3) Soit  $(\Omega_i)_{i \in I}$  une famille d'ouverts.

Notons  $\Omega = \bigcup_{i \in I} \Omega_i$ .

Pour  $x \in \Omega$ , il existe  $i_0 \in I$  tel que  $x \in \Omega_{i_0}$ .

Alors  $\Omega_{i_0} \subset \Omega$ , et  $\Omega_{i_0}$  est un voisinage de  $x$ , donc  $\Omega$  en est aussi un.

### Théorème :

Toute boule ouverte est ouverte.

### Démonstration :

Soient  $x \in E$ ,  $r > 0$ . Montrons que  $B(x, r)$  est ouverte.

Soit  $y \in B(x, r)$ . On pose  $r' = \|x - y\|$ .

Alors  $B(y, r - r') \subset B(x, r)$ . En effet :

Soit  $z \in B(y, r - r')$ . Alors  $\|z - x\| \leq \|z - y\| + \|y - x\| < r - r' + r' = r$ , donc  $z \in B(x, r)$ , d'où

l'inclusion. Donc  $B(x, r)$  est un voisinage de  $y$ , et donc de tous ses points.

### Définition :

On appelle fermé de  $E$  tout complémentaire d'un ouvert de  $E$ . On note  $F(E)$  l'ensemble des fermés de  $E$ .

### Proposition :

L'ensemble des fermés de  $E$  vérifie les propriétés :

- (F1)  $E$  et  $\emptyset$  sont fermés.
- (F2) Toute réunion finie de fermés est fermée

(F3) Toute intersection de fermés est fermée.

**Démonstration :**

Il suffit de passer au complémentaire.

**Théorème :**

Toute boule fermée est un fermé.

**Démonstration :**

Soit  $x \in E$ ,  $r > 0$ . On va montrer que  $C_E \bar{B}(x, r)$  est ouvert.

Soit  $y \in C_E \bar{B}(x, r)$ .

On pose  $r' = \|y - x\| > r$

Montrons qu'alors  $B(y, r - r') \subset C_E \bar{B}(x, r)$

Soit  $z \in B(y, r - r')$ . Alors  $d(z, x) + d(z, y) \geq d(x, y)$

Donc  $d(z, x) \geq d(x, y) - d(z, y) > r' - (r' - r) = r$

**Corollaire :**

Toute sphère est fermée.

En effet :  $S(x, r) = \bar{B}(x, r) \cap C_E(B(x, r))$ , et est donc une intersection de fermés.

**Définition (topologie induite sur une partie de  $E$ ) :**

Soit  $A$  une partie de  $E$ ,  $X$  une partie de  $A$ .

- On dit que  $X$  est un ouvert de  $A$  lorsque  $X$  est voisinage dans  $A$  de chacun de ses points. On note alors  $O(A)$  l'ensemble des ouverts de  $A$ .
- On dit que  $X$  est un fermé de  $A$  si son complémentaire dans  $A$  est un ouvert. On note alors  $F(A)$  l'ensemble des fermés de  $A$ .

**Théorème :**

Soit  $A$  une partie de  $E$ . Les ouverts de  $A$  sont les traces sur  $A$  des ouverts de  $E$ , c'est-à-dire, pour  $X \subset A$  :

$$X \in O(A) \iff \exists O \in O(E), X = O \cap A \tag{1.13}$$

**Démonstration :**

$\Leftarrow$  Soit  $O \in O(E)$ , supposons que  $X = O \cap A$ .

Soit  $x \in X$ . Montrons que  $X \in V_A(x)$ .

Comme  $x \in O$ ,  $O \in V(x)$ . Donc  $O \cap A \in V_A(x)$ .

$\Rightarrow$  Soit  $X \in O(A)$ . Alors, pour tout  $x \in X$ , on a  $X \in V_A(x)$ , donc il existe  $r_x > 0$  tel que  $B(x, r_x) \cap A \subset X$ .

Posons alors  $O = \bigcup_{x \in X} B(x, r_x)$ . C'est une réunion d'ouverts, donc un ouvert.

Par ailleurs,  $O \cap A = (\bigcup_{x \in X} B(x, r_x)) \cap A = \bigcup_{x \in X} (B(x, r_x) \cap A) \subset X$ .

Pour  $x \in X$ ,  $x \in B(x, r_x) \subset O$ . De plus,  $x \in A$  (car  $X \subset A$ ). Donc  $X \subset O \cap A$ .

Donc  $X = O \cap A$ .

**Conséquence :**

Soit  $A$  une partie de  $E$ . Les fermés de  $A$  sont les traces sur  $A$  des fermés de  $E$ .

**Démonstration :**

Si  $X \subset E$ , alors  $(C_E X) \cap A = C_A(X \cap A)$

### C) Adhérence, intérieur, frontière

**Définition :**

Soit  $X$  une partie de  $E$ , et  $x \in E$ .

- Le point  $x$  est dit adhérent à  $X$  si tout voisinage de  $x$  coupe  $X$ .

On appelle adhérence de  $X$  l'ensemble des point adhérents à  $X$ , qu'on note  $\bar{X}$ . Ainsi :

$$\begin{aligned} x \in \bar{X} &\iff \forall V \in V(x), V \cap X \neq \emptyset \\ &\iff \forall r > 0, B(x, r) \cap X \neq \emptyset \end{aligned} \tag{1.14}$$

- On dit que le point  $x$  est intérieur à  $X$  si  $X$  est voisinage de  $x$ . On appelle intérieur de  $X$  l'ensemble des points intérieurs à  $X$ , qu'on note  $\overset{\circ}{X}$ .
- On note frontière de  $X$  l'ensemble  $\bar{X} \setminus \overset{\circ}{X} = \partial X$ .

**Théorème :**

1.  $C_E(\bar{X}) = \overline{\overset{\circ}{C_E(X)}}$ ,  $C_E(\overset{\circ}{X}) = \overset{\circ}{\overline{C_E(X)}}$
2. L'adhérence de  $X$  est le plus petit fermé contenant  $X$ .
3. L'intérieur de  $X$  est le plus grand ouvert contenu dans  $X$ .
4. La frontière de  $X$  est un fermé.
5.  $X$  est ouvert  $\iff X = \overset{\circ}{X}$ ;  $X$  est fermé  $\iff X = \bar{X}$ .

**Démonstration :**

- 1  $\subset$  Soit  $x \in C_E(\bar{X})$ .

Il existe alors  $V \in V(x)$  tel que  $V \cap X = \emptyset$

Alors  $V \subset C_E(X)$ . Donc  $C_E(X) \in V(x)$ , c'est-à-dire  $x \in \overline{\overset{\circ}{C_E(X)}}$ .

$\supset$  On fait la même chose dans l'autre sens.

$\diamond$  La deuxième égalité découle de la première :

On a  $C_E(\overline{\overset{\circ}{C_E(X)}}) = \overline{\overset{\circ}{C_E(C_E(X))}}$  (égalité précédente avec  $C_E(X)$ ),

C'est-à-dire  $C_E(\overline{\overset{\circ}{C_E(X)}}) = \overset{\circ}{\bar{X}}$ , donc  $\overline{\overset{\circ}{C_E(X)}} = C_E(\overset{\circ}{X})$  (passage au complémentaire)

- 2 Montrons que  $\bar{X}$  est un fermé, que  $X \subset \bar{X}$ , et que, pour  $F$  fermé de  $E$ ,  $X \subset F \implies \bar{X} \subset F$ .

Posons  $A = \bigcap_{\substack{F \text{ fermé} \\ F \supset X}} F$ . Alors  $A$  est fermé (car intersection de fermés), et contient  $X$ .

Montrons que  $A = \bar{X}$ .

Soit  $x \in \bar{X}$ . Montrons que pour  $F$  fermé contenant  $X$ ,  $x \in F$ .

Supposons qu'au contraire  $x \notin F$ ; Alors  $C_E F$  (qui est un ouvert et contient  $x$ ) est un voisinage de  $x$  ne rencontrant pas  $X$  (puisque'il ne rencontre déjà pas  $F$ ), ce qui est impossible. Donc  $x \in F$ .

D'où déjà l'inclusion  $\bar{X} \subset A$ , car  $A$  est fermé et contient  $X$ .

Soit  $x \in A$ . Supposons que  $x \notin \bar{X}$ . Alors il existe un voisinage de  $x$  ne rencontrant pas  $X$ , c'est-à-dire qu'il existe  $r > 0$  tel que  $B(x, r) \cap X = \emptyset$ . Alors  $F = C_E B(x, r)$  est un fermé, et il contient

$X$ . Donc  $A \subset F$ , et donc  $x \notin A$ , ce qui est contradictoire puisqu'on a pris  $x$  dans  $A$ . Donc  $x \in \bar{X}$ .  
D'où l'autre inclusion, et l'égalité.

D'où le résultat.

3 Il suffit de passer au complémentaire :

Pour tout  $A$  ouvert inclus dans  $X$ , on a :

$A \subset X$ . Donc  $C_E(X) \subset C_E(A)$ . Donc  $\overline{C_E(X)} \subset C_E(A)$  car  $C_E(A)$  est fermé.

C'est-à-dire d'après les formules précédentes  $C_E(\overset{\circ}{X}) \subset C_E(A)$ , donc  $A \subset \overset{\circ}{X}$ .

Ensuite,  $\overset{\circ}{X}$  est ouvert, puisque  $C_E(\overset{\circ}{X}) = \overline{C_E(X)}$  est fermé.

4 On a en effet  $\partial X = \bar{X} \cap C_E(\overset{\circ}{X}) = \bar{X} \cap \overline{C_E(X)}$ , intersection de fermés.

5 découle aisément de 2 et 3.

**Propriétés :**

1.  $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$ ,  $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$

2.  $A \subset B \implies \begin{cases} \bar{A} \subset \bar{B} \\ \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B} \end{cases}$

3.  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ ,  $\overset{\circ}{A \cap B} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$

4.  $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$ ,  $\overset{\circ}{A \cup B} \supset \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$

**Démonstration :**

1  $\bar{A}$  est fermé, donc  $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$

2 Si  $A \subset B$ , alors  $A \subset \bar{B}$ . Or,  $\bar{A}$  est le plus petit fermé contenant  $A$ , donc  $\bar{A} \subset \bar{B}$  puisque  $\bar{B}$  est fermé.

3  $A \subset \bar{A} \cup \bar{B}$ , et  $B \subset \bar{A} \cup \bar{B}$ .

Donc  $A \cup B \subset \bar{A} \cup \bar{B}$ . Comme  $\bar{A} \cup \bar{B}$  est fermé,  $\overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cup \bar{B}$ .

$\supset A \subset A \cup B$ . Donc  $\bar{A} \subset \overline{A \cup B}$ .

De même,  $\bar{B} \subset \overline{A \cup B}$ .

Donc  $\bar{A} \cup \bar{B} \subset \overline{A \cup B}$ .

◇ D'où l'égalité, l'autre égalité s'obtenant par passage au complémentaire en utilisant les égalités du théorème précédent :

$$C_E(\overline{C_E(A) \cup C_E(B)}) = \overline{C_E(C_E(A) \cup C_E(B))} = \overset{\circ}{A \cap B} \quad (1.15)$$

$$\text{Et } C_E(\overline{C_E(A)} \cup \overline{C_E(B)}) = C_E(\overline{C_E(A)}) \cap C_E(\overline{C_E(B)}) = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$$

4 On a  $A \cap B \subset A$ .

Donc  $\overline{A \cap B} \subset \bar{A}$ .

De même,  $\overline{A \cap B} \subset \bar{B}$ .

Donc  $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$

Pour l'autre : il suffit encore de passer au complémentaire.

**Remarque :**

En général, on n'a pas  $\bar{A} \cap \bar{B} \subset \overline{A \cap B}$

Par exemple :

Avec  $E = \mathbb{R}$ ,  $A = \{0\}$  et  $B = ]0; 1]$

On a  $\bar{A} \cap \bar{B} = \{0\}$ , mais  $\overline{A \cap B} = \emptyset$ .

**Théorème (Caractérisation séquentielle de l'adhérence) :**

Soient  $X \subset E$  et  $x \in E$

Alors  $x \in \bar{X}$  si et seulement si existe  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$  qui converge vers  $x$ .

**Démonstration :**

- Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$  qui converge vers  $x$ .  
Alors pour  $r > 0$ , il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq n_0 \implies \|x_n - x\| < r$ .  
Donc  $x_{n_0} \in X \cap B(x, r)$ , donc  $X \cap B(x, r) \neq \emptyset$ .  
Donc  $x$  est adhérent à  $\bar{X}$ .
- Soit  $x \in \bar{X}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $B(x, \frac{1}{2^n}) \neq \emptyset$ .  
Soit donc  $x_n$  un point de cet ensemble.  
La suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie  $\|x_n - x\| < \frac{1}{2^n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .  
Donc  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow x$ .

**Définition :**

Soient  $X \subset E$ ,  $x \in E$ .

On appelle distance de  $x$  à  $X$  le réel  $d(x, X) = \inf \{d(x, y), y \in X\}$ .

**Théorème :**

Pour  $x \in E$ ,  $X \subset E$ ,  $x$  est adhérent à  $X$  si et seulement si  $d(x, X) = 0$ .

**Démonstration :**

$$\begin{aligned}
 d(x, X) = 0 &\iff \forall r > 0, \exists y \in X, d(x, y) < r \\
 &\iff \forall r > 0, B(x, r) \cap X \neq \emptyset
 \end{aligned}
 \tag{1.16}$$

**Remarque :**

On a bien sûr les définitions naturelles d'adhérence, intérieur, frontière relativement à une partie.

Si  $A \subset E$ ,  $X \subset A$ , alors  $\bar{X}^A = \bar{X} \cap A$ , mais  $\overset{\circ}{X}^A \neq \overset{\circ}{X} \cap A$

**Exemples**

- Si  $X = \{a\}$ , alors  $\bar{X} = \{a\}$  et  $\overset{\circ}{X} = \emptyset$  (si  $\dim E \neq 0$ )
- Pour  $x \in E$  et  $r > 0$ , on a :  

$$\overline{B(x, r)} = \bar{B}(x, r), \overset{\circ}{B}(x, r) = B(x, r), \partial(B(x, r)) = S(x, r)$$
- Soit  $X = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$  où  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente.  
Alors  $\bar{X} = X \cup \{\lim u\}$ .

**Démonstration :**

Soient  $x \in E, r > 0$ .

- Montrons que  $\overline{B(x, r)} = \bar{B}(x, r)$  :

Déjà,  $\overline{B(x, r)} \subset \bar{B}(x, r)$ , puisque  $\bar{B}(x, r)$  est fermé et contient  $B(x, r)$ .

Soit maintenant  $y \in \bar{B}(x, r)$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $y_n = x + (1 - \frac{1}{2^n})(y - x)$ . Alors  $\|y_n - x\| = (1 - \frac{1}{2^n}) \underbrace{\|y - x\|}_{\leq r} < r$ .

Donc  $\forall n \in \mathbb{N}, y_n \in B(x, r)$ , et de plus  $\|y - y_n\| = \frac{1}{2^n} \|y - x\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

Donc  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow y$ . Donc  $y \in \overline{B(x, r)}$ .

- Montrons que  $\overset{\circ}{\bar{B}(x, r)} = B(x, r)$  :

Déjà, on a  $B(x, r) \subset \overset{\circ}{\bar{B}(x, r)}$  puisque  $B(x, r)$  est ouvert et est inclus dans  $\bar{B}(x, r)$

On va montrer que si  $\bar{B}(x, r)$  est un voisinage de  $y \in E$ , alors  $\|y - x\| < r$ .

Si  $E = \{0\}$ , le résultat est évident. Sinon, soit  $y \neq x$  un point intérieur à  $\bar{B}(x, r)$ .

Il existe alors  $r' > 0$  tel que  $B(y, r') \subset \bar{B}(x, r)$ .

En particulier,  $z = y + \frac{r'}{2\|y-x\|}(y-x) \in B(y, r')$

Alors  $\|z - x\| = \left\| \left(1 + \frac{r'}{2\|y-x\|}\right) (y-x) \right\| = \left|1 + \frac{r'}{2\|y-x\|}\right| \|y-x\| = \|y-x\| + \frac{r'}{2}$

Or,  $\|z - x\| \leq r$ .

Donc  $\|y-x\| + \frac{r'}{2} \leq r$ , soit  $\|y-x\| < r$

- Montrons que  $\bar{X} = X \cup \{\lim u\}$

Disons que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $l$ . Alors déjà  $l \in \bar{X}$  car il existe une suite  $(u_n)$  à valeurs dans  $X$  qui converge vers  $l$ . Donc déjà  $X \cup \{\lim u\} \subset \bar{X}$ .

Soit maintenant  $y \notin X \cup \{l\}$ , notons  $r = \|y - l\|$ .

Il existe déjà  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq n_0 \implies \|u_n - l\| < \frac{r}{2}$ .

Donc pour tout  $n \geq n_0, \|u_n - y\| \geq \|y - l\| - \|u_n - l\| \geq \frac{r}{2}$ .

Soit maintenant  $r' = \min_{n < n_0} \|y - u_n\|$ .

Alors  $r' > 0$  et  $r > 0$ .

De plus,  $d(y, X) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \|y - u_n\| \geq \min(\frac{r}{2}, r') > 0$

Donc  $y \notin \bar{X}$ , d'où  $\bar{X} = X \cup \{l\}$ .

**Proposition :**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ . On note  $VA(u)$  l'ensemble de ses valeurs d'adhérence.

Alors  $VA(u) = \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \overline{\{u_n, n \geq p\}}$ .

**Démonstration :**

Soit  $\alpha \in \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \overline{\{u_n, n \geq p\}}$ .

Soient  $\varepsilon > 0, N \in \mathbb{N}$ . Comme  $\alpha \in \overline{\{u_n, n \geq N\}}$ , on a  $B(\alpha, \varepsilon) \cap \{u_n, n \geq N\} \neq \emptyset$

Il existe donc  $p \geq N$  tel que  $u_p \in B(\alpha, \varepsilon)$ , soit  $\|u_p - \alpha\| < \varepsilon$ .

Donc  $\alpha$  est une valeur d'adhérence de  $u$ .

Soit maintenant  $\alpha$  une valeur d'adhérence de  $u$ .

Alors  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0, B(\alpha, \varepsilon) \cap \{u_n, n \geq N\} \neq \emptyset$ ,

c'est-à-dire  $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha \in \overline{\{u_n, n \geq N\}}$ , soit  $\alpha \in \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \overline{\{u_n, n \geq p\}}$

D'où l'autre inclusion et l'égalité.

## D) Parties denses

### Définition :

On dit que  $X \subset E$  est dense dans  $E$  lorsque  $\bar{X} = E$ .

Si  $A$  est une partie de  $E$ , on dit qu'une partie  $X$  de  $A$  est dense dans  $A$  si  $A \subset \bar{X}$ .

### Exemple :

Soit  $X$  une partie dénombrable d'un  $\mathbb{R}$ -ev  $E$  non nul.

Alors  $C_E X$  est dense dans  $E$ .

En effet : Soient  $x \in E$  et  $r > 0$ . Montrons déjà que  $B(x, r)$  n'est pas dénombrable.

Comme  $E$  est non nul,  $E \setminus \{x\}$  ne l'est pas. On peut donc prendre  $y \in E \setminus \{0, x\}$ .

Soit  $f: [0, 1[ \rightarrow B(x, r)$ . On a, pour  $t \in [0, 1[$ ,  $\|f(t) - x\| = \left\| t \frac{r}{\|y\|} y \right\| = tr < r$ . De plus,  $f$  est

$$t \mapsto x + t \frac{r}{\|y\|} y$$

injective, et  $[0, 1[$  n'est pas dénombrable.

Donc  $B(x, r)$  n'est pas dénombrable (ni fini)

Ainsi,  $B(x, r) \not\subset X$ . Donc  $B(x, r) \cap C_E X \neq \emptyset$

Donc  $x \in \overline{C_E X}$ .

### Exemples

- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .
- $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{C}, \exists Q \in \mathbb{Q}[X], Q(x) = 0\}$ . Un complexe qui est racine d'un polynôme à coefficients rationnels est dit algébrique.

### Théorème :

Soient  $A \subset E$  et  $X \subset A$ .

Une condition nécessaire et suffisante pour que  $X$  soit dense dans  $A$  est que tout ouvert non vide de  $A$  rencontre  $X$ .

### Démonstration :

- Condition nécessaire :

Supposons que  $X$  est dense dans  $A$ .

Soit  $\Omega$  un ouvert non vide de  $A$ , et  $x \in \Omega$ .

Il existe alors  $r > 0$  tel que  $B(x, r) \cap A \subset \Omega$ .

Comme  $X$  est dense dans  $A$ , on a  $X \cap B(x, r) \neq \emptyset$

Or,  $X \cap B(x, r) = X \cap (B(x, r) \cap A) \subset X \cap \Omega$

Donc  $X \cap \Omega \neq \emptyset$ .

- Condition suffisante :

Supposons que  $\forall \Omega \in \mathcal{O}(A) \setminus \{\emptyset\}, X \cap \Omega \neq \emptyset$ .

Soient alors  $x \in A$  et  $r > 0$ .  $B(x, r)$  est un ouvert non vide, donc rencontre  $X$ . Donc  $x \in \bar{X}$ . Donc

$A \subset \bar{X}$ .



## IV Propriétés de la borne supérieure et topologie de $\mathbb{R}$

### Rappel :

Toute partie  $X$  non vide et majorée de  $\mathbb{R}$  admet un plus petit majorant, appelé sa borne supérieure et noté  $\sup X$ .

Toute partie  $X$  non vide et minorée de  $\mathbb{R}$  admet un plus grand minorant, appelé sa borne inférieure et noté  $\inf X$ .

### Caractérisation :

Soit  $X \subset \mathbb{R}$  non vide et  $a \in \mathbb{R}$ . Alors :

$$a = \sup X \iff \begin{cases} \forall x \in X, x \leq a \\ \forall \varepsilon > 0, ]a - \varepsilon, a] \cap X \neq \emptyset \end{cases} \quad (1.17)$$

$$a = \inf X \iff \begin{cases} \forall x \in X, x \geq a \\ \forall \varepsilon > 0, [a, a + \varepsilon[ \cap X \neq \emptyset \end{cases} \quad (1.18)$$

### A) Théorème de Bolzano–Weierstrass

- Si  $u$  est une suite réelle croissante et majorée, alors  $u$  converge vers  $\sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$ .
- Si  $u$  est une suite réelle décroissante et minorée, alors  $u$  converge vers  $\inf_{n \in \mathbb{N}} u_n$ .
- Si  $u$  et  $v$  sont deux suites adjacentes ( $u$  décroissante,  $v$  croissante et  $u - v \geq 0$  de limite nulle), alors  $u$  et  $v$  convergent vers la même limite.

#### Théorème (Théorème des segments emboîtés) :

Si  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de segment de  $\mathbb{R}$ , décroissante au sens de l'inclusion, alors  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$  est un segment non vide.

Si de plus la longueur de  $K_n$  tend vers 0, alors  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$  est un singleton.

#### Démonstration :

Posons, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $K_n = [a_n, b_n]$ .

Alors  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante et majorée,  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante et minorée.

Soit  $a = \lim a_n$ ,  $b = \lim b_n$ .

$$\text{Alors } x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n \iff \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x \geq a_n \\ x \leq b_n \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq \sup a_n \\ x \leq \inf b_n \end{cases} \iff a \leq x \leq b.$$

#### Théorème (Théorème de Bolzano–Weierstrass) :

Toute suite réelle bornée admet au moins une valeur d'adhérence.

#### Démonstration :

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite bornée,  $a$  et  $b$  des réels tels que  $\forall n \in \mathbb{N}, a \leq u_n \leq b$ .

On construit une suite  $K_n$  de segments de sorte que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A_n = \{p \in \mathbb{N}, u_p \in K_n\}$  soit infini :

- On pose  $K_0 = [a, b]$ . Alors  $A_0 = \mathbb{N}$ , infini.

- Si on a construit  $K_n$  de sorte que  $A_n$  soit infini, disons  $K_n = [a_n, b_n]$  :

On pose  $J_n = [a_n, \frac{a_n+b_n}{2}]$ ,  $J'_n = [\frac{a_n+b_n}{2}, b_n]$

et  $B_n = \{p \in \mathbb{N}, u_p \in J_n\}$ ,  $B'_n = \{p \in \mathbb{N}, u_p \in J'_n\}$ .

Alors  $K_n = J_n \cup J'_n$  et  $A_n = B_n \cup B'_n$ .

Comme  $A_n$  est infini, l'un au moins entre  $B_n$  et  $B'_n$  l'est.

Si  $B_n$  est infini, on pose  $K_{n+1} = J_n$  et  $A_{n+1} = B_n$ , sinon on pose  $K_{n+1} = J'_n$  et  $A_{n+1} = B'_n$ . Donc par construction  $A_{n+1}$  est infini.

On vérifie immédiatement par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}, l(K_n) = \frac{b-a}{2^n}$ .

Par ailleurs,  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de segments emboîtés de  $\mathbb{R}$  dont la longueur tend vers 0. Soit alors  $l$  l'unique élément de  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$ .

Montrons que  $l$  est valeur d'adhérence de  $u$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe alors  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\frac{b-a}{2^n} < \varepsilon$ .

Alors  $K_n \subset B(l, \varepsilon)$ .

De plus,  $A_n$  est infini.

Donc  $\forall p \in \mathbb{N}, \exists q \geq p, q \in A_n$

C'est-à-dire  $\forall p \in \mathbb{N}, \exists q \geq p, \|u_q - l\| < \varepsilon$ .

#### Corollaire :

Si  $X$  est une partie fermée bornée de  $\mathbb{R}$ , alors toute suite de  $X$  admet au moins une valeur d'adhérence dans  $X$ . On dit dans ce cas que  $X$  est une partie compacte de  $\mathbb{R}$ .

#### Démonstration :

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ .  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée, donc admet une valeur d'adhérence  $l$ , qui est nécessairement dans  $\bar{X} = X$ .

#### Corollaire :

Toute suite complexe bornée admet au moins une valeur d'adhérence.

## B) Suites de Cauchy

#### Définition :

Soit  $E$  un evn, et  $u \in E^{\mathbb{N}}$ . On dit que  $u$  est de Cauchy lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, (p \geq n_0 \text{ et } q \geq n_0 \implies \|u_p - u_q\| < \varepsilon) \quad (1.19)$$

Ou encore :  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall p \in \mathbb{N}, \|u_{n+p} - u_n\| < \varepsilon$

#### Proposition :

Toute suite convergente de  $E$  est de Cauchy.

#### Démonstration :

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$  convergeant vers  $l \in E$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ . Alors il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \geq n_0, \|u_n - l\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ .

Alors, pour tout  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$  tels que  $p \geq n_0$  et  $q \geq n_0$ , on a :

$$\|u_p - u_q\| \leq \|u_p - l\| + \|u_q - l\| \leq \varepsilon \quad (1.20)$$

**Proposition :**

Toute suite de Cauchy dans  $E$  est bornée.

**Démonstration :**

Posons  $\varepsilon = 1$ . Il existe alors  $n_0 \in \mathbb{N}^*$  tel que  $q \geq n_0, p \geq n_0 \implies \|u_p - u_q\| \leq \varepsilon$

Donc, pour  $p \geq n_0$ ,  $\|u_p - u_{n_0}\| \leq \varepsilon$ , soit  $\|u_p\| \leq \varepsilon + \|u_{n_0}\|$ .

Posons  $M = \max(\|u_{n_0}\| + 1, \max_{n < n_0} \|u_n\|)$ .

Ainsi, par construction,  $\forall n \in \mathbb{N}, \|u_n\| \leq M$ .

**Théorème (Critère de Cauchy) :**

Toute suite complexe est convergente si, et seulement si, elle est de Cauchy.

**Démonstration :**

Un premier sens a déjà été montré.

Pour l'autre : soit  $u$  une suite complexe de Cauchy.

Alors  $u$  est bornée, donc admet une valeur d'adhérence  $l$ .

Montrons que  $u \rightarrow l$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe alors  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $p \geq n_0, q \geq n_0 \implies \|u_p - u_q\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ .

Par ailleurs, il existe  $p \geq n_0$  tel que  $\|u_p - l\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ .

Ainsi, pour  $q \geq n_0$ ,  $\|u_q - l\| \leq \|u_p - u_q\| + \|u_p - l\| \leq \varepsilon$ .

**C) Parties denses de  $\mathbb{R}$**

**Proposition :**

Soit  $X$  une partie de  $\mathbb{R}$ .

On a l'équivalence :

$X$  est dense dans  $\mathbb{R} \iff X$  coupe tout intervalle ouvert non vide de  $\mathbb{R}$ .

**Démonstration :**

$\implies$  c'est un cas particulier d'un théorème précédent, étant donné qu'un intervalle ouvert est aussi une partie ouverte.

$\impliedby$  Supposons que  $X$  coupe tout intervalle ouvert non vide de  $\mathbb{R}$ . Alors  $X$  coupe toute boule ouverte de  $\mathbb{R}$ . Donc  $\forall x \in \mathbb{R}, x \in \bar{X}$ . Donc  $X$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

**Proposition :**

Soit  $G$  un sous-groupe non vide de  $(\mathbb{R}, +)$ , non nul.

Alors une, et une seule, de ces propriétés est vérifiée :

1.  $G$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .
2. Il existe  $a > 0$  tel que  $G = a\mathbb{Z}$

**Démonstration :**

Posons  $a = \inf G^+$  (où  $G^+ = G \cap \mathbb{R}_+^*$ )

**1<sup>er</sup> cas**  $a > 0$ .

Montrons déjà que  $a \in G^+$  :

Supposons que  $a \notin G^+$ .

Alors  $[a, 2a[ \cap G^+ \neq \emptyset$  puisque  $a = \inf G^+$ .

Soit alors  $x \in [a, 2a[ \cap G^+$ .

Alors  $x \neq a$ . Soit alors  $y \in [a, x[ \cap G^+$  (qui est non vide puisque  $a = \inf G^+$ )

Ainsi,  $x - y > 0$  et  $x - y < a$  car  $x, y \in [a, 2a[$ .

Enfin,  $x - y \in G$  car  $G$  est un groupe et  $x, y \in G$ .

Donc  $x - y \in G^+$  et  $x - y < a$ , ce qui est impossible car  $a = \inf G^+$ .

Donc  $a \in G^+$ .

Montrons qu'alors  $G = a\mathbb{Z}$ . Soit  $x \in G$ , et posons  $p = \left[ \frac{x}{a} \right]$ .

Alors  $p \leq \frac{x}{a} < p + 1$ , donc  $pa \leq x < pa + a$ .

Soit  $0 \leq x - pa < a$ , donc  $x - pa \in G$

Donc  $x - pa = 0$ . Donc  $x \in a\mathbb{Z}$ .

Réciproquement, on a bien  $a\mathbb{Z} \subset G$  puisque  $G$  contient  $a$  et est un groupe.

**2<sup>ème</sup> cas**  $a = 0$ .

Montrons qu'alors  $G$  rencontre tout intervalle ouvert.

Soient  $x, y$  deux réels avec  $x < y$ .

Montrons que  $G \cap ]x, y[ \neq \emptyset$ .

Déjà,  $G^+ \cap ]0, y - x[ \neq \emptyset$  car  $0 = \inf G^+$ ,  $y - x > 0$  et  $0 \notin G^+$ .

Soit alors  $b \in G^+ \cap ]0, y - x[$ .

Alors  $\left] \frac{x}{b}, \frac{y}{b} \right[$  est un intervalle ouvert, de longueur  $\frac{y-x}{b} > 1$ , donc contient un entier  $p \in \mathbb{Z}$ .

Donc  $pb \in G \cap ]x, y[$  (car  $b \in G^+$  et  $G$  est un groupe donc  $pb \in G$ , et de plus par construction  $pb \in ]x, y[$  donc  $pb$  est dans l'intersection)

Donc  $G$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

**Conséquence :**

$\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

Soient  $a$  et  $b$  deux réels avec  $b$  non nul. Alors  $H = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$  est dense dans  $\mathbb{R}$  si et seulement si  $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$ .

En effet :

- Supposons que  $H = c\mathbb{Z}$  où  $c \in \mathbb{R}^*$  (ainsi,  $H$  n'est pas dense dans  $\mathbb{R}$ )

Comme  $a, b \in H$ , il existe  $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$  tel que  $a = pc$  et  $b = qc$ .

Comme  $b \neq 0$ , on a  $q \neq 0$ , et  $\frac{a}{b} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ .

- Supposons maintenant que  $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$

Soit alors  $x \in H$ . Il existe  $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$  tels que  $x = na + mb$ .

Soit  $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$  tel que  $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$ . Ainsi,  $x = b \left( n \frac{a}{b} + m \right) = b \left( n \frac{p}{q} + m \right) = \frac{b}{q} (np + mq)$

Donc  $x \in \frac{b}{q}\mathbb{Z}$ .

Donc  $H \subset \frac{b}{q}\mathbb{Z}$ . Donc  $H$  n'est pas dense dans  $\mathbb{R}$ .

D'où l'équivalence.

## V Limites et continuité

Soient  $E, F$  des evn.

### A) Limite d'une fonction en un point

Soit  $A$  une partie de  $E$ ,  $f: A \rightarrow E$ ,  $a$  un point adhérent à  $A$  et  $b$  un point de  $F$ .

**Définition :**

On dit que la fonction  $f$  admet le point  $b$  pour limite au point  $a$  lorsque, pour tout voisinage  $V$  de  $b$  dans  $F$ , il existe un voisinage  $W$  de  $a$  dans  $E$  tel que  $W \cap A \subset f^{-1}(V)$

Ou encore lorsque :  $\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall x \in A, \|x - a\| \leq r \implies \|f(x) - b\| \leq \varepsilon$

Ou :  $\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \bar{B}(a, r) \cap A \subset f^{-1}(\bar{B}(b, \varepsilon))$

Si  $a \in A$ , on dit alors que  $f$  est continue en  $a$ .

**Théorème (caractérisation séquentielle des limites) :**

La fonction  $f$  admet  $b$  pour limite en  $a$  si et seulement si l'image par  $f$  de toute suite de limite  $a$  est une suite de limite  $b$ .

**Démonstration :**

- Supposons que  $f \xrightarrow[a]{a} b$ . Soit  $u \in A^{\mathbb{N}}$ , supposons que  $u \xrightarrow[+\infty]{a} a$ .  
Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe alors  $r > 0$  tel que  $\forall x \in A, \|x - a\| \leq r \implies \|f(x) - b\| \leq \varepsilon$ .  
Il existe aussi  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies \|u_n - a\| \leq r$ .  
Donc, si  $n \geq n_0, \|u_n - a\| \leq r$ , d'où  $\|f(u_n) - b\| \leq \varepsilon$ .  
Donc  $f(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{b} b$
- Dans l'autre sens : montrons la contraposée.  
Supposons que  $\text{non}(f \xrightarrow[a]{a} b)$ .  
Il existe alors  $\varepsilon > 0$  tel que  $\forall r > 0, \exists x \in A, \|x - a\| \leq r$  et  $\|f(x) - b\| > \varepsilon$ .  
Posons alors, pour  $n \in \mathbb{N}, x_n \in A$  tel que  $\|x_n - a\| < \frac{1}{2^n}$  et  $\|f(x_n) - b\| > \varepsilon$ .  
Alors  $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{a} a$  et  $\text{non}(f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{b} b)$ .

**Conséquences** La limite de  $f$  en  $a$ , si elle existe, est unique.

Les théorèmes opératoires classiques sont vérifiés.

### B) Relation de comparaison, développements limités

- Dans le cadre réel : voir cour de sup
- Dans le cadre général : plus tard.

### C) Applications continues

Soit  $A$  une partie de  $E$ , et  $f: A \rightarrow E$  une application.

**Définition :**

On dit que  $f$  est continue si  $f$  est continue en tout point de  $A$ .

**Théorème :**

Si  $X$  est une partie dense de  $A$  et si  $f$  est continue, alors  $f|_X = 0 \implies f = 0$ .

**Démonstration :**

Supposons que  $f|_X = 0$ . Soit  $a \in A$ .

Comme  $A \subset \bar{X}$ , il existe  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$  tel que  $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$ .

Donc  $f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(a)$ . Or,  $\forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) = 0$ . Donc  $f(a) = 0$ .

**Conséquence :**

Plus généralement, si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions continues qui coïncident sur une partie dense de  $A$ , alors elles sont égales.

**Théorème :**

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (1)  $f$  est continue sur  $A$ .
- (2) L'image réciproque par  $f$  de tout ouvert de  $F$  est un ouvert de  $A$ .
- (3) L'image réciproque par  $f$  de tout fermé de  $F$  est un fermé de  $A$ .

**Démonstration :**

(1)  $\implies$  (2) Soit  $f$  continue sur  $A$ .

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $F$ , et soit  $a \in f^{-1}(\Omega)$ . On note  $b = f(a)$ .

Comme  $f$  est continue en  $a$ , il existe un voisinage  $W$  de  $a$  tel que  $W \cap A \subset f^{-1}(\Omega)$ .

Or,  $W \cap A \in V_A(a)$ . Donc  $f^{-1}(\Omega) \in V_A(a)$ .

Comme c'est valable pour tout  $a$ ,  $f^{-1}(\Omega)$  est un ouvert de  $A$ .

(2)  $\implies$  (1) Soit  $a \in A$ , posons  $b = f(a)$ .

Pour tout  $\varepsilon > 0$  est un ouvert de  $F$ .

Donc  $f^{-1}(B(b, \varepsilon))$  est un ouvert de  $A$  contenant  $a$ .

Il existe donc  $r > 0$  tel que  $B(a, r) \cap A \subset f^{-1}(B(b, \varepsilon))$

C'est-à-dire  $\forall x \in A, \|x - a\| < r \implies \|f(x) - b\| < \varepsilon$ .

• Enfin :

$$\begin{aligned}
 (2) &\iff \forall \Omega \in O(F), f^{-1}(\Omega) \in O(A) \\
 &\iff \forall X \in F(F), f^{-1}(C_F(X)) \in O(A) \\
 &\iff \forall X \in F(F), C_A(f^{-1}(X)) \in O(A) \\
 &\iff \forall X \in F(F), f^{-1}(X) \in F(A) \\
 &\iff (3)
 \end{aligned} \tag{1.21}$$

**Théorème :**

Si  $f: A \rightarrow F$  est continue, alors son graphe  $G_f$  est un fermé de  $A \times F$ .

Note : On se donne sur  $E \times F$  la norme  $\|(x, y)\|_{E \times F} = \sup(\|x\|_E, \|y\|_F)$ .

**Démonstration :**

Soit  $\varphi: A \times F \rightarrow F$ . Montrons que  $\varphi$  est continue.

$$(x, y) \mapsto y - f(x)$$

Soient  $(x_0, y_0) \in A \times F$  et  $\varepsilon > 0$ .

Il existe alors  $r > 0$  tel que  $\forall x \in A, \|x - x_0\| < r \implies \|f(x) - f(x_0)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

Donc  $\forall (x, y) \in A \times F$ ,

$$\begin{aligned} \|(x, y) - (x_0, y_0)\| \leq \min\left(r, \frac{\varepsilon}{2}\right) &\implies \|(y - f(x)) - (y_0 - f(x_0))\| \leq \|y - y_0\| + \|f(x) - f(x_0)\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon \end{aligned} \tag{1.22}$$

Donc  $\varphi$  est continue.

Or,  $G_F = \{(x, y), y = f(x)\} = \varphi^{-1}(\{0\})$ . Donc  $G_F$  est fermé, puisque c'est l'image réciproque d'un fermé par une application continue.

**Définition :**

Soient  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$ , et  $f: A \rightarrow B$  une application. On dit que  $f$  est un homéomorphisme lorsque  $f$  est continue, bijective et lorsque  $f^{-1}$  est continue.

**Remarque :**

L'homéomorphisme  $f$  échange les ouverts (resp. les fermés) de  $A$  et  $B$ .

**D) Théorème du point fixe**

**Théorème :**

Soit  $A$  une partie de  $E$ , et  $f: A \rightarrow E$  telle que  $f(A) \subset A$ , et soit  $a \in A$ .

Alors il existe une unique suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que : 
$$\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

**Proposition :**

Avec les notations précédentes, si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge dans  $A$ , alors sa limite est un point fixe de  $f$ .

**Démonstration :**

Si  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$  où  $l \in A$ , alors par continuité  $f(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(l)$ , c'est-à-dire  $u_{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(l)$ , donc  $l = f(l)$ .

Dans la suite du chapitre, on supposera que  $E = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

**Théorème :**

Si  $f: A \rightarrow E$  vérifie les conditions :

1.  $f(A) \subset A$  fermée
2.  $f$  est contractante ( $\exists k \in ]0; 1[$ ,  $\forall (x, y) \in A^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ )

(C'est-à-dire que  $f$  est  $k$ -lipschitzienne pour un  $k < 1$ )

Alors  $f$  possède un unique point fixe dans  $A$ .

De plus, toute suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $A$  telle que  $u_{n+1} = f(u_n)$  converge vers ce point fixe.

**Démonstration :**

- Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de points de  $A$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ .

Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}, |u_{n+2} - u_{n+1}| = |f(u_{n+1}) - f(u_n)| \leq k|u_{n+1} - u_n|$

D'où, par récurrence,  $|u_{n+1} - u_n| \leq k^n |u_1 - u_0|$ .

Ainsi,  $u$  est de Cauchy. En effet :

Soit  $n_0 \in \mathbb{N}$ .

Alors, pour  $n \geq n_0$  et  $p \in \mathbb{N}$  :

$$|u_{n+p} - u_n| \leq \sum_{k=n}^{n+p-1} |u_{k+1} - u_k| \leq \sum_{k=n}^{n+p-1} k^i |u_1 - u_0| \leq |u_1 - u_0| \frac{k^n - k^{n+p}}{1 - k} \leq \frac{|u_1 - u_0|}{1 - k} k^{n_0} \quad (1.23)$$

Ainsi, si on fixe  $\varepsilon > 0$ , on peut choisir  $n_0$  tel que  $\frac{|u_1 - u_0|}{1 - k} k^{n_0} \leq \varepsilon$

Et on a alors, pour  $n \geq n_0$  et  $p \in \mathbb{N}, |u_{n+p} - u_n| \leq \varepsilon$

Donc  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge dans  $E$  ( $= \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ )

Comme la partie  $A$  est fermée, sa limite est dans  $A$ , qui est alors un point fixe de  $f$ .

D'où l'existence du point fixe.

- Soient  $a$  et  $b$  deux points de  $A$  fixes par  $f$ . Alors  $|a - b| = |f(a) - f(b)| \leq k|a - b|$ .

Donc  $(1 - k)|a - b| \leq 0$ , et comme  $|a - b| \geq 0$  et  $k < 1$ , on a  $|a - b| = 0$ .

D'où l'unicité.

- Vitesse de la convergence :

On montre par récurrence que si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ , alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$|u_n - a| \leq k^n |u_0 - a|.$$

### E) Étude générale des suites récurrentes

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ , et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $\begin{cases} u_0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ .

- Vérifier que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est définie :

◇ Si  $I$  est stable par  $f$

◇ Sinon, tout dépend de  $u_0$  ; on peut chercher des sous-intervalles stables par  $f$ .

- Rechercher les points fixes de  $f$ .

On suppose  $f$  dérivable au point fixe  $a$  :

◇ Si  $|f'(a)| < 1$ , on a un point fixe attractif.

Si  $1 > k > |f'(a)|$ , il existe  $V \in V_A(a)$  tel que  $\forall x \in V, |f(x) - a| \leq k|x - a|$

◇ Si  $|f'(a)| > 1$ , on a un point fixe répulsif.  $u \rightarrow a \iff u$  est stationnaire en  $a$ .

◇ Le cas  $|f'(a)| = 1$  est un cas litigieux.

- Étudier la monotonie de  $f$  :

◇ Si  $f$  croît, la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est monotone.

◇ Si  $f$  décroît, les suites  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  sont monotones de sens contraire.

- Étudier le signe de  $\varphi(x) = x - f(x)$ .



- ◇ Si  $\varphi \leq 0$ ,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  croît.
- ◇ Si  $\varphi \geq 0$ ,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  décroît.
- Chercher une majoration ou une minoration de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .